

УДК 621.396:537.874.4

А.Д. АБРАМОВ, Р.В. НЕЖАЛЬСКИЙ

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ЧИСЛА ОДНОВРЕМЕННО НАБЛЮДАЕМЫХ КОМПОНЕНТ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Решение задачи определения количественного состава компонент проведено в рамках критерия отношения правдоподобия. Синтезирована вычислительная процедура, которая использует табулированную статистику и позволяет управлять величиной ошибки первого рода.

**компонентный анализ, число компонент, критерий отношения правдоподобия, собственные числа**

### Введение

В комплексе проблем, решение которых определяет рациональное построение и оптимальное функционирование радиосистем пассивного типа, особое место занимают проблемы, которые связаны с синтезом эффективных алгоритмов оценивания количественного состава компонент наблюдаемого процесса как фактора надежного диагностирования обстановки в контролируемой структуре.

### 1. Формулирование проблемы

Известные решения задач указанной проблемы, в частности, принципы решения задач компонентного анализа, базируются на теории точечного оценивания с привлечением методологии максимального правдоподобия [1, 2].

Информационные статистики, полученные на основе точечной методологии, нуждаются в корректировке для обеспечения состоятельности оценок, а косвенная функциональная связь между собственными значениями ковариационной матрицы наблюдений и выбранной моделью требует подтверждения их несмещенности и эффективности. Как следствие: достоверность результатов оценивания по известным алгоритмам не может быть предопределена заранее, а является прерогативой конкретных практических испытаний.

В настоящей работе решение задачи определения количественного состава компонент проведено в рамках критерия отношения правдоподобия (КОП). Синтезирована вычислительная процедура, которая использует табулированную статистику и позволяет управлять величиной ошибки первого рода.

В рамках компонентного анализа задача формулируется так. Пусть существует  $N$  независимых источников сигналов (компонент). В заданные моменты времени  $k$  ( $k = \overline{1, K}$ ) на выходах  $M$  потенциальных сенсоров регистрируется  $M$ -мерный вектор наблюдений  $u(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_M(k)]^T$ , где  $u_m(k)$  – отсчет наблюдения, полученный на выходе  $m$ -го сенсора в  $k$ -й момент времени ( $m = \overline{1, M}$ ),  $T$  – знак транспонирования. Связь между векторами наблюдений и  $N$ -мерными векторами  $s^N(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_N(k)]^T$  сигналов  $s_n(k)$  ( $n = \overline{1, N}$ ) определяется равенством

$$u(k) = A^N s^N(k) + \varepsilon(k), \quad k = \overline{1, K}. \quad (1)$$

Здесь  $A^N = [\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N]$ ,  $\Lambda_n = [\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(M)}]^T$  – “фазовое” распределение потенциала  $n$ -го источника, определяемое как его местоположением  $(x_n, y_n, z_n)$  в пространственной декартовой системе  $(x, y, z)$ , так и координатами  $(x_m, y_m, z_m)$  приемных сенсоров,  $\varphi_n^{(m)} = f(x_n, y_n, z_n, x_m, y_m, z_m)$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,

$m = \overline{1, M}$  – известная функция координат,  $\varepsilon(k) = [\varepsilon_1(k), \varepsilon_2(k), \dots, \varepsilon_M(k)]^T$ ,  $\varepsilon_m(k)$  –  $k$ -й отсчет случайного гауссовского процесса (шум  $m$ -го сенсора). Вектор  $\varepsilon(k)$  имеет характеристики

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(k) \rangle &= 0, \\ \langle \varepsilon(k_1) \varepsilon^T(k_2) \rangle &= \sigma^2 I_M \delta(k_1 - k_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\delta(\cdot)$  – символ Кронекера,  $I_M = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  – единичная матрица размерностью  $M \times M$  из поля  $F$ ,  $I_M \in M_{M, M}(F)$ ,  $\sigma^2$  – мощность помехи.

Сигналы  $s_n(k)$  ( $n = \overline{1, N}$ ) моделируются взаимно независимыми случайными гауссовскими процессами с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_n^2 = \langle s_n^2(k) \rangle$ .

Из приведенных соотношений следует, что  $(M \times M)$ -размерная ковариационная матрица  $R_N$  гауссовского вектора  $u(k)$  связана с распределением потенциалов источников компонент равенством

$$R_N = A^N \Psi_N (A^N)^T + \sigma^2 I_M, \quad (3)$$

где  $\Psi_N = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2)$ ,  $\Psi_N \in M_{N, N}(F)$ .

Требуется разработать процедуру, позволяющую на основании выборки  $u^K = [u(1), u(2), \dots, u(K)]$  определить число  $N$  источников при отсутствии априорных сведений об их местоположении, интенсивности и мощности помех.

