

УДК 512.152

В.А. ПОПОВ, Н.В. ЕРЕМЕНКО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***МОДЕЛЬ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ
ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ПОТОКОВ**

Исследуется одноканальная система с ожиданием, в которой в момент $t=0$ находится начальное число требований i и параметры которой зависят от времени τ . Проводится анализ аналитических выражений $P_{in}(\tau)$ при определенных постоянных значениях загрузки и переменных интенсивностях входящего потока $\lambda(t)$ и потока обслуживания $\mu(t)$ как периодических функций, разработаны алгоритм для вычисления $P_{in}(\tau)$ и программа в среде программирования Delphi, получены расчетные результаты в виде табличных значений и графиков.

система массового обслуживания, модифицированные функции Бесселя, вероятности состояний, загрузка системы

Введение

Новые принципы организации и управления, основанные на концептуальных подходах и анализе существующих систем массового обслуживания (СМО), во все большей степени и с успехом применяются в практике наиболее эффективно функционирующих предприятий, фирм и объединений. Управление различного рода потоками (заготовок, полуфабрикатов, изделий, финансов, информации), а также направлением трудовых ресурсов, производственных мощностей дает возможность из нескольких возможных управленческих решений выбрать то, которое обеспечивает относительно наибольшую эффективность осуществляемой экономической деятельности. В связи с этим все большую актуальность приобретают задачи синтеза (оптимизации), направленные на поиск оптимальных параметров СМО. Поэтому **целью данной работы** является изучение и анализ модели обслуживания с переменными интенсивностями потоков, которые более адекватно отражают реальные процессы [1 – 5].

**Выделение нерешенных вопросов
общей проблемы**

Системы $M|M|1|\infty|Fifo$ в переходном режиме изучались в работах [1, 2].

Но наибольший интерес представляют данные системы при переменных параметрах от времени $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, при которых в [1] получены выражения для вычисления $P_{in}(\tau)$ (вероятности нахождения в системе n запросов от времени при условии, что в начальный момент в системе находятся i заявок; τ – преобразованное время t) с помощью сведения бесконечной системы уравнений к телеграфному уравнению, которое решается при соответствующих граничных условиях.

Однако полученные конечные выражения требуют анализа и проверки их достоверности путем сравнения с результатами, полученными другими способами, включая разработку соответствующих алгоритмов, программ и выполнения тестовых примеров.

В данной работе проводится анализ аналитических выражений для $P_{in}(\tau)$ при определенных постоянных значениях загрузки, а также разработаны алгоритм для вычисления $P_{in}(\tau)$ и программа в среде Delphi, получены расчетные результаты в виде табличных значений и графиков, которые позволяют делать соответствующие выводы при анализе потоковых процессов с пунктами обслуживания.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим одноканальную систему, в которой в момент $t=0$ находится начальное число требований i , и параметры которой зависят от времени [1, 2]. При анализе задачи массового обслуживания, удовлетворяющей этим условиям, было принято, что интенсивности входящего потока $\lambda(t)$ и потока обслуживания $\mu(t)$ являются периодическими функциями, нагрузка системы при этом является постоянной величиной. Введем преобразование времени τ .

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t \mu(s) ds. \text{ Используя для упрощения вы-}$$

числений масштаб времени τ , полагаем:

$$\rho(\tau) = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}; \quad R(\tau) = \frac{\int_0^t \lambda(s) ds}{\int_0^t \mu(s) ds} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \rho(s) ds.$$

Бесконечная система дифференциальных уравнений, составленная по графу состояний для одноканальной разомкнутой системы с ожиданием, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} P_0(\tau) = -\rho(\tau)P_0(\tau) + P_1(\tau); \\ \dots \\ \frac{d}{d\tau} P_n(\tau) = -[1 + \rho(\tau)]P_n(\tau) + \rho(\tau)P_{n-1}(\tau) + P_{n+1}(\tau), \quad n > 0, \\ P_n(0) = \delta_{in}. \end{cases}$$

