УДК 621.396

А.А. КУЗНЕЦОВ[1], А.Н. КОВАЛЕНКО[1], А.М. НОСИК[2]

[1] *Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Украина*
[2] *Научный метрологический центр (военных эталонов), Украина*

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ, ФОРМИРУЕМЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОДОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассматриваются методы формирования больших ансамблей дискретных сигналов. Исследуются корреляционные свойства сигналов, формируемых с использованием кодовых последовательностей циклических кодов.

ансамбль дискретных сигналов, кодовая последовательность, функция корреляции

Введение

Как в коммерческих, так и в военных радиосетях все большее внимание в последнее время уделяется разработке и исследованию процедур кодового разделения каналов (Code Division Multiple Access – CDMA) как наиболее перспективному по многим характеристикам [1]:

– высокая помехозащищенность канала связи и высокая конфиденциальность передаваемых сообщений (более сложный цифровой радиоинтерфейс);

– высокое качество в разговорном тракте – отсутствие некомфортных шумов и выпадений полезного сигнала;

– высокая скорость передачи данных и высокая эффективность использования спектра частот – отсутствие частотного планирования и повторное использование одних и тех же полос частот на одной территории;

– высокая энергетическая экономичность и экологичность терминального оборудования (сотовых телефонов) – их мощность передачи в несколько раз меньше мощности телефонов такого же класса других стандартов;

– высокая пропускная способность CDMA-сети.

В системах радиодоступа с кодовым разделением каналов дискретные сигналы, поступающие на вход приемника, всегда обрабатываются с помощью корреляционных методов [2]. В этой связи, разработка методов формирования больших ансамблей дискретных сигналов, исследование их корреляционных свойств является актуальной научной проблемой, имеющей важное научно-теоретическое значение, как для развития теории дискретных сигналов, так и для исследования прикладных вопросов построения цифровых систем связи.

Проведенные исследования показывают, что вопросу синтеза сложных сигналов, обладающих требуемыми корреляционными свойствами, посвящен ряд работ [3 – 10], в которых сформулирована задача синтеза сигналов в общем виде и рассмотрены характерные особенности синтеза. В то же время, большинство известных методов обладает рядом конструктивных недостатков, кроме того, не разработаны методы синтеза больших ансамблей слабо коррелированных между собой дискретных сигналов. Перспективным направлением в этом смысле являются методы, основанные на формировании дискретных сигналов с использованием кодовых последовательностей избыточных кодов [11]. Этот подход позволяет, используя развитый математический аппарат алгебраической теории блоковых кодов, строить быстрые алгоритмы формирования псевдослучайных последовательностей. Кроме того, применение некоторых классов блоковых кодов позволяет получить улучшенные авто- и взаимно- корреляционные характеристики, аналитически связанные с конструктивными параметрами используемых кодов.

Целью данной работы является исследование корреляционных свойств дискретных сигналов, формируемых с использованием кодовых последовательностей.

1. Общая постановка задачи синтеза ансамблей дискретных сигналов

Общая постановка задачи синтеза ансамблей дискретных сигналов с требуемыми характеристиками задается системами ограничений (1) и (2):

$$\begin{cases} R_0^{ii} = S_1^i S_1^{i*} + \cdots + S_n^i S_n^{i*} = N; \\ R_{1\min}^{ii} \le S_1^i S_2^{i*} + \cdots + S_n^i S_1^{i*} \le R_{1\max}^{ii}; \\ \cdots \\ R_{(n-1)\min}^{ii} \le S_1^i S_n^{i*} + \cdots + S_n^i S_{n-1}^{i*} \le R_{(n-1)\max}^{ii}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} R_0^{ij} = S_1^i S_1^{j*} + \cdots + S_n^i S_n^{j*} = R_{0\max}^{ij}; \\ R_{1\min}^{ij} \le S_1^i S_2^{j*} + \cdots + S_n^i S_1^{j*} \le R_{1\max}^{ij}; \\ \cdots \\ R_{(n-1)\min}^{ij} \le S_1^i S_n^{j*} + \cdots + S_n^i S_{n-1}^{j*} \le R_{(n-1)\max}^{ij}, \end{cases} \quad (2)$$

