УДК 528.1:519.2

Про точність вимірювань

© Пряха Б.Г.
Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ

Обгрунтовується аксіома, наводяться означення і твердження теорії точності вимірювань. Розкривається сутність точності вимірювань.

Постановка проблеми. В практиці обстеження житлового фонду найбільш широке розповсюдження отримали ультразвукові і механічні методи, якими досліджують конструкції. Ультразвуковим імпульсним методом встановлюють міцність, наявність пустот, глибину тріщин і товщину зруйнованого шару матеріалу. Про міцність матеріалу судять по швидкості проходження ультразвукових коливань [1]. Оскільки міцність матеріалу оцінюють за результатами вимірювання часу проходження ультразвукових коливань, то точність результатів визначення міцності матеріалу залежить від точності вимірювань. Точність визначення осідань, кренів, зсувів споруд, окремих конструктивних елементів також залежить від точності вимірювань.

Отже, важливо встановити сутність поняття точності, визначити шляхи підвищення якості вимірювань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В праці [2] розглянута концепція невизначеності вимірювань, що запроваджена документом [3] Міжнародного комітету зі стандартизації (ISO). Концепція зумовлена впливом наукових досліджень з кібернетики, теорії інформації, теорії прийняття рішень, математичної статистики, використання нового типу математичної моделі вимірювань.

В концепції невизначеності, порівняно з концепцією похибок, відходять від поняття «істинного значення вимірюваної величини», сприймають її як «нерозпізнанну», а тому термін похибок втрачає своє смислове значення [2].

Ціль статті: розкрити суть характеристик, за якими оцінюється точність вимірювань.

Виклад основного матеріалу досліджень: Теорія точності вимірювань досліджує дискретні випадкові величини. Означення випадкової величини в теорії точності вимірювань суттєво відрізняється від означення випадкової величини, що наводить теорія ймовірностей.

Означення 1. *Дискретною випадковою величиною називається числова змінна* x*, значення якої* $x = X$ *утворюють множину* $G = \{x = X\}$ *показників, що змінюються ступенями-квантами* $[Q] = x_{i+1} - x_i$*. Множина* G *називається повною групою значень величини* X *, або повною групою значень вимірів.*

Приклад 1. Електронним тахеометром 3Та5Р виконано 800 вимірювань однієї короткої лінії і одержана така множина «значень» вимірів (мм) [4]:

$$G = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{6600, 6601, 6602, 6603, 6604\}.$$

Окремі значення вимірів зустрічались в сукупності вимірів відповідно 1, 125, 518, 153, 3 рази. Обсяг вимірів $k = 800$, а обсяг повної групи G значень вимірів $k_G = 5$. Ступінь квантування значень вимірів $[Q] = 1$мм. Розмах значень вимірів $W = x_{\max} - x_{\min} = x_5 - x_1 = 4$ мм.

Величина розмаху W при нарощуванні кількості вимірювань до нескінченності набуває постійного значення.

Таким чином, розмах значень генеральної сукупності є вірогідною подією і серед усіх випадкових величин має найбільший степінь довіри.

З урахуванням заокруглень значень вимірів величина X не може набути значень менших $x_{\min} - \frac{[Q]}{2}$ і більших $x_{\max} + \frac{[Q]}{2}$.

З наведеного аналізу розмаху значень вимірів однієї величини випливає важливе твердження теорії точності вимірювань [4].

Аксіома. *Якщо генеральна сукупність вимірів нормально розподілена, не має систематичних похибок, то довірчий інтервал для величини* X *виглядатиме так:*

$$P\left(x_{\min} - \frac{[Q]}{2} \leq X \leq x_{\max} + \frac{[Q]}{2}\right) = 1,$$

де $x_{\min}$, $x_{\max}$ – найменше і найбільше значення вимірів; $[Q] = x_{i+1} - x_i$ і є ступінь квантування значень вимірів.

Математичне сподівання величини X визначають за означенням:

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x),$$

де $f(x)$ – функція розподілу ймовірностей [5].

Як кількісну (числову) міру відхилення дискретної випадкової величини X від її математичного сподівання $E(X) = \mu$ прийнято центральний момент другого порядку, який позначають символом σ^2, тобто

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x).$$

Величина $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ і є стандартним відхиленням величини X.

Генеральну дисперсію обчислюють ще за такою теоремою [5]:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2,$$

де

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$$

і є математичним сподіванням квадрата випадкової величини.