Для решения полученной системы применяются следующие шаги:

1. Вводится обозначение

$$Q_n(\tau) = e^{\tau[1+R(\tau)]} \cdot P_n(\tau), \quad n = 0, 1, \dots,$$

и получается новая система:

$$\begin{cases} \frac{dQ_0(\tau)}{d\tau} = Q_0(\tau) + Q_1(\tau); \\ \dots \\ \frac{dQ_n(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)Q_{n-1}(\tau) + Q_{n+1}(\tau), \quad n > 0. \end{cases}$$

2. Для данной системы доказывается справедливость следующей производящей функции:

$$Q(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\tau) \frac{(z - \tau)^n}{n!}.$$

3. Производящая функция приводит к телеграфному уравнению $\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial z} = \rho(\tau)Q$.

4. Решение телеграфного уравнения дает результат $P_n(\tau)$:

$$P_n(\tau) = \exp\{-\tau[1 + R(\tau)]\} \cdot [A_{i-n}(0, \tau, \tau) + \int_0^\tau A_{-n}(\sigma, \tau, \tau) f_i(\sigma) d\sigma].$$

5. Если $R(\tau) \equiv \rho$ – постоянная величина, т.е. $\mu(\tau) = \rho\lambda(\tau)$, то можно получить $P_{in}(\tau)$:

$$P_{in}(\tau) = e^{-\tau(1+\rho)} [A_{i-n}(0, \tau, \tau) + \rho^n \times A_{n+i+1}(0, \tau, \tau) + (1-\rho)\rho^n \sum_{k=n+i+2}^{\infty} A_k(0, \tau, \tau)], \quad (1)$$

или вычисление $P_{in}(\tau)$ может проводиться с помощью таблиц для $P_{0n}(\tau)$:

$$P_{in}(\tau) = \rho^{-i} P_{0, i+n}(\tau) + e^{-\tau(1+\rho)} \times [A_{i-n}(0, \tau, \tau) - \rho^n A_{i+n}(0, \tau, \tau)]. \quad (2)$$

Для вычисления $P_{in}(\tau)$ преобразуем выражение (1) с учетом формулы для $A_n(\sigma, \tau, z)$:

$$\begin{aligned} A_n(0, \tau, \tau) &= \tau^{\frac{n}{2}} [\rho\tau - R(0) \cdot 0]^{-\frac{n}{2}} \cdot I_n(2\{\rho\tau - \\ &- R(0) \cdot 0\} \cdot \tau^{\frac{1}{2}}) = \tau^{\frac{n}{2}} \rho^{-\frac{n}{2}} \tau^{-\frac{n}{2}} \cdot I_n(2\{\rho\tau \cdot \tau^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}) = \\ &= \rho^{-\frac{n}{2}} \cdot I_n(2\tau\sqrt{\rho}) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} A_{i-n}(0, \tau, \tau) &= \rho^{\frac{n-i}{2}} \cdot I_{i-n}(2\tau\sqrt{\rho}); \\ A_{n+i+1}(0, \tau, \tau) &= \rho^{-\frac{n+i+1}{2}} \cdot I_{n+i+1}(2\tau\sqrt{\rho}); \\ \rho^n \cdot A_{n+i+1}(0, \tau, \tau) &= \rho^{\frac{n-i-1}{2}} \cdot I_{n+i+1}(2\tau\sqrt{\rho}); \\ A_k(0, \tau, \tau) &= \rho^{-\frac{k}{2}} \cdot I_k(2\tau\sqrt{\rho}). \end{aligned}$$

Окончательно получим формулу (3):

$$P_{in}(\tau) = e^{-\tau(1+\rho)} \left[\rho^{\frac{n-i}{2}} \cdot I_{i-n}(2\tau\sqrt{\rho}) + \rho^{\frac{n-i-1}{2}} \times \right. \\ \left. \times I_{n+i+1}(2\tau\sqrt{\rho}) + (1-\rho)\rho^n \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \rho^{\frac{k}{2}} \cdot I_k(2\tau\sqrt{\rho}) \right], \quad (3)$$

где $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя 1-го рода n -го порядка [6].

