УДК 681.142.36

В.Г. РУБАНОВ, Е.Н. КОРОБКОВА

Белгородский государственный технологический университет, Россия

ТРАНСФОРМАЦИЯ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАВИСИМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЕ К МИНИМИЗАЦИИ ЭТИХ ФУНКЦИЙ

Предложен способ трансформации области определения логических функций с параметрами, зависящими от трёх и более переменных, позволяющий представить параметры функциями от двух переменных. Способ основан на представлении обобщённых логических функций в позиционных картах с последующим их преобразованием. Проведен анализ алгоритма минимизации функций этого класса.

цифровые устройства, логические функции, область определения, минимизация

Постановка проблемы

При разработке нетиповых цифровых устройств автоматики и радиотехники [1] на современной элементной базе программируемых логических интегральных схем (ПЛИС) вновь стали актуальными вопросы разработки способов минимизации логических функций, наиболее полно удовлетворяющих поставленной задаче как на уровне программных, так и ручных способов, которые являются не только отправным моментом для разработки программных средств, но и имеют самостоятельное значение при минимизации логических функций от небольшого числа переменных, характерных для устройств, выполненных на интегральных схемах средней, малой и сверхмалой [2] степени интеграции.

В предстоящие годы, возможно, основным местом, где по-прежнему будут применять интегральные схемы этой степени интеграции, будут нетиповые устройства цифровой автоматики и радиотехники, учебные и исследовательские лаборатории, устройства сопряжения компонентов большой степени интеграции при решении частных задач, при корректировке ошибок в компонентах большой степени интеграции или в их интерфейсах [1, 2].

Решение проблемы выбора рационального метода синтеза вообще и минимизации в частности из множества известных или разработка новых методов, наиболее полно удовлетворяющих требованиям конкретной задачи, имеет важное значение при проектировании цифровых устройств на базе ПЛИС и интегральных схем малого и среднего уровня интеграции, поскольку от него зависит время и корректность решения задачи проектирования.

Анализ исследований и публикаций и выделение нерешённой части проблемы

Анализ исследований и публикаций, посвящённых синтезу цифровых устройств вообще и минимизации в частности, показал, что число работ в этой области так велико, что уже простое перечисление их представляет собой далеко не тривиальную задачу. Однако, несмотря на это, непрерывное совершенствование элементной базы вынуждает также совершенствовать известные способы и развивать новые направления в синтезе цифровых устройств, выполняемых на этой базе [2, 3]. При проектировании цифровых устройств часто имеют место ситуации, когда на некоторых наборах исходных (первичных) переменных функция определяется значениями некоторых функций от других (вторичных) переменных. К этому классу функций, в частности, относятся мультиплексные функции [4]. В общем случае мы имеем класс обобщённых логических функций (ОЛФ) с зависимыми параметрами [5].

Предложенный в [5] алгоритм минимизации функций этого класса в картах Карно эффективен, если число первичных переменных не более шести, а число вторичных переменных k не выше двух–трёх. Более того, уже даже при трёх вторичных переменных предложенный алгоритм вызывает некоторые затруднения [6], обусловленные ростом числа минтермов, образуемых вторичными переменными, а следовательно, и разнообразием функций, определяющих значения обобщённых логических функций в точках её определения. Это в значительной степени затрудняет непосредственное использование алгоритма, поскольку он основан на выборе оптимального варианта покрытия однотипных минтермов или их различных сочетаний, образующих термы меньшего ранга, простыми импликантами с минимально возможным числом первичных переменных. Эта часть проблемы минимизации обобщённых логических функций в работе [5] осталась нерешённой.

Основной материал

Для решения поставленной задачи при числе вторичных переменных k более двух предлагается все вторичные переменные $a_{k-1}...a_1a_0$, определяющие значения заданной функции *F(X)* в точках её исходной области определения, разбить на две группы. В одну группу включаем две вторичные переменные, а во вторую – остальные $k-2$ переменных. Сочетание переменных в каждой из групп, в принципе, не имеет значения. Однако для удобства в первую группу обычно включают переменные с младшими индексами – a_1a_0, рассматривая в дальнейшем эти переменные как вторичные на данном разбиении. Остальные переменные ($a_{k-1}...a_2$) включаем во множество первичных переменных, это новое множество ($x_{n-1}...x_0a_{k-1}...a_2$) рассматриваем как первичные переменные на данном разбиении.