где системы нелинейных неравенств определяют компоненты функций авто- и взаимокорреляции дискретных сигналов $S^i\left\{S_1^i, S_2^i, \cdots, S_n^i\right\}$ и $S^j\left\{S_1^j, S_2^j, \cdots, S_n^j\right\}$; $R_{k\min}^{ii}$ и $R_{k\max}^{ii}$ – минимально и максимально допустимый уровень боковых лепестков функции автокорреляции i-го сигнала при сдвижке на k элементов; $R_{k\min}^{ij}$ и $R_{k\max}^{ij}$ – минимально и максимально допустимый уровень боковых лепестков функции взаимной корреляции i-го и j-го сигналов, при сдвижке j-го сигнала относительно i-го на k элементов, полученных в результате решения системы неравенств (1).

При этом *нормированная функция корреляции* для двоичных дискретных последовательностей описывается выражением:

$$R_l^{ij}(\tau = lT_e) = \frac{1}{n}\sum_{\xi=0}^{n-1} S_\xi^i S_{l+\xi}^j ,$$

где T_e – длительность элемента последовательности; l – число тактов, на которые две последовательности сдвинуты одна относительно другой; τ – временной сдвиг между двумя последовательностями; n – число элементов в последовательности; S_ξ^i – ξ-й элемент i-й последовательности; $S_{l+\xi}^j$ – ξ-й элемент j-й последовательности, сдвинутой на l тактов.

Предложенные в [8, 10] процедуры синтеза дискретных сигналов позволяют в отличие от других методов синтеза дискретных сигналов синтезировать не отдельные сигналы, а ансамбли сигналов, обладающие требуемыми авто- и взаимокорреляционными свойствами. Однако предложенные в этих работах методы синтеза фазоманипулированных сигналов обладают рядом недостатков:

– не все сигналы, синтезированные в результате решения системы неравенств (1), удовлетворяют решению системы (2), что приводит к большим временным затратам синтеза ансамбля сигналов;

– решение системы неравенств (1) и (2) получено лишь для двоичных последовательностей;

– нельзя заранее (до окончания решения задачи синтеза сигналов) определить объем ансамбля сигналов.

В работе [11] предложено решение поставленной задачи на основе использования кодовых последовательностей циклических кодов. Основные результаты представим в виде следующей теоремы.

Теорема 1 [11]. Пусть задан ансамбль дискретных сигналов S, каждая последовательность которого образована кодовыми словами C^i циклического (n, k, d) кода. Тогда периодические авто- и взаимокорреляционные свойства удовлетворяют следующим выражениям

$$\begin{cases} R_l^{ii}(\tau) = 1, \text{если } \tau = 0 \bmod(n); \\ R_l^{ii}(\tau) \le \dfrac{n - 2 \cdot d}{n}, \text{если } \tau \ne 0 \bmod(n), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} R_l^{ij}(\tau) = 1, \text{если } C^i = C^j_{\to\tau}; \\ R_l^{ij}(\tau) \le \dfrac{n - 2 \cdot d}{n}, \text{если } C^i \ne C^j_{\to\tau}, \end{cases} \quad (4)$$

где $C^j_{\to\tau}$ – кодовое слово C^j, циклически сдвинутое на τ символов.

В соответствии с общей постановкой задачи синтеза ансамбля дискретных сигналов с требуемыми авто- и взаимокорреляционными свойствами необходимо сформировать множество псевдослучайных последовательностей, функции корреляции которых удовлетворяют выражениям (1) и (2). Предлагаемый подход к построению псевдослучайных последовательностей с улучшенными авто- и взаимокорреляционными свойствами на основе методов кодирования позволяет математически обобщить решение задачи синтеза и в общей постановке решить системы (1) и (2).

Действительно, если весовой спектр кода ограничен сверху некоторым значением d^*, т.е. для всех $w(C^i) > d^*$ весовой спектр равен нулю (табл. 1), тогда периодические авто- и взаимокорреляционные свойства синтезируемых последовательностей удовлетворяют системам ограничений (1) и (2), а минимально и максимально допустимые уровни боковых лепестков функции автокорреляции задаются теоремой 2.