## 2. Решение проблемы

Решение задачи проведем по критерию отношения правдоподобия (КОП). Пусть  $H_l$  – гипотеза о наличии в наблюдаемом процессе  $l$  сигналов. Стратегия оптимального по критерию отношения правдоподобия правила принятия решения предписывает формирование процедуры оценивания  $N$ , обеспечивающей минимум критической статистики  $F_l$  [3]:

$$F_l = K [Sp S_M R_l^{-1} - \ln |S_M R_l^{-1}| - M]. \quad (4)$$

В последнем соотношении  $SpT$  и  $|T|$  – след и определитель матрицы  $T$ , а

$$S_M = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K u(k) u^T(k). \quad (5)$$

Матрица  $R_l$  симметричная, поэтому она может быть разложена по собственным значениям  $W_f$  и собственным векторам  $\vartheta_f$  ( $f = \overline{1, M}$ ) так:

$$R_l = \sum_{f=1}^l W_f \vartheta_f \vartheta_f^T + \sum_{f=l+1}^M W_f \vartheta_f \vartheta_f^T. \quad (6)$$

Если гипотеза  $H_l$  справедлива, то  $(M-l)$  собственных значений  $W_f$  ( $f = \overline{l+1, M}$ ) матрицы  $S$  численно близки между собой. При таком подходе статистику (4) можно рассматривать, во-первых, как достаточную для проверки значимости разности между величинами  $(M-l)$  наименьших собственных чисел  $W_f$  выборочной ковариационной матрицы  $S_M$ , во-вторых, определение  $N$  можно свести к сравнению преобразованной  $F_l$

$$F_l = (K-1) \left[ (M-l) \ln \sum_{f=l+1}^M W_f - \sum_{f=l+1}^M \ln W_f - (M-l) \ln(M-l) \right] \quad (7)$$

с порогом  $\chi_{\alpha, t(l, M)}^2$ , который выбран из таблиц  $\chi^2$ -распределения по заданному уровню значимости  $\alpha$  и степеням свободы  $t(l, M)$  [4]:

$$t(l, M) = \frac{(M-l)(M-l+1)}{2} - 1. \quad (8)$$

Используя приведенную методику, можно предложить следующую технологическую процедуру обработки наблюдаемого процесса для определения неизвестного числа компонент от источников с неизвестным местоположением. По полученным на выходах сенсоров в момент времени  $k$  ( $k = \overline{1, K}$ ) сигналам формируют на основании правила (5) ковариационную матрицу  $S_M$ . Затем определяют

собственные значения указанной матрицы и переходят к последовательному анализу гипотез  $H_l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) по проверке значимости разности числовых величин соответствующих собственных значений. Для этого при выбранной  $H_l$  вычисляют критическую статистику (7) и сравнивают ее с порогом  $\chi_{\alpha, l(l, M)}^2$ . При  $F_l > \chi_{\alpha, l(l, M)}^2$  расхождение значимо: гипотеза  $H_l$  отвергается. Далее переходят к проверке следующих гипотез, увеличивая каждый раз  $l$  на единицу. Если на некотором шаге, например  $n$ -м, впервые  $F_l \leq \chi_{\alpha, l(l, M)}^2$ , то выносятся решение: наблюдаемый процесс содержит  $n = N$  компонент. Процедура проверки гипотез на этом прекращается.

Для исследования качественных показателей предложенной технологии и синтезированного теста проведены численные статистические эксперименты. Моделировалась обработка наблюдений, снятых с восьми потенциальных сенсоров, эквидистантно расположенных на окружности заданного радиуса в плоскости  $xOy$ . Наблюдения, полученные с выходов упомянутых датчиков, могут в упрощенном виде характеризовать распределение потенциала на поверхности физического объекта, например скальпа человека, обусловленное очагами электрической активности внутри черепной коробки (диполями). Местоположение диполей в плоскости  $xOy$  связывалось с координатной функцией  $\phi_n^m$  соотношением [5]

$$\phi_n^m = \frac{a_x(x_m - x_n) + a_y(y_m - y_n)}{\left[ (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{3/2}}, \quad (9)$$

где  $\{x_m, y_m\}$  и  $\{x_n, y_n\}$  – соответственно координаты  $m$ -го сенсора и  $n$ -го источника, а  $a_x$  и  $a_y$  – проекции радиуса-вектора точки  $O_n(x_n, y_n)$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ . Случайные во времени “мгновенные” амплитуды  $s_n(k)$  компонент генерировались гауссовски-

ми процессами и задавались некоррелированными между собой. Моделировались три “сигнальные” ситуации, отличающиеся друг от друга числом диполей, их местоположением и направлением (направляющими косинусами): 1)  $N = 1$ ; 2)  $N = 2$ ; 3)  $N = 3$ . В каждой “сигнальной” ситуации для конкретного значения отношения сигнал/шум  $\mu$  проводилось 100 независимых испытаний, а выборочная ковариационная матрица оценивалась по 100 временным выборкам “входного” процесса. Под отношением сигнал/шум понималась величина

$$\mu = \frac{1}{M \cdot N} \frac{\sum_{m=1}^M \sigma_m^2}{\sigma_0^2}, \quad (10)$$