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм для определения $P_{in}(\tau)$ по формуле (3):

1. Задать численные значения ρ ($\rho > 0$) и τ .
2. Определить значения модифицированных функций Бесселя $I_n(2\tau\sqrt{\rho})$ 1-го рода до s -го порядка ($s = (\max[n] + \max[i] + 2)$) включительно.

3. Принять $\sum_{k=n+i+2}^{\infty} \rho^{\frac{k}{2}} I_k(2\tau\sqrt{\rho}) \approx \sum_{k=n+i+2}^s \rho^{\frac{k}{2}} I_k(2\tau\sqrt{\rho})$.

4. Рассчитать для заданных значений ρ , τ , n и i $\sum_{k=n+i+2}^s \rho^{\frac{k}{2}} I_k(2\tau\sqrt{\rho})$.

5. Рассчитать $P_{in}(\tau)$ по формуле (3).

Используя формулы для функций Бесселя [6]:

$$I_n(x) = I_{n-2}(x) - \frac{2(n-1)}{x} I_{n-1}(x)$$

получим формулы для определения значений функций до 12-го порядка включительно:

$$I_2(x) = I_0(x) - \frac{2}{x} I_1(x); \quad I_3(x) = I_1(x) - \frac{4}{x} I_2(x);$$

$$I_4(x) = I_2(x) - \frac{6}{x} I_3(x); \quad I_5(x) = I_3(x) - \frac{8}{x} I_4(x);$$

$$I_6(x) = I_4(x) - \frac{10}{x} I_5(x); \quad I_7(x) = I_5(x) - \frac{12}{x} I_6(x);$$

$$I_8(x) = I_6(x) - \frac{14}{x} I_7(x); \quad I_9(x) = I_7(x) - \frac{16}{x} I_8(x);$$

$$I_{10}(x) = I_8(x) - \frac{18}{x} I_9(x); \quad I_{11}(x) = I_9(x) - \frac{20}{x} I_{10}(x);$$

$$I_{12}(x) = I_{10}(x) - \frac{22}{x} I_{11}(x).$$

Кроме того, для определения $P_{in}(\tau)$ примем, что

$$\sum_{k=n+i+2}^{\infty} \rho^{\frac{k}{2}} I_k(2\tau\sqrt{\rho}) \approx \sum_{k=n+i+2}^{12} \rho^{\frac{k}{2}} I_k(2\tau\sqrt{\rho}).$$

Пусть $\rho = 0,5$; $\tau = 2\sqrt{0,5}$, тогда $2\tau\sqrt{\rho} = 2$, и

$$P_{in}(\tau) = e^{-2,12} \left[0,5^{\frac{n-i}{2}} \cdot I_{i-n}(2) + 0,5^{\frac{n-i-1}{2}} \times \right. \\ \left. \times I_{n+i+1}(2) + 0,5^{n+1} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} 0,5^{\frac{k}{2}} \cdot I_k(2) \right].$$

При помощи формул для $I_2(x) \dots I_{12}(x)$ и табличных значений $I_0(2) = 2,2796$; $I_1(2) = 1,5906$ [6] получим расчетные значения для табл. 1 и табл. 2.