Предложенный подход к новой трактовке при любом числе исходных вторичных переменных позволяет свести минимизацию заданной ОЛФ к рассмотренному в [5] алгоритму минимизации функций, параметры которых зависят от двух вторичных переменных.

Включение $k-2$ вторичных переменных во множество первичных расширяет область определения ОЛФ до 2^{n+k-2} точек. В каждой точке новой области определения может быть любая из функций f_i, определяемая переменными a_1a_0.

Для нахождения этих функций исходную ОЛФ, заданную на каждом из 2^n наборов функциями F_i от исходных вторичных переменных, представляем в области определения в виде карты (таблицы) с позиционным кодированием. В каждом из 2^n элементов карты записываем функции F_i, которые первоначально могут быть представлены в любой форме: аналитически, графически, перечислением единичных или нулевых наборов и т.д. (рис. 1).

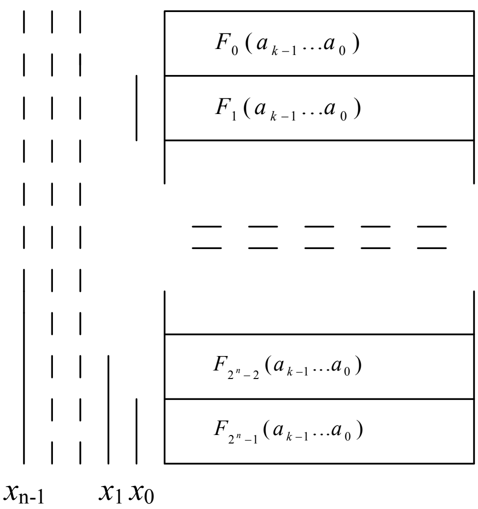

Рис. 1. Первичная форма представления ОЛФ в исходной области определения

Затем каждую функцию F_i представляем её областью определения во множестве исходных вторичных переменных $a_{k-1}...a_1a_0$ также в виде позиционной карты, содержащей 2^k элементов (клеток), записывая в каждый элемент её значение, равное нулю или единице, в соответствии с заданными F_i.

На следующем шаге алгоритма каждую из полученных таким образом карт подставляем в исходную область определения обобщённой логической функции. В результате получаем новую таблицу (карту), содержащую 2^n строк и 2^k столбцов, т.е. 2^{n+k} клеток (элементов), в каждой из которых функция представлена нулём или единицей. По сути, мы получили область определения заданной ОЛФ во множестве всех её переменных.

Для трансформации её в область определения, координаты точек которой определяются переменными $x_{n-1}...x_0 a_{k-1}...a_2$, а значения функции f_i в этих точках определяются минтермами, образуемыми переменными $a_1 a_0$, предлагается рассматривать полученную 2^{n+k}-элементную таблицу как множество, состоящее из 2^{n+k-2} элементов, каждый из которых есть четырёхэлементная карта (таблица истинности), определяемая переменными $a_1 a_0$.

Если теперь каждую четырёхэлементную карту заменить соответствующей ей функцией f_i, представляя её в СДНФ, т.е. в виде логической суммы минтермов, образуемых литералами переменных $a_1 a_0$, то получим представление ОЛФ, параметры которой зависят от двух переменных, в карте с позиционным кодированием.

При числе переменных $n+k-2$ не более шести для минимизации функций более удобна карта Карно, поэтому в этом случае целесообразно перейти от позиционной карты к карте Карно с соседним кодированием по переменным $x_{n-1}...x_0 a_{k-1}...a_2$.

Если число переменных $n+k-2$ больше шести, то минимизация в картах становится малоэффективной. В этом случае можно пойти по пути разработки машинного алгоритма и программы минимизации для данного способа представления функции или заданную ОЛФ рассматривать во множестве всех $n+k$ переменных как обычную классическую функцию, используя любые известные способы минимизации.