Таблица 1

Весовой спектр несовершенного кода

$w(C^i)$	0	1	…	$d-1$	d	$d+1$	...	d^*	d^*+1	...	n
Число кодовых слов	1	0	…	0	$\#d$	$\#d+1$	...	$\#d^*$	0	…	0

Теорема 2 [11]. Пусть задан ансамбль дискретных сигналов *S*, каждая последовательность которого образована кодовыми словами циклического (n, k, d) кода с весовым спектром кода, как в табл. 1. Тогда периодические авто- и взаимокорреляционные свойства удовлетворяют системам (1) и (2), причем:

$$R^{ii}_{k\,\min} \ge \frac{n - 2 \cdot d^*}{n};\ R^{ij}_{k\,\min} \ge \frac{n - 2 \cdot d^*}{n};$$

$$\begin{cases} R^{ii}_{k\,\max} = 1, \text{если } \tau = 0 \bmod(n); \\ R^{ii}_{k\,\max} \le \dfrac{n - 2 \cdot d}{n}, \text{если } \tau \ne 0 \bmod(n), \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^{ij}_{k\,\max} = 1, \text{если } C^i = C^j_{\to\tau}; \\ R^{ij}_{k\,\max} \le \dfrac{n - 2 \cdot d}{n}, \text{если } C^i \ne C^j_{\to\tau}. \end{cases}.$$

Анализируя табл. 3, отметим, в частности, что для некоторых кодов справедливо равенство $\#d^* = \#d$ (эквидистантные коды). Также не исключено выполнения равенства $\#d^* = \#n$ для некоторых других кодов. Строго говоря, авто- и взаимокорреляционные свойства синтезируемых систем сигналов будут определяться весовыми свойствами выбранного кода [11].

2. Исследование автокорреляционных и взаимокорреляционных свойств дискретных сигналов, формируемых с использованием кодовых последовательностей

Зафиксируем двоичный циклический линейный блочный (n, k, d) код как в теореме 2.

Проведем исследования авто- и взаимокорреляционных свойств дискретных сигналов, формируемых с использованием кодовых последовательностей этого кода.

В соответствии с общими положениями теории помехоустойчивого кодирования двоичный линейный (n, k, d) код C есть подпространство в $GF^n(2)$, т.е. непустое множество n-последовательностей (кодовых слов) над $GF(2)$, k – размерность линейного подпространства, d –минимальное кодовое расстояние (минимальный вес ненулевого кодового слова).

Циклический код является частным случаем подпространства, так как обладает дополнительным свойством цикличности.

Каждый вектор из $GF^n(q)$ можно представить многочленом от формальной переменной x степени не выше $n - 1$. Компоненты вектора отождествляются с коэффициентами многочлена.

Множество многочленов обладает структурой векторного пространства, идентичной структуре пространства $GF^n(q)$, а также структурой кольца многочленов $GF(q)[x]/(x^n - 1)$. Код является циклическим, если вместе с кодовым словом $c(x)$ он содержит также многочлен $x \cdot c(x)$. Справедлива следующая теорема, дающая конструктивный механизм построения циклических кодов.

Теорема 3 [12]. Единственный приведенный ненулевой многочлен $g(x)$ наименьшей степени $r = n - k$ однозначно задает (n, k, d) циклический код над $GF(2)$ и обозначается порождающим многочленом, причем

$$g(x) = \prod_i (x - \beta^i), \text{ где } \beta^i \in GF(2^m).$$

В табл. 2 приведены конструктивные характеристики двоичных циклических кодов, и соответствующие корни β^i порождающего многочлена $g(x)$ для длины кода $n = 127$. Корни $\beta^i \in GF(2^m)$ представлены в виде степеней примитивного элемента α поля $GF(2^7)$. Для экономии в каждой следующей строке таблицы приводятся только те корни $g(x)$, которые отсутствуют в предыдущей строке.

