УДК 621.396

И.В. ЧУМАЧЕНКО, В.Г. КУЧМИЕВ, Н.В. ДОЦЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ БИХРОМАТИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Статья посвящена перечислению биграфов. Получены оценки числа ребер. Предлагаемый подход эффективен при построении каталогов типовых моделей и типовых проектных решений

перечисление, биграф, модель, эквивалентность, генерация, каталог

Введение

Одним из основных принципов содержательного описания технических, организационно-экономических, биологических систем является типизация, т.е. разработка типовых решений, в которых отражаются общие для ряда различных процессов элементы или характеристики. Для реализации указанного принципа перспективным направлением является применение методов комбинаторного анализа, которые позволяют создать с помощью комбинаторных схем более адекватные формальные модели исследуемых процессов и явлений [1, 2].

1. Формулирование проблемы

В настоящее время по-прежнему остается открытым вопрос создания эффективных процедур, решающих задачи комбинаторной оптимизации с требуемым качеством и за приемлемое для пользователя время. Так активно развивающаяся в последние годы логистика (транспортная, торговая, финансовая и т.п.) поставила перед разработчиками программных систем проблему создания эффективного инструментария для решения подобных задач. Специфической особенностью такого рода систем является необходимость интеграции в единой программной среде методологии искусственного интеллекта и исследования операций для решения комбинаторных задач большой размерности [3, 4].

При исследовании технических, организационно-экономических, биологических систем широко применяются графовые модели, а для построения типовых вариантов структур - конструктивное перечисление графовых моделей, т.е. формирование множества графов с заданными характеристиками [5, 6]. При этом в большинстве случаев, используется теория перечисления Пойа, позволяющая получить оценку количества графов заданного вида [7, 8].

Для конструктивного перечисления графовых моделей необходимо иметь точную оценку минимального и максимального числа ребер рассматриваемых графов для заданного множества вершин. Известные способы оценки, являются приблизительными и сильно завышенными, что затрудняет решение данной задачи.

2. Решение проблемы

Целью данной работы является разработка способа оценки числа бихроматических графов, необходимого для их конструктивного перечисления.

Формальное описание может быть представлено в аналитической, табличной, векторной, графической или другой форме и задано в явном или неявном виде. Наиболее распространенной формой представления моделей является табличная форма модели, которая представляет собой прямоугольную таблицу. Правило заполнения табличной модели зависит от вида объекта. Например, при решении задачи о максимальном числе назначений в матрице строки P соответствуют сотрудникам, а столбцы A – участкам работы. При этом Ri,j=1, если i-й сотрудник может выполнять j-ю работу и Ri,j=0, в противном случае.

Данная форма удобна для программирования и достаточно наглядна, однако при решении ряда задач, например, перечисления типовых моделей, возникают определенные проблемы, связанные с комбинаторной природой рассматриваемой задачи. В этом случае целесообразно применять графовые модели, для которых разработаны более эффективные методы преобразований.

Математической моделью при решении многих комбинаторных логистических задач являются бихроматические графы специального вида.

M (V^1,V^2,R) – граф – это бихроматический граф, у которого множество вершин разбито на два подмножества $V^1 = \{v^1_1,\ldots,v^1_n\}$ и $V^2 = \{v^2_1,\ldots,v^2_k\}$ с окрестностями вершин соответственно $O(v^1_1)$, … , $O(v^1_n)$ для подмножества вершин V^1 и $O(v^2_1)$, … ,$O(v^2_k)$ для подмножества вершин V^2, обладающий следующими свойствами:

1. $O(v^1_i) \neq O(v^1_j)$, i,j = 1…n; i≠j.
2. $O(v^2_i) \neq O(v^2_j)$, i,j = 1…k; i≠j.
3. $k > |O(v^1_i)| \geq 1$, i = 1…n.
4. $|O(v^2_j)| \geq 1$, j = 1…k.

Рассматриваемые M(V_1,V_2,R)-графы являются 2-раскрашенными непомеченными графами. Из следствия теоремы Пойа [7], которое интерпретирует ряд Z(A, 1+x), вытекает, что ряд $Z(\Gamma_1(G),1+X)$ перечисляет $\Gamma_1(G)$-эквивалентные классы множеств, состоящих из ребер графа G. Тогда число неподобных остовных подграфов G, содержащих r ребер, равно коэффициенту при x^R в выражении $Z(\Gamma_1(G),1+X)$.

По теореме о перечислении 2-раскрашенных графов [8]

$$b_{n,k}(x) = Z\,(S_n\times S_k,\ 1+x)\ ; \qquad (1)$$

где $S_n\times S_k$ - декартовое произведение групп S_n и S_k,

$$Z(Sn\times Sk)=\frac{1}{n!k!}\cdot\sum_{(a,\beta)}\prod_{r,t=1}^{n,k} S_{[r,t]}^{(r,t)j_r(\alpha)j_t(\beta)}; \qquad (2)$$

[r, t] – наименьшее кратное чисел r и t,

(r, t) – наибольший общий делитель чисел r и t.

Подставляя $1+x^m$ вместо S_m в правую часть выражения, получаем многочлен $b_{n,k}(x)$. При этом сумма коэффициентов при x будет равняться количеству графов с заданными n, k, а коэффициент при x^i указывает сколько существует неподобных графов с количеством ребер i.

Иными словами

$$b_{n,k} = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \qquad (3)$$

где a^i – коэффициент при x^i, равный количеству неподобных графов G, содержащих i ребер.

Нас интересуют графы, содержащие ребра в диапазоне $R_{min}\div R_{max}$, это позволяет выбирать слагаемые при x^R .