В качестве иллюстрации предложенного способа трансформации области определения обобщённых логических функций с зависимыми параметрами и приложения его к минимизации функций этого класса рассмотрим некоторую конкретную функцию от трёх первичных и трёх вторичных переменных, координаты точек области определения которой определяются первичными переменными $x_2 x_1 x_0$, а заданные значения функции F_i в этих точках определяются вторичными переменными $a_2 a_1 a_0$, при этом рассмотрим случай исходного задания функций F_i в минимальной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ).

Заданную ОЛФ представляем в карте с позиционным кодированием по переменным $x_2 x_1 x_0$ (рис. 2).

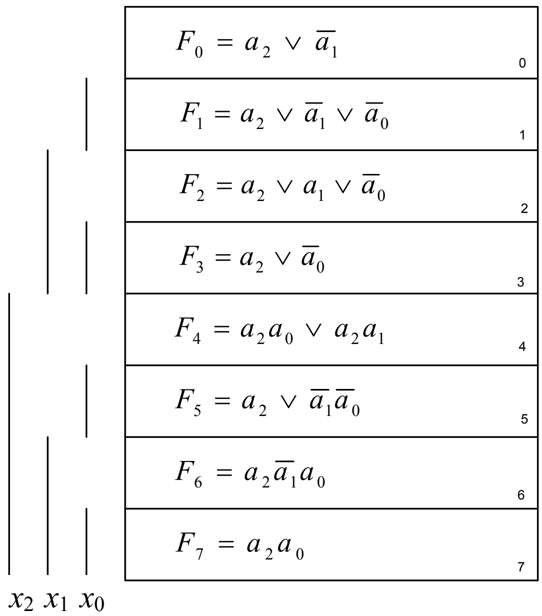

Рис. 2. Исходная область определения функции

Каждую из заданных функций F_i представляем областью определения в виде восьмиэлементной позиционной карты (таблицы истинности), записывая в каждой клетке её значения 0 или 1 в соответствии с заданными выражениями F_i.

Полученные таблицы приведены на рис. 3.

a_2, a_1, a_0

F_0 :	1	1	0	0	1	1	1	1
F_1	1	1	1	0	1	1	1	1
F_2	1	0	1	1	1	1	1	1
F_3	1	0	1	0	1	1	1	1
F_4	0	0	0	0	0	1	1	1
F_5	1	0	0	0	1	1	1	1
F_6	0	0	0	0	0	1	0	0
F_7	0	0	0	0	0	1	0	1

Рис. 3. Таблицы функций заданной ОЛФ

Подставляя каждую восьмиэлементную карту в исходную область определения заданной функции, получаем 64-элементную карту, значения функции в клетках которой равны 0 или 1. По сути, получили область определения ОЛФ, представленную в форме обычной функции от общего числа переменных в карте с позиционным кодированием по множеству всех шести переменных (рис. 4).

a_2, a_1, a_0

1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1

$x_2\, x_1\, x_0$

Рис. 4. Область определения заданной функции во множестве всех её переменных

В соответствии с [8] выполняем операцию сжатия области определения функций по переменным a_1a_0, рассматривая полученную карту как множество, состоящее из 16 элементов (на рис. 4 они обведены контурами), каждый из которых представляет собой четырёхэлементную карту с позиционным кодированием по переменным a_1a_0.

Операция сжатия состоит в замене четырёхэлементных карт, обведенных на рис. 4 контурами, соответствующими им функциями $f_i(a_1a_0)$, представленными в СДНФ в виде логической суммы минтермов, образуемых переменными a_1a_0, соответствующими единичным значениям функций.

В результате такого преобразования получаем представление заданной обобщённой логической функции с зависимыми параметрами в 16-элементной карте с позиционным кодированием по переменным $x_2x_1x_0a_2$ (рис. 5).

a_2

$m_0 \vee m_1$ 0	1 1
$m_0 \vee m_1 \vee m_2$ 2	1 3
$m_0 \vee m_2 \vee m_3$ 4	1 5
$m_0 \vee m_2$ 6	1 7
0 8	$m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 9
m_0 10	1 11
0 12	m_1 13
0 14	$m_1 \vee m_3$ 15

$x_2\, x_1\, x_0$

Рис. 5. Позиционная трансформированная карта

Поскольку процедура минимизации функции от шести переменных более удобна в карте Карно с соседним кодированием, то полученную позиционную карту преобразуем в карту с соседним кодированием, приведенную на рис. 6 (для упрощения визуального анализа знак логической суммы в клетках карты опускаем).