Для вычисления $P_{in}(\tau)$ по формуле (3), используя значения из табл. 1, табл. 2, будем для фиксированной величины i последовательно изменять n от 0 до 5 (полученные значения заносим в табл. 3):

$$i = 0 : P_{0n}(\tau) = e^{-2,12} \left[0,5^{\frac{n}{2}} \cdot I_n(2) + 0,5^{\frac{n-1}{2}} \cdot I_{n+1}(2) + \right. \\ \left. + 0,5^{n+1} \sum_{k=n+2}^{\infty} 0,5^{\frac{k}{2}} \cdot I_k(2) \right];$$

$$i = 1 : P_{1n}(\tau) = e^{-2,12} \left[0,5^{\frac{n-1}{2}} \cdot I_{1-n}(2) + 0,5^{\frac{n-2}{2}} \times \right. \\ \left. \times I_{n+2}(2) + 0,5^{n+1} \sum_{k=n+3}^{\infty} 0,5^{\frac{k}{2}} \cdot I_k(2) \right];$$

$$i = 2 : P_{2n}(\tau) = e^{-2,12} \left[0,5^{\frac{n-2}{2}} \cdot I_{2-n}(2) + 0,5^{\frac{n-3}{2}} \times \right. \\ \left. \times I_{n+3}(2) + 0,5^{n+1} \sum_{k=n+4}^{\infty} 0,5^{\frac{k}{2}} \cdot I_k(2) \right];$$

$$i = 3 : P_{3n}(\tau) = e^{-2,12} \left[0,5^{\frac{n-3}{2}} \cdot I_{3-n}(2) + 0,5^{\frac{n-4}{2}} \times \right. \\ \left. \times I_{n+4}(2) + 0,5^{n+1} \sum_{k=n+5}^{\infty} 0,5^{\frac{k}{2}} \cdot I_k(2) \right];$$

$$i = 4 : P_{4n}(\tau) = e^{-2,12} \left[0,5^{\frac{n-4}{2}} \cdot I_{4-n}(2) + 0,5^{\frac{n-5}{2}} \times \right. \\ \left. \times I_{n+5}(2) + 0,5^{n+1} \sum_{k=n+6}^{\infty} 0,5^{\frac{k}{2}} \cdot I_k(2) \right];$$

$$i = 5 : P_{5n}(\tau) = e^{-2,12} \left[0,5^{\frac{n-5}{2}} \cdot I_{5-n}(2) + 0,5^{\frac{n-6}{2}} \times \right. \\ \left. \times I_{n+6}(2) + 0,5^{n+1} \sum_{k=n+7}^{\infty} 0,5^{\frac{k}{2}} \cdot I_k(2) \right].$$

Таблица 1

Модифицированные функции Бесселя

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$I_k(2)$	0,6889	0,2127	0,0507	0,982× ×10 ⁻²	0,16× ×10 ⁻²	0,224× ×10 ⁻³	0,277× ×10 ⁻⁴	0,304× ×10 ⁻⁵	0,301× ×10 ⁻⁶	0,2× ×10 ⁻⁷	0,4× ×10 ⁻⁸

Таблица 2

Значения $\sum_{k=n+i+2}^{12} \rho^{-\frac{k}{2}} I_k(2\tau\sqrt{\rho})$

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$0,5^{-\frac{b}{2}} \cdot I_b(2)$	1,377	0,601	0,202	0,055	0,13× ×10 ⁻¹	0,25× ×10 ⁻²	0,44× ×10 ⁻³	0,6887× ×10 ⁻⁴	0,96× ×10 ⁻⁵	0,12× ×10 ⁻⁵	0,26× ×10 ⁻⁶
$\sum_{k=b}^{12} 0,5^{-\frac{k}{2}} \cdot I_k(2)$	2,253	0,875	0,274	0,071	0,16× ×10 ⁻¹	0,31× ×10 ⁻²	0,52× ×10 ⁻³	0,7998× ×10 ⁻⁴	0,11× ×10 ⁻⁴	0,15× ×10 ⁻⁵	0,26× ×10 ⁻⁶

Таблица 3

Значения $P_{in}(\tau)$ [$\rho=0,5$; $\tau = 2\sqrt{0,5}$]

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$i=0$	0,678	0,24	0,063	0,01	0,0019	0,0002
$i=1$	0,487	0,31	0,142	0,04	0,0091	0,0015
$i=2$	0,254	0,28	0,275	0,13	0,0413	0,0090
$i=3$	0,100	0,17	0,270	0,27	0,135	0,0413
$i=4$	0,031	0,07	0,165	0,27	0,2736	0,135
$i=5$	0,008	0,02	0,072	0,16	0,27	0,2736