Якщо за центр розсіювання величини X взяти якесь значення x_i із групи G генеральної сукупності, то приходимо до такого означення дисперсії значення x_i випадкової величини:

$$\sigma^2_{x_i} = E[(X-x_i)^2] = \sum_x (x-x_i)^2 f(x).$$

Дисперсію значення x величини X обчислюють за теоремою [6]

$$\sigma^2_x = \sigma^2 + (x-\mu)^2.$$

Якщо відомі дисперсії значень x групи G сукупності, то дисперсію σ^2 можна знайти за такою теоремою [6]:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_x \sigma^2_x f(x)}{2}.$$

Від цього правила приходимо до означення середньої дисперсії:

$$\bar{\sigma}^2 = 2\sigma^2 = \sum_x \sigma^2_x f(x),$$

де $\bar{\sigma} = \sqrt{2}\sigma$ називається середнім стандартним відхиленням.

Якщо взяти випадкову вибірку обсягу k, то оцінкою для математичного сподівання і дисперсії σ^2 відповідно будуть вибіркове середнє значення

$$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \qquad (1)$$

і вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{1}{k}\sum\nolimits_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2.$$

Величина $s = \sqrt{s^2}$ називається вибірковим стандартним відхиленням.

Розсіювання значень вимірів характеризує ще дисперсія модифікованої величини X, що визначається за різницями значень вимірів. Щоб одержати таку дисперсію необхідно виконати видозмінення величини X. Для цього беруть генеральну сукупність вимірів обсягу k, знаходять всі комбінації C_k^2 вимірів по два виміри і обчислюють різниці d значень кожної пари вимірів. Загальна кількість різниць

$$n = C_k^2 = \frac{k!}{(k-2)!2!} = \frac{1}{2}k(k-1). \tag{2}$$

Квадрат середньої квадратичної різниці значень вимірів визначають за формулою

$$d_0^2 = \frac{\sum\nolimits_d d^2}{n} = \frac{2\sum\nolimits_d d^2}{k(k-1)}.$$

Модифікована випадкова величина має всього два умовні значення. Середня квадратична різниця $d_0 = \sqrt{d_0^2} = T_0$ являє собою розмах значень модифікованої величини X, що визначає точність T_0 вимірювань.

Величина $\Sigma^2 = \frac{d_0^2}{2} = \frac{T_0^2}{2}$ є дисперсією модифікованої величини X.

Сума квадратів усіх різниць значень вимірів генеральної сукупності визначається за формулою [7]:

$$\sum\nolimits_d d^2 = \frac{k^2}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{k_G}\sum\nolimits_x (x - x_i)^2 f(x) f(x_i), \tag{3}$$

де k_G – обсяг повної групи G значень вимірів; $f(x)$ – функція розподілу ймовірностей; $f(x_i) = p(x_i)$, тобто це ймовірність значення x_i випадкової величини.

Поділивши суму квадратів різниць (3) на їхню кількість (2), визначимо квадрат середньої квадратичної різниці вимірів

$$d_0^2 = \frac{k}{k-1}\sum\nolimits_{i=1}^{k_G}\sum\nolimits_x (x - x_i)^2 f(x) f(x_i).$$

Щоб знайти дисперсію Σ^2 модифікованої величини X, необхідно квадрат середньої квадратичної різниці значень вимірів поділити на два.

Тепер можна ввести поняття точності вимірювань [7].

Означення 2. *Є генеральна сукупність вимірів обсягу k що має повну групу значень вимірів обсягу k_G. Визначається математичне сподівання половини квадрата різниці значень вимірів, що являє собою різницю математичного сподівання квадрата величини X і математичного сподівання добутку двох різних значень цієї величини:*

$$\Sigma^2 = E\left\{\frac{[(X\setminus x)-x]^2}{2}\right\} = E(X^2) - E(XX) =$$

$$= \frac{k}{2(k-1)}\sum_{i=1}^{k_G}\sum_{x}(x-x_i)^2 f(x) f(x_i) = \frac{d_0^2}{2},$$

де $X \setminus x$ – це доповнення x до X . Величина Σ^2 називається дисперсією модифікованої величини X; $\Sigma = \sqrt{\Sigma^2}$ – це середнє квадратичне відхилення модифікованої величини X. Середню квадратичну різницю значень вимірів $d_0 = \sqrt{d_0^2} = \sqrt{2}\Sigma$, що являє собою розмах модифікованої величини X в праці [7] запропоновано називати *точністю* T_0 *вимірювань*.

Спосіб обчислення наведеної дисперсії грунтується на такій лемі [7]:

Дисперсія Σ^2 модифікованої величини X і генеральна дисперсія σ^2 мають таку залежність:

$$\Sigma^2 = \frac{k}{k-1}\sigma^2,$$

де k – обсяг генеральної сукупності.

