УДК 528.1:519.2

Про дисперсію суми випадкових величин

Пряха Б. Г.
Київський Національний університет будівництва та архітектури, м. Київ

Обґрунтована теорема теорії похибок вимірювань.

Постановка проблеми. При діагностиці технічного стану будівель та споруд створюється геодезична основа, виконуються спостереження за осіданням та креном споруд. Якісна оцінка точності геодезичних вимірювань має важливе значення для складання проекту реконструкції.

Візьмемо сукупності незалежних вимірів n елементів споруди

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_{21}, x_{22}, ..., x_{2k_2}; \\ .... \\ x_n = x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk_n}, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

де $k_1, k_2, ..., k_n$ - обсяги сукупностей. В сукупностях (1) визначають арифметичні середини , за формулою [2]

$$S^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (2)$$

обчислюють вибіркові дисперсії $S_{x_1}^2, S_{x_2}^2, ..., S_{x_n}^2$. В геодезичній практиці часто приходиться сумувати випадкові величини.

Проблема в тому, що Рекомендація ІНС-1 Міжнародного комітету мір та ваг рекомендує складові невизначеностей типу А оцінювати вибірковими дисперсіями S^2 або відхиленнями S, а теорія похибок вимірювань не наводить правило визначення дисперсії S_y^2 суми випадкових величин.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В праці [4] встановлено, що вибіркова дисперсія являє собою оцінку для дисперсії Σ^2 а вибіркова дисперсія [2]

(3)

— оцінку для дисперсії σ^2.

Ціль статті: встановити правило визначення дисперсії S_y^2 суми випадкових величин $x_1, x_2, ..., x_n$.

Виклад основного матеріалу дослідження. Схема сумування дискретних випадкових величин обгрунтована П. Л. Чебишовим в праці «Про середні величини» [5].

Згідно схеми дисперсія σ_y^2 суми випадкових величин $x_1, x_2, ..., x_n$ визначається в сукупності $y = y_1, y_2, ..., y_{k_y}$ всіх можливих сум.

Т е о р е м а. Якщо сукупності вимірів незалежні, відповідно мають: обсяги $k_1, k_2, ..., k_n$ вибіркові дисперсії $S_{x_1}^2, S_{x_2}^2, ..., S_{x_n}^2$, то дисперсія величини

$S_1^2, x_1, x_2, ..., x_n$ $s^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2$

$y = x_1 + x_2 + ... + x_n$ матиме такий вигляд:

$$S_y^2 = \frac{k_y}{k_y - 1}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i - 1}{k_i}S_{x_i}^2, \quad (4)$$

де $k_y = \prod_{i=1}^{n} k_i$.

Д о в е д е н н я. Обсяг k_y сукупності $y = y_1, y_2, ..., y_{k_y}$ всіх можливих сум дорівнює кількості комбінацій елементів сукупностей по одному елементу з кожної сукупності і визначається за формулою $k_y = \prod_{i=1}^{n} k_i$.

Генеральну дисперсію σ_y^2 суми випадкових величин визначають за теоремою ймовірностей [1]

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + ... + \sigma_{x_n}^2 \quad (5)$$

де $\sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2, ..., \sigma_{x_n}^2$ - генеральні дисперсії випадкових величин $x_1, x_2, .., x_n$.

Оскільки вибіркова дисперсія s^2 являє собою оцінку для дисперсії σ^2, тому згідно теореми (5)

$$s_y^2 = s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 + ... + s_{x_n}^2 \qquad (6)$$

З правил (2), (3) випливає, що вибіркові дисперсії s_y^2, S_y^2 мають таку залежність:

$$s_y^2 = \frac{k_y - 1}{k_y} S_y^2. \qquad (7)$$

З урахуванням відповідності (7) рівняння (6) приводиться до вигляду

$$\frac{k_y - 1}{k_y} S_y^2 = s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 + ... + s_{x_n}^2 \qquad (8)$$

Від рівняння (8) приходимо до правила

$$S_y^2 = \frac{k_y}{k_y - 1}(s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 + ... + s_{x_n}^2). \qquad (9)$$

Вибіркові дисперсії s_x^2 і вибіркові дисперсії S_x^2 мають такі залежності:

$$s_{x_1}^2 = \frac{k_1 - 1}{k_1} S_{x_1}^2; \qquad s_{x_2}^2 = \frac{k_2 - 1}{k_2} S_{x_2}^2; \qquad s_{x_n}^2 = \frac{k_n - 1}{k_n} S_{x_n}^2.$$

Підставимо ці вирази в формулу (9), тобто формула (10) буде мати вигляд:

$$S_y^2 = \frac{k_y}{k_y - 1}\left(\frac{k_1 - 1}{k_1} S_{x_1}^2 + \frac{k_2 - 1}{k_2} S_{x_2}^2 + ... + \frac{k_n - 1}{k_n} S_{x_n}^2\right) = \frac{k_y}{k_y - 1} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i - 1}{k_i} S_{x_i}^2. \qquad (10)$$

Теорему доведено.

З теореми випливає наслідок.