где  $\sigma_m^2$  – мощность сигнальной (полезной) составляющей наблюдений на выходе  $m$ -го потенциально-го сенсора. Результаты моделирования приведены в табл. 1 – 4, а соответствующий каждой из них по номеру рисунок иллюстрирует местоположение и “направленность” (линия показывает ориентацию) диполей, а также расположение сенсоров (рис. 1 – 4). Оценка числа проводилась для уровня значимости  $\alpha = 1\%$ . Таблицы представляют информацию о качестве обнаружения диполей. В первой колонке таблиц указано отношение сигнал/шум  $\mu$ , при котором проводились эксперименты, в последующих – принятые решения.

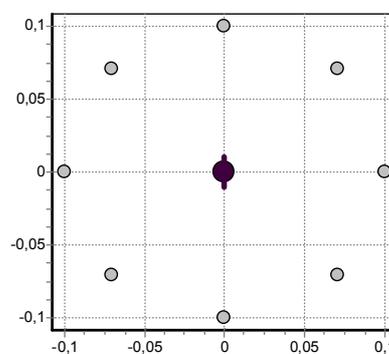


Рис. 1. Расположение источников

Таблиця 1

Робочі характеристики при  $N = 1$ 

$\mu$	$\hat{N}$				
	0	1	2	3	>3
0,05	98	2	0	0	0
0,10	71	29	0	0	0
0,15	31	69	0	0	0
0,20	4	95	1	0	0
0,25	1	98	1	0	0
0,30	0	100	0	0	0

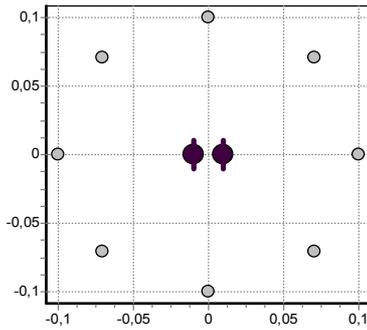


Рис. 2. Расположение источников

Таблиця 2

Робочі характеристики при  $N = 2$ 

$\mu$	$\hat{N}$				
	0	1	2	3	>3
1,00	0	97	3	0	0
2,00	0	75	25	0	0
3,00	0	35	64	1	0
4,00	0	20	80	0	0
5,00	0	5	93	2	0
6,00	0	0	99	1	0

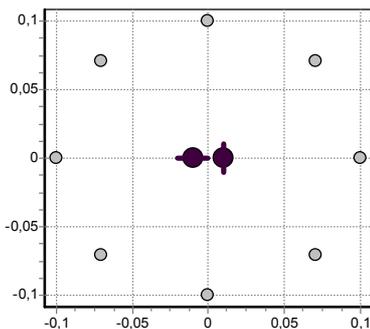


Рис. 3. Расположение источников

Таблиця 3

Робочі характеристики при  $N = 2$ 

$\mu$	$\hat{N}$				
	0	1	2	3	>3
0,10	43	44	13	0	0
0,15	6	46	48	0	0
0,20	0	26	74	0	0
0,25	0	2	96	2	0
0,30	0	0	98	2	0
0,35	0	0	100	0	0

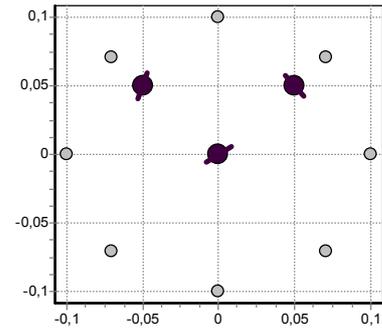


Рис. 4. Расположение источников

Таблиця 4

Робочі характеристики при  $N = 2$ 

$\mu$	$\hat{N}$				
	0	1	2	3	>3
0,30	0	56	41	3	0
0,50	0	6	79	13	2
0,70	0	0	54	46	0
0,90	0	0	35	64	1
1,10	0	0	15	84	1
1,30	0	0	4	95	1
1,40	0	0	3	96	1
1,50	0	0	0	100	0

Для сравнения работы синтезированного алгоритма был проведен анализ двух известных зарубежных алгоритмов AIC и MDL [1, 2]. Основным недостатком этих алгоритмов является невозможность задания какого-либо качественного параметра их функционирования. На рис. 6 и 8 представлены графики зависимости вероятности правильного оценивания числа сигналов от соотношения сигнал/шум, соответствующие сигнальным ситуациям, показанным на рис. 5 и 7, приведено сопоставление качества функционирования синтезированного теста и алгоритмов AIC и MDL.