Якщо взяти випадкову вибірку обсягу k, то оцінкою для дисперсії Σ^2 буде вибіркова дисперсія

$$S^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2. \quad (4)$$

Величина $S = \sqrt{S^2}$ – це вибіркове відхилення, що характеризує невизначеність типу A вимірювань.

З формули (4) не просто відшукати прообраз вибіркового відхилення S, тобто виявити ту випадкову величину, алгебраїчним відображенням якої є величина S. Суть цієї характеристики розкриває така теорема [8]:

Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – це випадкова вибірка обсягу k, то вибіркова дисперсія S^2 виглядатиме так:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} S_{x_i}^2}{2k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{k(k-1)} = \frac{d_0^2}{2}, \tag{5}$$

де $S_{x_i}^2 = \frac{\sum_{k-1} d_{ij}^2}{k-1}$ – вибіркова дисперсія: квадрат відхилення значення x_i вибірки від інших її значень; $d_{ij} = x_i - x_j$ – тобто це різниця значень вибірки; j – індекс, якого набуває множина J чисел: $J = \{j \mid j = 2,3,\ldots, k \text{ і } j \neq i\}$; $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ – сума квадратів різниць; $n = k(k-1)/2$ – загальна кількість різниць; d_0 – середня квадратична різниця значень вибірки.

Середня квадратична різниця $d_0 = \sqrt{2}S = T$ і є оцінка для точності T_0 вимірювань.

Якщо вибіркову дисперсію S^2 обчислити за формулою (4), то дисперсії S_x^2 значень вимірів можна визначити за такою теоремою [4]:

Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – випадкова вибірка обсягу k, то вибіркова дисперсія S_x^2 (квадрат відхилення значення x вибірки від інших її значень) матиме такий вигляд:

$$S_x^2 = S^2 + \frac{k}{k-1}(x - \overline{x})^2.$$

Характеристику T можна знайти і за наведеною теоремою (5):

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} S_x^2}{k}}.$$

Особливістю дисперсій S_x^2 є те, що за ними встановлюють ваги значень вимірів окремих елементів замкнених систем, якими є кола K, M геодезичних побудов [8]. Це надає можливість виправити значення вимірів і одержати найімовірніші значення елементів.

Для будь-якої сукупності вимірів доцільно ввести статистику F, яка відображає її наповненість.

Означення 3. *Наповненістю F сукупності вимірів однієї величини називається відношення обсягу k_M множини значень вимірів до обсягу k_G повної або очікуваної групи G значень вимірів:*

$$F = \frac{k_M}{k_G}. \tag{6}$$

Обсяг k_G повної або очікуваної групи G значень вимірів залежить від розмаху W значень сукупності і ступеня квантування $[Q]$ значень вимірів:

$$k_G = \frac{W}{[Q]} + 1. \tag{7}$$

Підставивши в формулу (6) значення k_G з рівняння (7) одержимо:

$$F = \frac{k_M[Q]}{W + [Q]}.$$

Отже, генеральна сукупність вимірів має наповненість $F = 1$.

Точність вимірювань залежить також від обсягу сукупності вимірів. Кількість вимірювань характеризує добротність сукупності вимірів.

Означення 4. *Добротністю Q сукупності вимірів називається відношення обсягу k сукупності до обсягу k_G групи G генеральної сукупності або очікуваної на звичайній сукупності вимірів групи G вимірів:*

$$Q = \frac{k}{k_G}. \tag{8}$$

Виходить, якщо виконати $k = k_G$ вимірювань однієї величини, тоді сукупність вимірів набуде добротності $Q = 1$. Подальше нарощування кількості вимірювань збільшує добротність сукупності вимірів.

Приклад 2. При детальному (інструментальному) обстеженні споруди визначалась позначка опорної площадки колони. Одержана така сукупність вимірів (мм) обсягу $k = 4$:

$$H = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8003, 8005, 8002, 8002).$$

Потрібно визначити наповненість, добротність вибірки, навести характеристики положення і розсіювання значень сукупності, знайти оцінку для точності вимірювань.

Вибірка має розмах $W = x_{\max} - x_{\min} = x_2 - x_3 = 5 - 2 = 3$ мм. Ступінь квантування значень вимірів $[Q] = 1$ мм. Проекцією сукупності H є множина значень вимірів обсягу $k_M = 3$:

$$M = (x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = (8002, 8003, 8005).$$

Обсяг очікуваної групи G значень вимірів, наповненість і добротність сукупності вимірів обчислимо відповідно за формулами (7), (6), (8):

$$k_G = \frac{W}{[Q]} + 1 = \frac{3}{1} + 1 = 4;$$

$$F = \frac{k_M}{k_G} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

$$Q = \frac{k}{k_G} = \frac{4}{4} = 1.$$

Вибіркове середнє значення, розсіювання S^2 обчислимо за формулами (1), (4).

Маємо:

$$\bar{x} = \frac{3+5+2+2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow 8003 \text{ мм}.$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4-1}[(3-3)^2 + (5-3)^2 + (2-3)^2 + (2-3)^2] =$$

$$= \frac{1}{3}[0^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2] = \frac{1}{3}(0+4+1+1) = \frac{6}{3} = 2 \text{ мм}^2.$$

Для контролю обчислень знайдемо вибіркову дисперсію S^2 за теоремою (5).

В сукупності H визначається $n = C_k^2 = \frac{1}{2}k(k-1) = (0,5)(4)(4-1) = 6$ різниць.

Обчислимо ці різниці (мм):

$$d_1 = (x_1 - x_2) = (3-5) = -2; \quad d_2 = (x_1 - x_3) = (3-2) = 1;$$

$$d_3 = (x_1 - x_4) = (3-2) = 1; \quad d_4 = (x_2 - x_3) = (5-2) = 3;$$

$$d_5 = (x_2 - x_4) = (5-2) = 3; \quad d_6 = (x_3 - x_4) = (2-2) = 0.$$

Знайдемо суму квадратів різниць (мм^2):

$$\sum_{i=1}^{6} d_i^2 = (-2)^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 0^2 = 4+1+1+9+9+0 = 24.$$

Обчислимо квадрат середньої квадратичної різниці значень сукупності:

$$d_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_i^2}{k} = \frac{24}{6} = 4 \text{ мм}^2.$$

Знайдемо вибіркову дисперсію: $S^2 = \frac{d_0^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ мм².

Обчислимо оцінку T для точності T_0 вимірювань:

$$T = \sqrt{2}S = \sqrt{2}\sqrt{S^2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \text{ мм}.$$

Висновки

1. Точність вимірювань T_0 і оцінка T для точності T_0 вимірювань являють собою середні квадратичні різниці значень відповідно генеральної і звичайної сукупностей вимірів.
2. Вибіркова дисперсія S^2 – це половина квадрату середньої квадратичної різниці значень вимірів, оцінка для дисперсії Σ^2, а вибіркова дисперсія s^2 – оцінка для генеральної дисперсії σ^2.
3. Підвищити точність вимірювань можна шляхом зменшення ступеня квантування $[Q]$ і розмаху W значень сукупності вимірів. При вимірюваннях зі сталим ступенем квантування, підвищити точність можна тільки шляхом зменшення розмаху значень вимірів. Отже, точність підвищується, якщо вимірювання проводити приладами, які забезпечують зменшення розмахів значень сукупностей вимірів. Наприклад, у геодезичній практиці менші розмахи значень вимірів одержують при застосуванні теодолітів і нівелірів, зорові труби яких мають більші вхідні отвори.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямку полягають в розробці нових методик вимірювань, в установленні законів розподілу дискретних випадкових величин, критеріїв узгодження статистичних рядів з тим чи іншим законом розподілу.

Перелік посилань

1. **Асаул А.Н., Казаков Ю.Н., Ипанов Ю.И.** Реконструкция и реставрация объектов недвижимости: Учебник / Под. ред. д. э. н., проф. А. Н. Асаула. – СПб.: Гуманистика, 2005. – 288 с.

2. **Войтенко С.** Використання концепції невизначеності при обробці результатів геодезичних вимірів // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: Зб. наук. пр. – Л., 2005. – С. 88-90.

3. **Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement**. ISO International Organization for Standartization, Geneva, 1993.
4. **Пряха Б.Г.** Твердження теорії точності вимірювань// Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Европейський досвід. Чернігів:КП «Видавництво «Чернігівські обереги», 2005. – С. 50-53.
5. **Walpole Ronald E, Myers Raymond H.** Probability and Statistics for Engineers and Scientists. 3-th edition, Macmillan Publishing Company. – New York, 1985. – 639 p.
6. **Білецький Я.В., Пряха Б.Г.** Про дисперсії геодезичних вимірів// Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Европейський досвід. Чернігів:КП «Видавництво «Чернігівські обереги», 2005. – С. 55-57.
7. **Пряха Б.Г., Білецький Я.В.** Про точність геодезичних вимірювань // Вісник геодезії та картографії. – 2003. – №3. – С. 43-49.
8. **Пряха Б.Г.** До оцінки похибок вимірювань у геодезичних побудовах // Вісник геодезії та картографії. – 2002. – №4. – С. 11-18.

Отримано 30.03.06