Н а с л і д о к. Якщо сукупності $x_1, x_2, .., x_n$ вимірів незалежні, відповідно мають: однакові обсяги k вибіркові дисперсії $S_{x_1}^2, S_{x_2}^2, ..., S_{x_n}^2$, то дисперсія величини $y = x_1 + x_2 + ... + x_n$ матиме такий вигляд:

$$S_y^2 = \frac{k^{n-1}(k-1)}{k^n - 1} \sum_{i=1}^n S_{x_i}^2. \qquad (11)$$

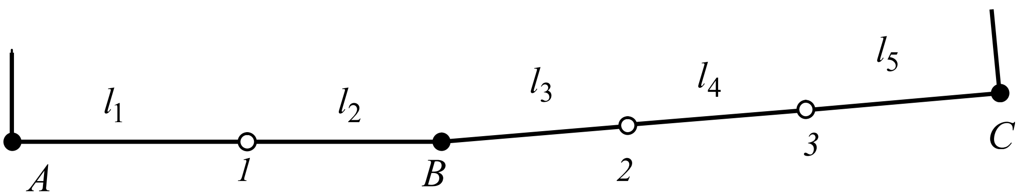
Справді, якщо обсяги сукупностей однакові: $k_1 = k_2 = ... = k_n = k$, то величина

y матиме обсяг можливих сум   а рівняння (10) приводиться до вигляду

$$S_y^2 = \frac{k^n}{k^n - 1}\left(\frac{k-1}{k} S_{x_1}^2 + \frac{k-1}{k} S_{x_2}^2 + ... + \frac{k-1}{k} S_{x_n}^2\right).$$

Після спрощення цього рівняння приходимо до правила (11).

П р и к л а д. На рисунку наведено частина плану будівлі.



$k_y = \prod_{i=1}^n k_i = k^n$,

Рисунок. План будівлі та її характерні точки.

Будівля має кути А, В, С, характерні точки 1, 2, 3, що недоступні для прямих лінійних вимірювань.

Електронним тахеометром SET330R посереднім методом, без використання відбивача вісім раз виміряно горизонтальне прокладення l_1, а прокладення l_2, l_3, l_4, l_5 виміряні чотири рази. За формулою (2) обчислені відхилення:

$S_{l_1} = 4{,}1$ мм;   мм;   мм;   мм;   мм.

Потрібно обчислити відхилення $S_{l_{BC}}$ горизонтальних прокладень l_{AB}, l_{BC}.

Обсяги $k_1 = 8,\ k_2 = 4$ вимірів ліній l_1, l_2 не однакові, тому відхилення $S_{l_{AB}}$ обчислимо за правилом (4). Сумуються дві величини l_1, l_2 отже $n = 2$.

$$k_y = \prod_{i=1}^n k_i = \prod_{i=1}^2 k_i = k_1 k_2 = (8)(4) = 32.$$

$$S^2_{l_{AB}} = \frac{k_y}{k_y - 1}\sum\nolimits_{i=1}^{2}\frac{k_i - 1}{k_i}S^2_{l_i} = \frac{k_y}{k_y - 1}\left(\frac{k_1 - 1}{k_1}S^2_{l_1} + \frac{k_2 - 1}{k_2}S^2_{l_2}\right) =$$

$$= \frac{32}{32-1}\left(\frac{8-1}{8}4{,}1^2 + \frac{4-1}{4}3{,}4^2\right) = \frac{32}{31}\left(\frac{7}{8}16{,}81 + \frac{3}{4}11{,}56\right) = 24{,}13 \text{ мм}^2;$$

$$S_{l_{AB}} = \sqrt{24{,}13} = 4{,}9 \text{ мм.}$$

Обчислимо оцінку для точності T_0 вимірювань відстані l_{AB} [4]

$$T_{l_{AB}} = \sqrt{2}S_{l_{AB}} = (1{,}4)(4{,}9) = 6{,}9 \text{ мм.}$$

При визначенні відхилення за правилом (11) необхідно врахувати обсяг вимірів $k = 4$ кожної лінії. Сумуються три випадкові величини l_3, l_4, l_5 отже $n = 3$.

$$\sum\nolimits_{i=3}^{5}S^2_{l_i} = S^2_{l_3} + S^2_{l_4} + S^2_{l_5} = 40{,}54 \text{ мм}^2.$$

$$S^2_{l_{BC}} = \frac{k^{n-1}(k-1)}{k^n - 1}\sum\nolimits_{i=3}^{5}S^2_{l_i} = \frac{4^{3-1}(4-1)}{4^3 - 1}40{,}54 = \frac{48}{63}40{,}54 = 30{,}89 \text{ мм}^2;$$

$$S_{l_{BC}} = \sqrt{30{,}89} = 5{,}6 \text{ мм.}$$

Оцінка для точності вимірювань відстані буде така:

$$T_{l_{BC}} = \sqrt{2}S_{l_{BC}} = (1{,}4)(5{,}6) = 7{,}8 \text{ мм.}$$

Висновки.

1. Якщо є дисперсії випадкових величин $x_1, x_2, .., x_n$, то за правилами (4), (11) визначається дисперсія S_y^2 суми цих випадкових величин.
2. Вибіркова дисперсія S_y^2 — це оцінка для дисперсії Σ_y^2 модифікованої величини y [4].

Перспективи подальших розвідок у даному напрямку полягають в удосконаленні методів оцінки точності визначення вузлових точок геодезичних мереж, площ земельних ділянок.

Перелік посилань

1. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей: Учебник. — Изд. 6-е, перераб. и доп. — М.: Наука, Гл. ред. физ. мат. лит., 1988. — 173 с.

2. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научних работников и инженеров. — М.: Наука, 1968. — 539 с.

3. **Пряха Б. Г.** До оцінки похибок вимірювань у геодезичних побудовах // Вісник геодезії та картографії. — 2002. — №4. — С. 11-18.

4. **Пряха Б. Г., Білецький Я. В.** Про точність геодезичних вимірювань // Вісник геодезії та картографії. — 2003. — №3. — С. 43-49.

5. **Чебышев П. Л.** Полное собрание сочинений Т.2. Математический анализ. — М. — Л. — 1947. — С. 431-437.

Отримано 30.03.05