Таблица 5

Значения $P_{in}(\tau)$ [$\rho=4$; $\tau=0,5$]

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$i=0$	0,20	0,288	0,247	0,15	0,071	0,027
$i=1$	0,07	0,192	0,263	0,22	0,140	0,066
$i=2$	0,01	0,065	0,187	0,26	0,226	0,139

Таблица 4

Значения $P_{in}(\tau)$ [$\rho=1$; $\tau=1$]

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$i=0$	0,523	0,308	0,122	0,03	0,008	0,001
$i=1$	0,308	0,337	0,222	0,09	0,029	0,006
$i=2$	0,122	0,222	0,309	0,21	0,093	0,028
$i=3$	0,035	0,094	0,215	0,30	0,215	0,093
$i=4$	0,008	0,029	0,093	0,21	0,308	0,215
$i=5$	0,001	0,006	0,028	0,09	0,215	0,308

Таблица 6

Значения $P_{in}(\tau)$ [$\rho=1$; $i=0$]

	$\tau=0$	$\tau=1$	$\tau=2$	$\tau=3$	$\tau=4$	$\tau=5$
$P_0(\tau)$	1	0,523	0,38	0,318	0,277	0,25
$P_1(\tau)$	0	0,308	0,29	0,268	0,244	0,22
$P_2(\tau)$	0	0,122	0,17	0,19	0,189	0,17
$P_3(\tau)$	0	0,035	0,08	0,115	0,129	0,12
$P_4(\tau)$	0	0,008	0,03	0,06	0,079	0,07
$P_5(\tau)$	0	0,001	0,01	0,028	0,043	0,03

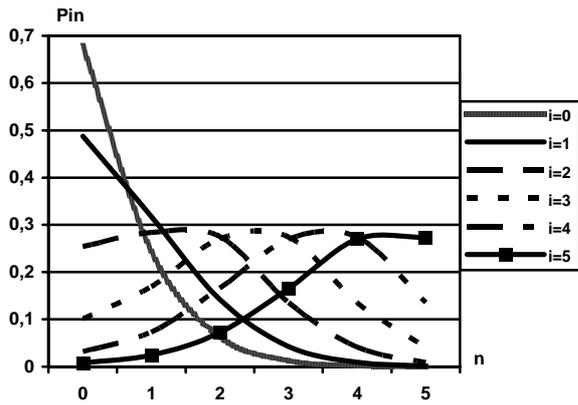


Рис. 1. Графики зависимостей $P_{in}(\tau)$ для случая $\rho < 1$, $\tau = 2\sqrt{0,5}$, $i = \overline{0, 5}$, $n = \overline{0, 5}$

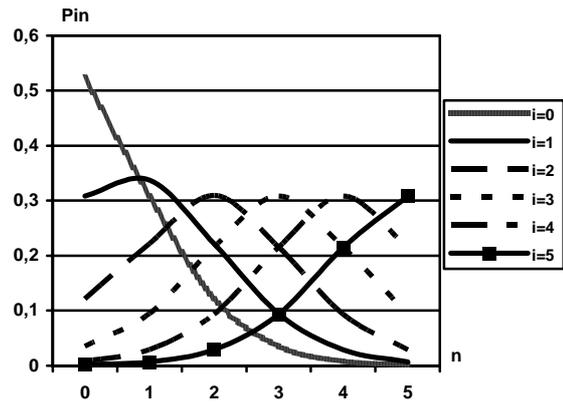


Рис. 2. Графики зависимостей $P_{in}(\tau)$ для случая $\rho = 1$, $\tau = 1$, $i = \overline{0, 5}$, $n = \overline{0, 5}$