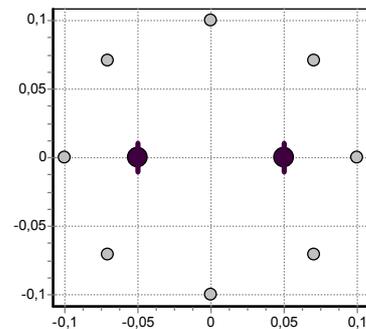


Рис. 5. Расположение источников

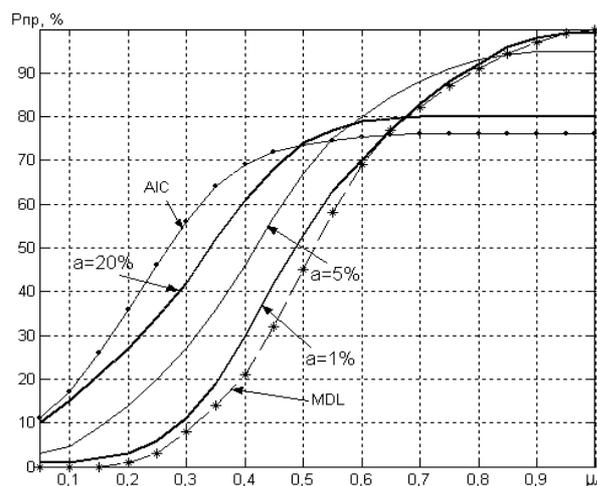


Рис. 6. Зависимость вероятности правильного оценивания числа сигналов для синтезированного теста при разных уровнях значимости  $\alpha$ , а также для алгоритмов AIC и MDL при наличии двух источников (расположение приведено на рис. 5)

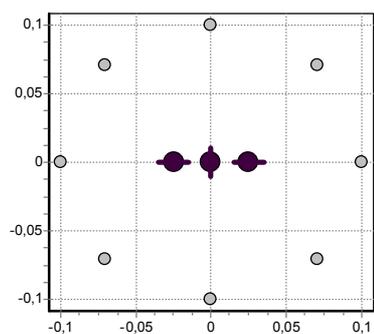


Рис. 7. Расположение источников

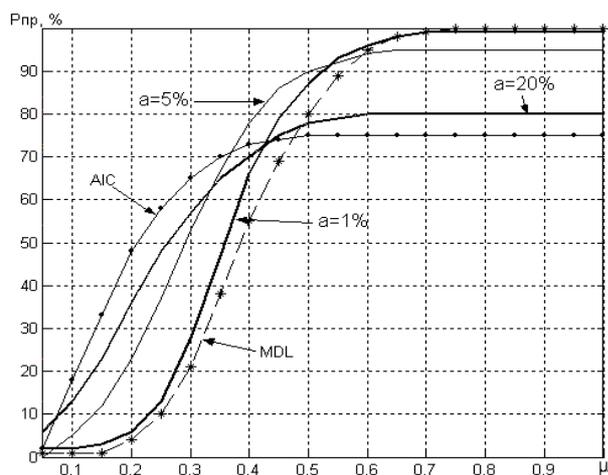


Рис. 8. Зависимость вероятности правильного оценивания числа сигналов для синтезированного теста при разных уровнях значимости  $\alpha$ , а также для алгоритмов AIC и MDL при наличии трех источников (расположение приведено на рис. 7)

## Заключение

Анализ приведенных результатов показывает, что технология принятия решений о количественном составе источников излучения, синтезированная на основе использования критерия отношения правдоподобия, во-первых, эффективна при достаточных соотношениях сигнал/шум, во-вторых, проста в вычислительной реализации, в-третьих, использует табулированную статистику и позволяет управлять величиной ошибки первого рода. По своим качественным показателям синтезированный тест превосходит известные алгоритмы AIC и MDL.

## Литература

1. Wax M. and Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. – 1985. – Vol. 33, № 2. – P. 387 – 392.
2. Zhao L., Krishnaiah P.P. and Bai Z. On some nonparametric methods for detection of the number of signals // IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing. – 1987. – Vol. 35, № 11. – P. 1533 – 1538.
3. Абрамов А.Д. Определение числа шумовых пространственно-временных сигналов методом проверки сложных гипотез по критерию отношения правдоподобия // Авиационно-космическая техника и технология. – Х.: ХАИ. – 1995. – С. 407 – 411.
4. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: Справочное издание / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин; Под ред. С.А. Айвазян. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
5. Гнездинский В.В. Обратная задача ЭЭТ и клиническая электроэнцефалография. – М.: Наука, 2000.

Поступила в редакцию 04.05.04

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Г.Я. Красовский, Северо-восточный филиал НПО "Природа", г. Харьков