Таблица 2

Конструктивные характеристики двоичных циклических кодов $n = 127$

Корни $g(x)$ в виде степеней примитивного элемента $GF(2^7)$	(n, k, d)
α^0 α^1 α^2 α^4 α^8 α^{16} α^{32} α^{64}	127, 119, 4
α^3 α^6 α^{12} α^{24} α^{48} α^{96} α^{65}	127, 112, 6
α^5 α^{10} α^{20} α^{40} α^{80} α^{33} α^{66}	127, 105, 8
α^7 α^{14} α^{28} α^{56} α^{112} α^{97} α^{67}	127, 98, 10
α^9 α^{18} α^{36} α^{72} α^{17} α^{34} α^{68}	127, 91, 12
α^{11} α^{22} α^{44} α^{88} α^{49} α^{98} α^{69}	127, 84, 14
α^{13} α^{26} α^{52} α^{104} α^{81} α^{35} α^{70}	127, 77, 16
α^{15} α^{30} α^{60} α^{120} α^{113} α^{99} α^{71}	127, 70, 20
α^{19} α^{38} α^{76} α^{25} α^{50} α^{100} α^{73}	127, 63, 22
α^{21} α^{42} α^{84} α^{41} α^{82} α^{37} α^{74}	127, 56, 23
α^{23} α^{46} α^{92} α^{57} α^{114} α^{101} α^{75}	127, 49, 28
α^{27} α^{54} α^{108} α^{89} α^{51} α^{102} α^{77}	127, 42, 30
α^{29} α^{58} α^{116} α^{105} α^{83} α^{39} α^{78}	127, 35, 32
α^{31} α^{62} α^{124} α^{121} α^{115} α^{103} α^{79}	127, 28, 44
α^{43} α^{86} α^{45} α^{90} α^{53} α^{106} α^{85}	127, 21, 48
α^{47} α^{94} α^{61} α^{122} α^{117} α^{107} α^{87}	127, 14, 56
α^{55} α^{110} α^{93} α^{59} α^{118} α^{109} α^{91}	127, 7, 64

Рассмотрим (127, 7, 64) код. По определению [12], этот циклический код (регистровый код максимальной длины) является эквидистантным кодом, т.е. расстояние между любыми двумя его различными кодовыми словами равно 64. Весовой спектр такого кода можно представить в виде табл. 3.

Таблица 3

Весовой спектр эквидистантного (127, 7, 64) кода

$w(C^i)$	0	1	…	63	64	65	…	127
Число кодовых слов	1	0	…	0	127	0	…	0

На рис. 1 представлены функции корреляции дискретных сигналов, образованных кодовыми словами эквидистантного (127, 7, 64) кода: АФАК – апериодическая функция автокорреляции; ПФАК – периодическая функция автокорреляции; АФВК – апериодическая функция взаимной корреляции; ПФВК – периодическая функция взаимной корреляции.

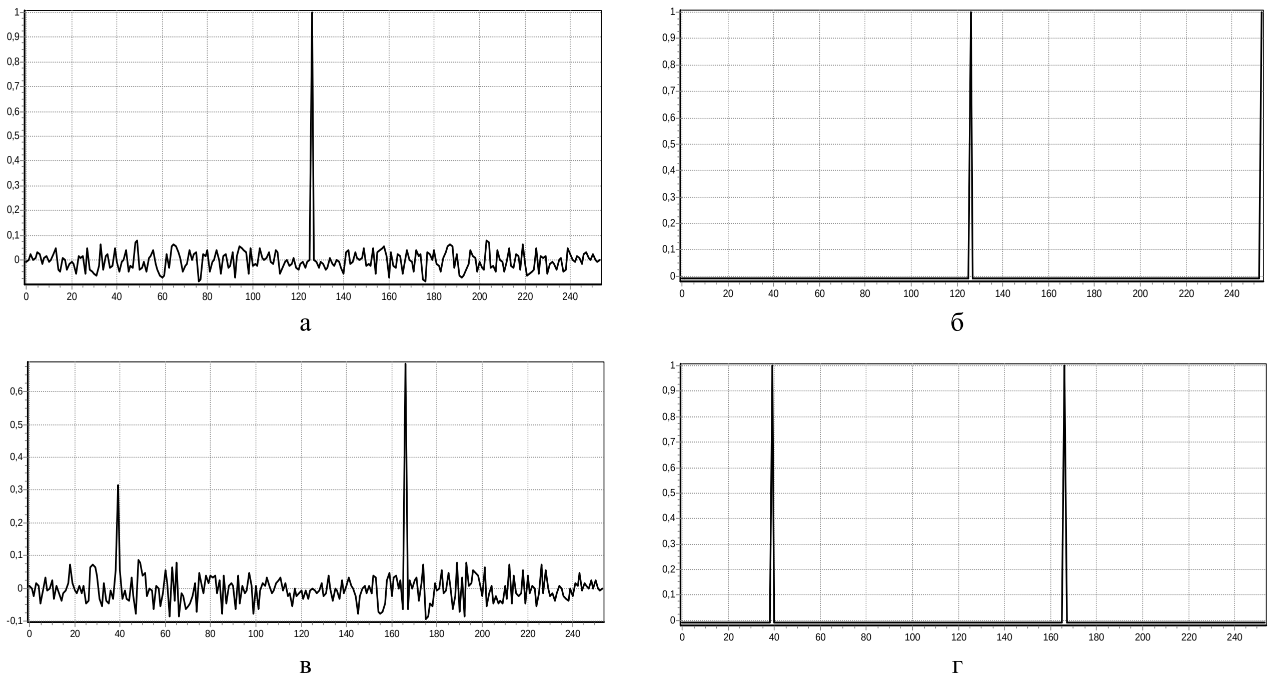

Рис. 1. Функции корреляции дискретных сигналов, образованных кодовыми словами эквидистантного (127, 7, 64) кода: а – АФАК; б – ПФАК; в – АФВК; г – ПФВК

Как следует из зависимостей, представленных на рис. 1, ансамбль сформированных таким образом сигналов содержит слабо коррелированные дискретные последовательности. Периодические функции авто- и взаимной корреляции имеют двух уровневую структуру, что согласуется с теоремами 1, 2. Функция взаимной корреляции имеет один теоретически обоснованный выброс (случай, соответствующий $C^i = C^j_{\to\tau}$ в теоремах 1, 2).

Рассмотрим (127, 14, 56) код. Весовой спектр такого кода представлен в табл. 4.

Таблица 4

Весовой спектр линейного (127, 14, 56) кода

$w(C^i)$	0	1	…	55	56	57	…	63	64	65	…	71	72	73	…	n
Число кодовых слов	1	0	…	0	4572	0	…	0	8255	0	…	0	3556	0	…	0

Корреляционные свойства сигналов, образованных кодовыми словами веса $w(C^i) = 64$, будут соответствовать случаю, рассмотренному на рис. 1. На рис. 2 представлены корреляционные свойства сигналов, образованных кодовыми словами веса $w(C^i) = 56$.

Как следует из зависимостей, представленных на рис. 2, ансамбль сформированных сигналов также содержит слабо коррелированные дискретные последовательности. Боковые выбросы периодических функций авто- и взаимной корреляции ограничены сверху значением

$$\frac{n - 2 \cdot d}{n} = \frac{127 - 2 \cdot 56}{127} \approx 0{,}118 ,$$

что согласуется с теоремами 1, 2. Функция взаимной корреляции также имеет один теоретически обоснованный выброс (случай, соответствующий $C^i = C^j_{\to\tau}$).