Для рассматриваемых графов получены следующие оценки максимального и минимального количества ребер:

$$|R|_{\max} = \sum_{i=0}^{\varphi(n,k)}(n-i)\cdot C_n^{n-i} + (k - \sum_{i=0}^{\varphi(n,k)} C_n^{n-i})\cdot \cdot(n-\varphi(n,k)-1), \qquad (4)$$

$$|R|_{\min} = \max\,(n,\,k). \qquad (5)$$

Пусть $GK_{n,k}$ – количество неподобных 2-раскрашенных графов, содержащих ребра в диапазоне $R_{min}\div R_{max}$, тогда

$$GKn,k = \sum_{i=q_{\min}}^{q_{\max}} a_i x^i \qquad (6)$$

Запишем $GK_{n,k}$ в общем виде.

Пусть φ(Z(G), 1+x) – некоторая функция, равная подстановке $1+x^m$ вместо S_m в Z(G), тогда $b_{n,k}(x)$= $\varphi(Z(S_n\times S_k), 1+x)$,

$$bn,k(x)=\varphi(\frac{1}{n!k!}\cdot\sum_{(a,\beta)}\prod_{r,t=1}^{n,k} S_{[r,t]}^{(r,t)}j_r(\alpha)j_t(\beta),1+x); \qquad (7)$$

Введем в рассмотрение функцию ψ, равную сумме коэффициентов в $b_{n,k}$ при слагаемых x^i, где $i=R_{min}..R_{max}$, тогда

$$GKn,k=\psi_{(q_{\min},q_{\max})}[\varphi(\frac{1}{n!k!}\cdot \cdot\sum_{(a,\beta)}\prod_{r,t=1}^{n,k} S_{[r,t]}^{(r,t)}j_r(\alpha)j_t(\beta),1+x)]; \qquad (8)$$

Пусть

$$\theta(n,k) = \varphi(\frac{1}{n!k!} \cdot \sum_{(a,\beta)} \prod_{r,t=1}^{n,k} S_{[r,t]}^{(r,t)} j_r(\alpha) j_t(\beta), 1+x). \tag{9}$$

Тогда общая формула для вычисления количества $M(V_1,V_2,R)$-графов имеет вид:

$$D_{n,k}^{R} = \begin{cases} \psi_R[\theta(n,k)] - \psi_R[\theta(n-1,k)] - \psi_R[\theta(n,k-1)] - \\ - L_{n,k}^{R}; при \quad n \neq k, \\ \psi_R[\theta(n,k)] - 2\psi_R[\theta(n-1,k)] + \psi_R[\theta(n-1,k-1)] - \\ - L_{n,k}^{R}; при \quad n = k. \end{cases} \tag{10}$$

Заключение

Полученные оценки позволяют определить количество неизоморфных М-графов, которые необходимы при решении второго этапа конструктивного перечисления – генерации неизоморфных М-графов. Предложенный подход эффективен при построении каталогов типовых моделей и типовых проектных решений.

Литература

1. Valkovsky V.B., Gerasimov M.B., Savvin K.O. Phase Transitions in TSP and Matrix Topology / In Proc. of the Joint Workshop on Integration of AI and OR techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems. Universita degli Studi di Ferrara - Facolta di Ingegneria, Italy. - 1999. - P. 5.

2. Левин М. Ш. Комбинаторное проектирование систем / Автоматизация проектирования. - 1997. - № 4. - С. 34-41.

3. CP-AI-OR'99, Workshop on Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems. - Ferrara, Italy, 25 - 26 February, 1999 - 79 p.

4. Fierbinteanu C. The Implementation by Constraint Logic Programming of a Decision Support System Generator for Transportation Planning / Proc. Of the Fourth Int'l Conf. On the Practical Application of Constraint Technology, PAPPACT98. - London. - 1998. - P. 285-294.

5. Muhanna W.A., Pick R.A. Meta-modeling Concepts and Tools for Model Management: A Systems Approach / Management Science. - 1994. - Vol. 40, № 9. - P. 1093-1123.

6. Borie R.B. Generation of Polynomial-Time Algorithms for Some Optimization Problems on Tree-Decomposable Graphs / Algorithmica. - 1995. - Vol. 14, № 2. - P. 123-137.

7. Перечислительные задачи комбинаторного анализа. Сб. переводов. – М.: Мир, 1979. – 363 с.

8. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. – М.: Мир, 1977. – 324 с.

Поступила в редакцию 20.10.03

Рецензент: д-р техн. наук, профессор Краснобаев В.А. Харьковский государственный университет сельского хозяйства, г.Харьков

УДК 621.396

Перерахування біхроматичних графів / І.В. Чумаченко, В.Г. Кучмієв, Н.В. Доценко // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2003. № 00. С. 00-00.

Стаття присвячена перерахуванню біграфов. Отримано оцінки числа ребер. Запропонований підхід ефективний при побудові каталогів типових моделей і типових проектних рішень.

Табл. 0. Іл. 0. Бібліогр.: 8 назв.

УДК 621.396

Bygraph enumeration / I.V. Chumachenko, V.G. Kuchmiev, N.V. Dotzenko // Radioelectronic and computer systes. 2003. № 00. С. 00-00.

The article is devoted to the bygraph enumeration. The estimation of edges number is received. The offered approach is effective at construction of the catalogues of typical models and typical design decisions.

Tabl. 00. Fig. 00. Ref.: 8 items.

Информация об авторах:

Чумаченко Игорь Владимирович д.т.н., профессор, зав. каф. 602 Харьковский национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского –«ХАИ».

Кучмиев Владимир Гавриилович к.т.н., доцент каф. 602 Харьковский национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского –«ХАИ».

Доценко Наталья Владимировна аспирант каф. 602 Харьковский национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского –«ХАИ».