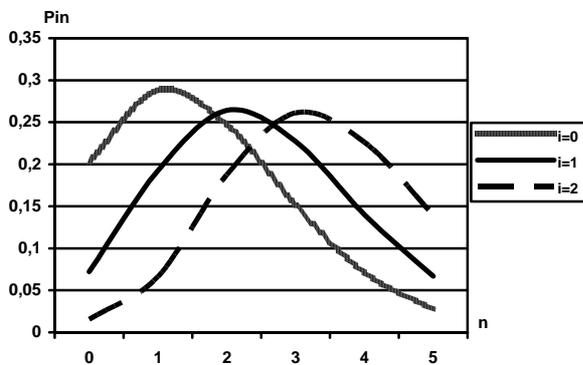


Рис. 3. Графики зависимостей $P_{in}(\tau)$ для случая $\rho > 1$, $\tau = 0,5$, $i = \overline{0, 5}$, $n = \overline{0, 5}$

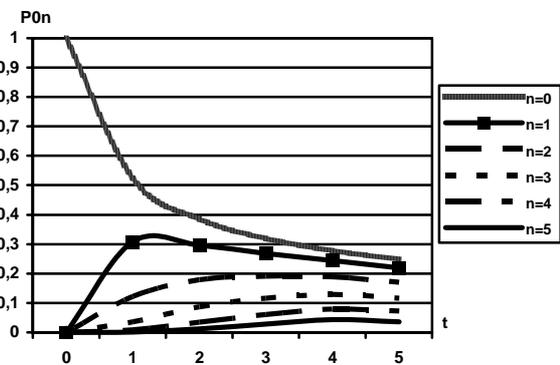


Рис. 4. Графики зависимостей $P_{0n}(\tau)$ для случая $\rho = 1$, $i = 0$

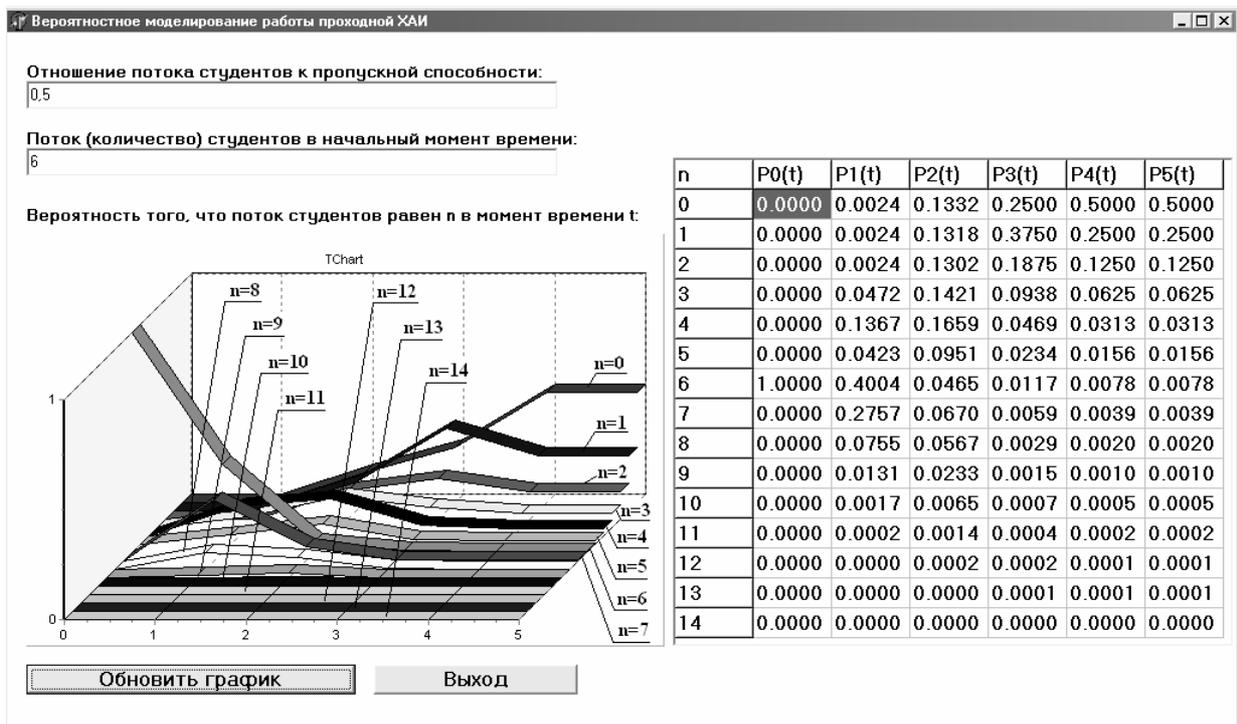


Рис. 5. Окно программы с таблицей и графиками для модели обслуживания с переменными интенсивностями потоков

По полученным в табл. 3 данным были построены графики зависимости вероятностей $P_{in}(\tau)$ от количества запросов в системе n (рис. 1).

Аналогично построены графики зависимостей для $\rho = 1$ (табл. 4, рис. 2) и для $\rho > 1$ (табл. 5, рис. 3).

Кроме того, были построены графики зависимости вероятности $P_{in}(\tau)$ от времени τ (табл. 6, рис. 4). Для упрощения было принято:

$$\rho = 1, i = 0.$$

Для вычисления вероятностей $P_{in}(\tau)$ с учетом принятых упрощений формула (3) примет вид:

$$P_{in}(\tau) = e^{-2\tau} [I_n(2\tau) + I_{n+1}(2\tau)].$$

Для стационарного состояния ($\tau \rightarrow \infty$) результаты были получены программно (столбец $P_5(t)$ таблицы на рис. 5).

Заключение

1. Предложенный алгоритм нахождения $P_{in}(\tau)$ по формуле (3) протестирован и апробирован целым рядом тестовых примеров и показал достаточную устойчивость и непротиворечивость.

2. Стационарный режим изучался путем сравнения основного расчетного алгоритма (3) и стационарных решений, а также путем сравнения с данными, полученными для стационарного режима по формуле для $M | M | 1 | \infty | \infty | \text{Fifo}$ $P_n = (1-\rho)\rho^n$ при постоянных значениях интенсивностей входящего потока λ и потока обслуживания μ .

3. При значениях $n = \overline{0, 5}$ наблюдается достаточная проверочная сумма $P_{in}(\tau)$ по n , приблизительно равная 1.

4. Особенностью графиков переходного режима с переменными λ и μ в системе $M | M | 1 | \infty | \infty | \text{Fifo}$ является наличие колебательных процессов функций $P_{in}(\tau)$, что формально объясняется привлечением модифицированных функций Бесселя 1-го рода n -го порядка для расчета вероятностей состояний.

5. Для дальнейшего исследования необходимо рассмотреть специфику преобразования времени τ с целью возможной соответствующей практической интерпретации, а также возможность вычисления $P_{in}(\tau)$ с помощью таблиц для $P_{0n}(\tau)$ по формуле (2). Следует изучить особенности входного потока для неперiodической функции времени, а также провести анализ других возможных зависимостей потока обслуживания $\mu(t)$ и всех графических зависимостей $P_{in}(\tau)$ с отражением изменения параметров системы $P_{in}(\tau)$ по сравнению с такими же параметрами для системы с постоянными λ и μ .

6. Важным, на наш взгляд, является практическое применение полученных результатов для случая реальных потоковых процессов с целью разработки мероприятий для улучшения работы системы.

Литература

1. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее применение. – М.: Сов. радио, 1971. – 520 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Кофман А., Крюок Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. – М.: Мир, 1965. – 446 с.
4. Савкин В.Б. Гарантированное качество обслуживания в компьютерных сетях: модели и сценарии реализации // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 3. – С. 121-130.
5. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций: Пер. с англ. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

Поступила в редакцию 26.09.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.В. Малеева, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.