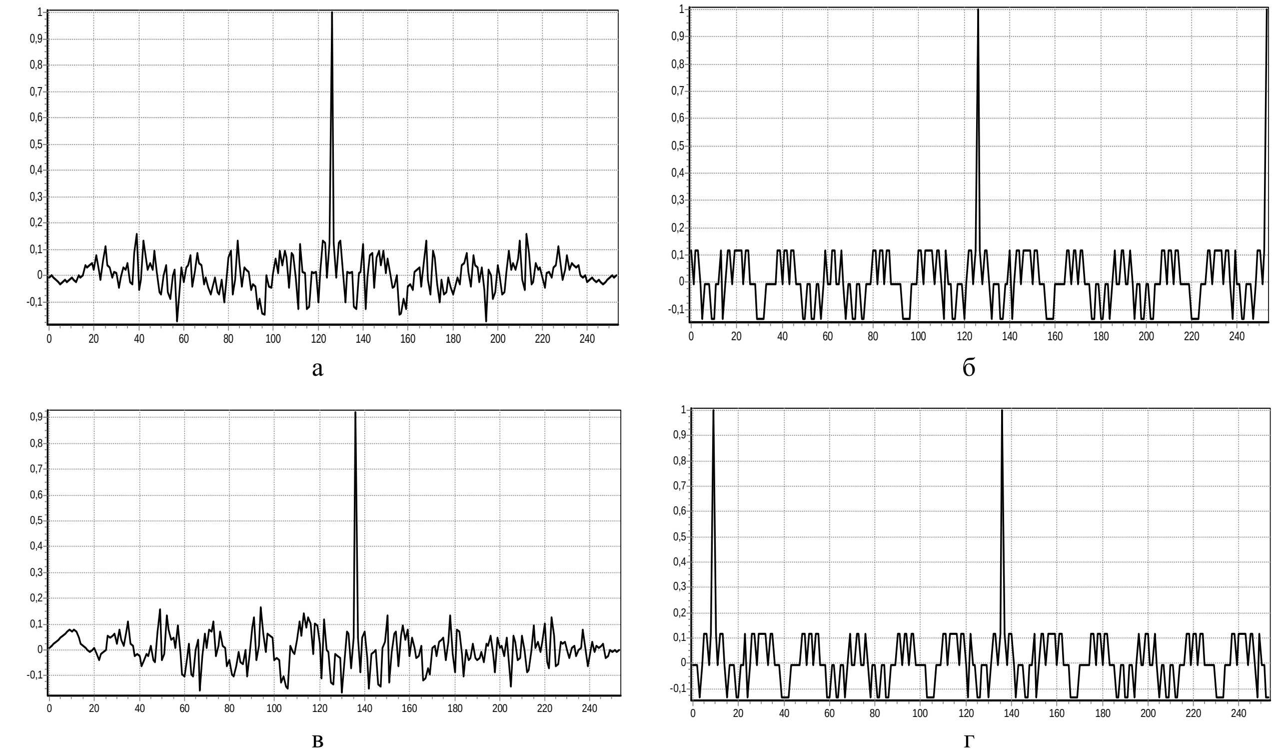

Рис. 2. Функции корреляции дискретных сигналов, образованных кодовыми словами линейного (127, 14, 56) кода: а – АФАК; б – ПФАК; в – АФВК; г – ПФВК

Рассмотрим еще один линейный (127, 28, 44) код. Корреляционные свойства дискретных сигналов, образованных кодовыми словами веса $w(C^i) = 44$, представлены на рис. 3.