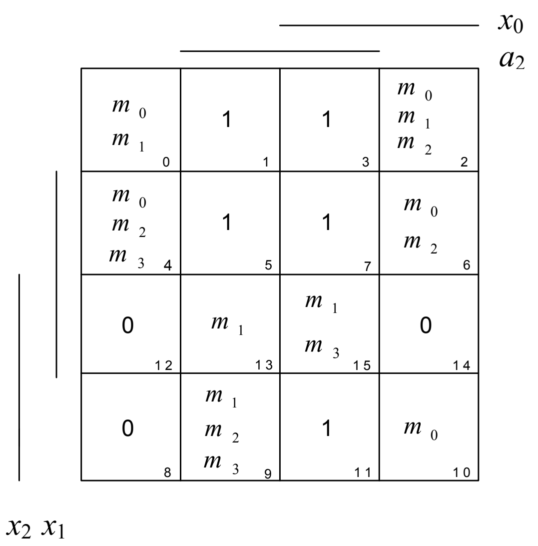

Рис. 6. Трансформированная карта Карно заданной ОЛФ с зависимыми параметрами

В результате проведенных преобразований получили заданную функцию в форме ОЛФ с параметрами, зависящими от двух переменных, представленную в карте с соседним кодированием. Алгоритм минимизации функции этого класса достаточно подробно изложен в работах [5 – 7]. Здесь же мы только отметим, что суть его состоит в покрытии множества минтермов или их различных сочетаний, образующих термы меньшего ранга, минимально возможным числом правильных конфигураций максимально возможной площади, которым соответствуют простые импликанты, образующие минимальную ДНФ.

При выделении правильных конфигураций, образуемых однотипными минтермами, необходимо учитывать, что два минтерма, сумма индексов которых не равна трём, – соседние по одной из переменных, образующих эти минтермы. Такие минтермы склеиваются по одной из переменных, следовательно, логическую сумму их в клетках карты можно покрывать как один символ, представленный соответствующей переменной с отрицанием или без него. В этом не трудно убедиться, выполнив очевидные преобразования:

$$m_0 \vee m_1 = \overline{a}_1\overline{a}_0 \vee \overline{a}_1 a_0 = \overline{a}_1; \quad m_0 \vee m_2 = \overline{a}_1\overline{a}_0 \vee a_1\overline{a}_0 = \overline{a}_0;$$

$$m_1 \vee m_3 = \overline{a}_1 a_0 \vee a_1 a_0 = a_0; \quad m_2 \vee m_3 = a_1\overline{a}_0 \vee a_1 a_0 = a_1.$$

На основании приведенных соотношений сформулируем два правила, которые позволяют автоматически записывать результат логического суммирования двух соседних минтермов (сумма индексов которых не равна трём), не выполняя каждый раз приведенные здесь преобразования.

Правило 1. Логическая сумма двух соседних минтермов, один из которых имеет индекс, равный нулю, при чётной сумме их индексов равна инверсному значению переменной с чётным индексом (ноль – чётное), при нечётной сумме их индексов – инверсному значению переменной с нечётным индексом.

Правило 2. Логическая сумма двух соседних минтермов, один из которых имеет индекс, равный трём, при чётной сумме их индексов равна прямому значению переменной с чётным индексом, при нечётной сумме их индексов – прямому значению переменной с нечётным индексом.

Логические суммы двух не соседних минтермов ($m_0 \vee m_3$, $m_1 \vee m_2$) не склеиваются, поэтому каждый из минтермов, входящих в такие суммы, покрывается отдельно.

В соответствии с методикой, изложенной в работах [5 – 7], находим номера клеток карты, образующих правильные конфигурации максимально возможной площади, и соответствующие им простые импликанты:

<0,1,2,3> - ($m_0 \vee m_1$) $\overline{x}_2\overline{x}_1$; <2,3,6,7> - ($m_0 \vee m_2$) $\overline{x}_2 x_0$;

<4,5,6,7> - ($m_0 \vee m_2$) $\overline{x}_2 x_1$; <4,5> - ($m_2 \vee m_3$) $\overline{x}_2 x_1 \overline{x}_0$;

<9,11,1,3> - ($m_2 \vee m_3$) $\overline{x}_1 a_2$; <10,11,2,3> - $m_0\overline{x}_1 x_0$;

<13,1,3,7,9,11,15>- $m_1 a_2$; <15,3,7,11> -($m_0 \vee m_3$) $x_0 a_2$.