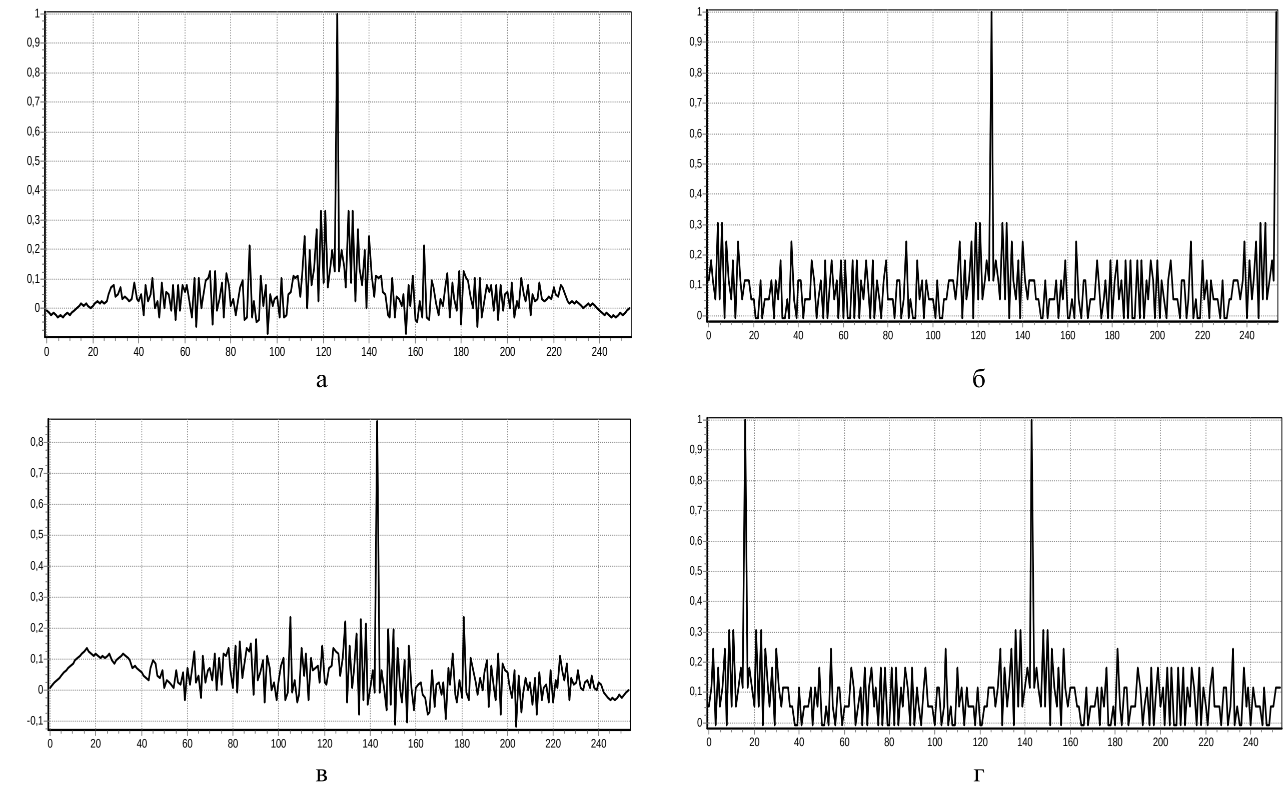

Рис. 3. Функции корреляции дискретных сигналов, образованных кодовыми словами линейного (127, 28, 44) кода: а – АФАК; б – ПФАК; в – АФВК; г – ПФВК

Как следует из зависимостей, представленных на рис. 3, корреляция сформированных сигналов повышается с ростом мощности ансамбля. Это объясняется снижением минимального кодового расстояния соответствующих блоковых кодов, что согласуется с теоремами 1, 2. Боковые выбросы периодических функций авто- и взаимной корреляции ограничены сверху значением

$$\frac{n-2\cdot d}{n}=\frac{127-2\cdot 44}{127}\approx 0{,}307\ .$$

Выводы

Таким образом, в результате проведенных исследований корреляционных свойств дискретных сигналов, формируемых с использованием кодовых последовательностей циклических кодов, установлено, что повышение мощности ансамбля сигналов сопряжено со снижением дистанционных свойств сигналов, что, в конечном счете, приводит к увеличению уровней выбросов боковых лепестков функций корреляции синтезируемых сигналов. Полученные результаты совпадают с теоретическими положениями (теоремы 1, 2) и подтверждают таким образом достоверность полученных результатов.

Перспективным направлением дальнейших исследований является улучшение периодической и апериодической функций взаимной корреляции за счет сглаживания теоретически обоснованного выброса (случай $C^i = C^j_{\to\tau}$), исследование стыковой функции корреляции формируемых сигналов.

Литература

1. Гряник М.В., Фролов В.И. Технология CDMA – будущее сотовых систем в Украине // Мир связи. – 1998. – № 3. – С. 40-43.

2. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Сов. радио, 1985. – 384 с.

3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: Вильямс, 2003. – 1104 с.

4. Стасев Ю.В., Горбенко И.Д., Макаренко Б.И., Ивашкин А.В., Воронов Д.Н. Применение сложных сигналов в командно-телеметрических радиолиниях // Космічна наука і технологія. – 1997. – Т. 3, № 5/6. – С. 104-108.

5. Свердлик М.Б. Оптимальные дискретные сигналы. – М.: Сов. радио, 1975. – 200 с.

6. Дядюнов Н.Г., Сенин А.И. Ортогональные и квазиортогогальные сигналы. – М.: Связь, 1977. – 244 с.

7. Вакмай Д.Е., Седлецкий Р.М. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. – М.: Сов. радио, 1973. – 312 с.

8. Горбенко И.Д., Стасев Ю.В., Замула А.А. Теория дискретных сигналов. Ортогональные сигналы. – М.: МО СССР, 1988. – 119 с.

9. Стасев Ю.В., Брыдня Е.А. Производные ортогональные системы сигналов // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова. – К.: ІПМЕ, 2004. – Вип. 25. – С. 230-237.

10. Стасев Ю.В. Метод обробки сигналів з мінімальним зсувом фази // Системи озброєння і військова техніка. – 2005. – Вип. 1 (1). – С.79-85.

11. Стасев Ю.В., Кузнецов А.А., Носик А.М. Синтез ансамблей дискретных сигналов с использованием алгебраических методов помехоустойчивого кодирования // Збірник наукових праць ХУ ПС. – Х.: ХУПС, 2006.– Вип.6 (12).– С. 40-42.

12. Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А. Теория кодов, исправляющих ошибки. – М.: Связь, 1979. – 744 с.

Поступила в редакцію 25.08.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.В. Стасев, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.