Клетки карты <1,3,5,7,11>, содержащие единицу, исключаются из дальнейшего покрытия, поскольку они вошли в конфигурацию всех четырёх минтермов, следовательно, полностью ими поглощены ($m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 = 1$).

Объединяя полученные простые импликанты знаком логической суммы, записываем минимальную ДНФ заданной функции, выраженную через минтермы, образуемые переменными $a_1 a_0$, и координаты правильных конфигураций, определяемых переменными $x_2 x_1 x_0 a_2$:

$$F = (m_0 \vee m_1)\,\overline{x}_2\overline{x}_1 \vee (m_0 \vee m_2)\,\overline{x}_2 x_0 \vee m_1 a_2 \vee$$
$$\vee (m_2 \vee m_3)\,\overline{x}_2 x_1 \overline{x}_0 \vee (m_2 \vee m_3)\,\overline{x}_1 a_2 \vee m_0 \overline{x}_1 x_0 \vee$$
$$\vee (m_0 \vee m_2)\,\overline{x}_2 x_1 \vee (m_1 \vee m_3)\, x_0 a_2 .$$

Подставляя значения отдельных минтермов и преобразуя логические суммы соседних, в соответствии с правилами 1, 2, записываем окончательный вид минимальной ДНФ заданной ОЛФ с зависимыми параметрами:

$$F = \overline{x}_2\overline{x}_1\overline{a}_1 \vee \overline{x}_2 x_0 \overline{a}_0 \vee a_2 \overline{a}_1 a_0 \vee \overline{x}_2 x_1 \overline{x}_0 a_1 \vee \overline{x}_1 a_2 a_1 \vee$$
$$\vee \overline{x}_1 x_0 \overline{a}_1 \overline{a}_0 \vee x_2 x_1 \overline{a}_0 \vee x_0 a_2 a_0 .$$

Заключение

1. Предложен способ трансформации области определения обобщённых логических функций с зависимыми параметрами.

2. Практическая значимость способа состоит в том, что он позволяет свести задачу минимизации ОЛФ с параметрами от трёх и более переменных к минимизации функций, параметры которых зависят от двух переменных, что упрощает алгоритм минимизации в целом.

3. Способ выгодно отличается от известных, поскольку упрощается процедура выделения простых импликант, соответствующих правильным конфигурациям, образуемым термами вторичных переменных.

4. Одним из направлений дальнейших исследований является разработка машинного алгоритма и программы предложенного способа.

Литература

1. Потёмкин И.С. Функциональные узлы цифровой автоматики. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.

2. Дж. Ф. Уэйкерли. Проектирование цифровых устройств. – М.: Постмаркет, 2002. – Т. 1. – 544 с.; – Т. 2. – 528 с.

3. Соловьёв В.В. Проектирование цифровых систем на основе программируемых логических интегральных схем. – М.: Горячая линия. – 2001. – 636 с.

4. Пухальский Г.И., Новосельцова Т.Я. Цифровые устройства: Учеб. пособие для вузов. – СПб: Политехника, 1996. – 885 с.

5. Коробков Н.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма минимизации обобщённых логических функций с зависимыми параметрами // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2(17). – С. 13–16.

6. Коробкова Е.Н. Графоаналитический метод минимизации полностью определённых логических функций в сжатых картах // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6(22). – С. 288–298.

7. Рубанов В.Г., Коробкова Е.Н. Графоаналитический метод нахождения минимальных дизъюнктивных нормальных форм обобщённых логических функций // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 3(19). – С. 46–53.

8. Рубанов В.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма сжатия области логических функций // Тр. соврем. гуманит. ун-та. Белгород. фил. – Белгород: БФ СГУ. – 2000. – Вып. 18. – С. 105–112.

Поступила в редакцию 07.04.04

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков