

УДК 688.511.2

В.А. ТВЕРДОХЛЕБОВ

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ ПОВЕДЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Предлагается исключение рекурсии при вычислениях реакций автоматов. Для этого вводится специальная словарная дискретная геометрия, в которой законы функционирования автоматов представляются обходом геометрических фигур по дискретным точкам. Это позволяет свойства функционирования автоматов представлять явно (без рекурсии) на любых по протяженности и удалении от начала функционирования интервалах времени через свойства геометрических фигур и их взаиморасположения на плоскости. Разработаны методы построения, анализа законов функционирования автомата на основе рассмотрения свойств геометрических фигур. Исключение рекурсии и использование аппарата геометрии позволяет ставить и решать некоторые новые задачи управления, синтеза и технического диагностирования.

**конечный детерминированный автомат, геометрический образ функционирования, диагностический эксперимент**

### Введение

Геометрический образ  $\gamma_s$  инициального детерминированного автомата  $(A, s)$  определяется в геометрии  $\Gamma_1$  как ломаная линия с множеством вершин

$$\gamma_s = \bigcup_{p \in X^*} \bigcup_{x \in X} \{(px, \lambda(\delta(s, p), x))\}.$$

В дискретной словарной геометрии  $\Gamma_1$  геометрический образ  $\gamma_s$  размещается в системе координат с осью абсцисс  $(X^*, \omega_1)$  и осью ординат  $(Y, \omega_2)$ , где порядки  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяются следующими правилами.

**Правило 1.** На множестве  $X$  вводится некоторый линейный порядок  $\omega_1$  (который будем также обозначать  $\prec$ ).

**Правило 2.** Порядок  $\omega_1$  на  $X$  распространяется до линейного порядка на множестве всех конечных последовательностей элементов из  $X$  в соответствии с условиями:

- $(\forall p_1, p_2 \in X^*) \{|p_1| < |p_2| \rightarrow p_1 \prec p_2\}$ ;
- для любых  $p_1, p_2 \in X^*$ , для которых  $|p_1| = |p_2|$  &  $p_1 \neq p_2$ , их отношение по порядку  $\omega_1$  повторяет отношение ближайших слева несовпадающих букв в словах  $p_1$  и  $p_2$ .

**Правило 3.** На множестве  $Y$  вводится некоторый линейный порядок  $\omega_2$ .

Общий вид геометрического образа  $\gamma_s$  с разбиением его на части  $\gamma_s^1, \gamma_s^2, \gamma_s^3, \dots$ , соответствующие подмножествам  $X^1, X^2, X^3, \dots$  множества  $X^*$  (где  $X^i$  является  $i$ -й степенью по композиции множества  $X$ ), изображен на рис. 1.

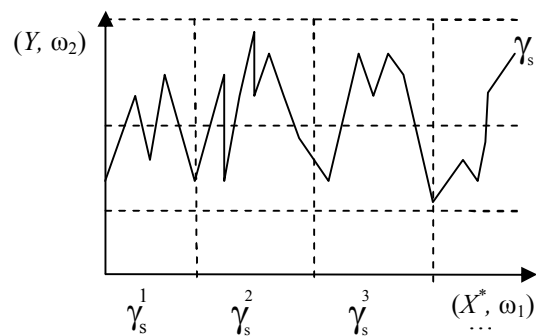


Рис. 1. Общий вид геометрического образа  $\gamma_s$  инициального автомата  $(A, s)$

Для нового способа задания законов функционирования и конкретного поведения конечных детерминированных автоматов геометрическими образами разработаны методы анализа, синтеза, диагностирования и управления, базирующиеся на следующих теоремах.

**Теорема 1.** Любая бесконечная ломаная линия, являющаяся графиком в геометрии  $\Gamma_1$ , представляет собой геометрический образ некоторого конечного детерминированного автомата (КДА).

**Теорема 2.** Любая геометрическая фигура на евклидовой плоскости при заданном направлении обхода всех точек фигуры представляет собой геометрический образ некоторого КДА.

Разработаны методы построения геометрического образа КДА по его табличному заданию и построения табличного задания по геометрическому образу КДА.

**Теорема 3.** Пусть  $\gamma_s$  – геометрический образ инициального конечного детерминированного автомата  $(A, s)$ , где  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ ,  $s \in S$  и  $U$  – множество достижимых из  $s$  состояний автомата.

Тогда геометрический образ  $\gamma_s$  состоит из последовательности частей, являющихся начальными отрезками длины  $m$ , где  $m = |X|$ , геометрических образов  $\{\gamma_u(\varepsilon), u \in U\}$ . Линейный порядок  $\omega_1$  и правила его построения позволяют определить номер любого входного слова  $p \in X^*$ .

**Теорема 4.** Пусть  $p \in X^*$  и  $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ , где  $k \in N^+$ . Тогда номер  $r(p)$  слова  $p$  по порядку  $\omega_1$  определяется равенством:

$$r(p) = \sum_{j=1}^k r(x_{i_j}) \cdot |X|^{j-1} - 1.$$

Теорема 4 позволяет вычислять координаты отрезков, образующих геометрический образ. В качестве базовых отрезков геометрического образа рассматриваются отрезки, представляющие поведение автомата на всех словах длины 1, на всех словах длины 2 и т.д.

**Теорема 5.** Пусть  $\gamma_s$  – геометрический образ автомата  $(A, s)$ ,  $p \in X^*$  и состояние  $a = \delta(s, p)$  имеет по порядку  $\omega_1$  номер  $r(a)$ . Тогда для любого  $j, j = 1, 2, \dots$  и  $i=r(a)$  первые координаты первой и последней точек отрезка  $\gamma_s^j(i)$  геометрического образа  $\gamma_a$  в геометрическом образе  $\gamma_s$  имеют соответственно значения  $m^1 + m^2 + \dots + m^{j-1} + (i-1)m^j + 1$  и  $m^1 + m^2 + \dots + i \cdot m^j$ .

**Теорема 6.** Если  $\gamma_s$  периодический геометрический образ с периодом наименьшей длины  $d$  инициального КДА с множеством входных сигналов  $X$ , где  $m = |X|$ , то  $\gamma_s$  определяет автомат с множеством состояний  $S$ , где  $|S| \leq \text{НОК}(d, m)$ .

**Теорема 7.** Существуют КДА с геометрическими образами, не являющимися периодическим.

**Теорема 8.** Пусть выполнены условия:

1.  $\gamma_s$  – периодический с периодом длины  $d$ ,  $d > 1$ , геометрический образ инициального конечного детерминированного автомата  $(A, s)$ , где  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$  и  $s \in S$ ;
2.  $m = |X|$  ( $m \geq 2$ );
3.  $p_1, p_2 \in X^*$  и  $\alpha, \beta$  – номера соответственно слов  $p_1$  и  $p_2$  по порядку  $\omega_1$ ;
4.  $d > m$  и  $d$  не является кратным  $m$ .

Состояния  $\delta(s, p_1)$  и  $\delta(s, p_2)$  автомата  $A$  эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняется условие:  $(\exists n \in N) |\alpha - \beta| \cdot m = n \cdot d$ .

Одним из основных претендентов на использование для расширения математического аппарата теории автоматов является геометрия. Фундаментальная роль геометрии во всей математике проявилась в том, что она параллельно занималась решением прикладных задач и анализом и построением фундаментальных основ математики. Следует отметить, что геометрические образы и построенное с их использованием мышление лучше и проще согласуется с нашим мышлением, чем использование формул, таблиц и т.п. Геометрическая интуиция имеет естественное развитие. С помощью геометрических понятий линии, фигуры, пространства и т.п. представляются, систематизируются и исследуются не только процессы движения материальных тел, но и процессы изменения во времени любых свойств, характеристик и значений параметров материальных и идеальных (мыслимых) объектов. Это явилось основой для предложения (1994 – 1995 г.г.) и развития (1996 – 2005 г.г.) геометрического фрагмента теории автоматов.

### Метод синтеза автомата по заданной геометрической фигуре

Предполагается, что плоская геометрическая фигура  $\Phi'$  размещена в главном квадранте евклидовой плоскости с декартовой системой координат (рис. 2, а). Кроме этого, с содержательной точки зрения предполагается, что точки фигуры имеют интерпретацию в некоторой прикладной области как представители свойств, характеристик, значений параметров и т.п. В связи с этим обход фигуры рассматривается как “движение” (изменение в реальном или абстрактном времени) этих свойств, характеристик, значений параметров и т.п.

Для инициального конечного детерминированного автомата  $(A, s_0)$ , где  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$  и все пять компонентов автомата требуется определить, введем следующее обозначение состояний:  $S = \{S_p\}_{p \in X^*}$ ,  $S_{px} = \delta(S_p, x)$ , где  $x \in X$ ,  $p \in X^*$ ,  $S_0 = S_\varepsilon$ . Это позволяет ввести и использовать стандартное определение функции переходов  $\delta$  с последующей минимизацией автомата по числу состояний и соответствующей коррекцией функции  $\delta$ .

Метод состоит из реализации следующий этапов.

**1 этап.** Заданная фигура  $\Phi'$  (возможно, но не обязательно) заменяется конгруэнтной фигурой  $\Phi$  с более удобным её расположением относительно осей системы координат (рис. 2, б).

**2 этап.** Выбирается обход фигуры  $\Phi$ , имеющий интерпретацию (или порождающий интерпретацию) как изменение свойств, характеристик, значений параметров моделируемого объекта, процесса, события и т.п. (рис. 2, с).

**3 этап.** Выбирается прямая линия  $Z$ , которая параллельно оси ординат и имеет одну или несколько общих точек с фигурой  $\Phi$ . Полагается, что только правая часть фигуры  $\Phi$  в дальнейшем учитывается при построении автомата.

**4 этап.** Одна из общих точек  $a_1$  линии  $Z$  и фигуры  $\Phi$  выбирается начальной точки обхода (рис. 2, д).

**5 этап.** Строится сеть прямых линий, пересекающих фигуру  $\Phi$ , по следующим правилам:

- фигуру  $\Phi$  пересекает  $U$  прямых (при выбранной величине  $U$ ), параллельных оси ординат и расположенных справа от линии  $Z$ ;

- фигуру  $\Phi$  пересекает конечное число прямых, параллельных оси абсцисс и проходящих через точки пересечения фигуры  $\Phi$  с построенными прямыми, параллельными оси ординат;

- точки, в которых одновременно пересекаются прямые, параллельные оси ординат, прямые, параллельные оси абсцисс, и фигура  $\Phi$ , обозначаются в соответствии с порядком обхода фигуры  $\Phi$   $a_1, a_2, \dots, a_d$ .

(Предполагается, что рассматриваемая фигура позволяет построить последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_d$  при конечном  $d$ ).

**6 этап.** Точки оси ординат, полученные пересечением прямых, параллельных оси абсцисс и проходящих через точки  $a_1, a_2, \dots, a_d$ , обозначаются от начала системы координат  $y_1, y_2, \dots, y_l$ , где  $l \leq d$ . (рис. 2, е).

**7 этап.** По последовательности точек  $a_1, a_2, \dots, a_d$  строится ломаная линия по правилам:

- на оси абсцисс при  $U \leq d$  откладывается  $d$  точек  $1, 2, \dots, d$  справа от точек  $1, 2, \dots, U$  и включая эти точки;

- через каждую точку  $i$ ,  $U < i \leq d$ , проводится прямая, параллельная оси ординат;

- каждой точке  $i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , оси абсцисс сопоставляется точка  $a_i$  фигуры  $\Phi$ ;

- для каждой точки  $i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , оси абсцисс строится точка  $(i, \theta(a_i))$ , где  $\theta(a_i)$  – точка оси ординат, соответствующая  $a_i$ .

Полученная последовательность точек  $(i, \theta(a_i))$ , где  $1 \leq i \leq d$ , полагается базовой ломаной линией,  $\gamma_B$ , определяющей геометрический образ  $\gamma_{B_\varepsilon}$  ав-

томата  $(A, S_\varepsilon)$ . Возможен один из двух случаев:

- $\gamma_B$  – периодическая ломаная линия с наименьшим периодом  $\gamma_B'$ ;
- $\gamma_B$  – непериодическая ломаная линия.

Ломаную линию  $\gamma_B'$  или непериодическую ломаную линию  $\gamma_B$  полагаем периодом периодического геометрического образа  $\gamma_{S_\varepsilon}$  автомата  $(A, S_\varepsilon)$ .

Следующие этапы метода синтеза автомата по заданной геометрической фигуре реализуются для заданного периода периодического геометрического образа  $\gamma_{S_\varepsilon}$  автомата  $(A, S_\varepsilon)$ .

**8 этап.** Выбирается целое положительное число  $m$ , где  $2 \leq m \leq d$ , и полагается, что

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

**9 этап.** Выбираем на оси абсцисс (счетно) бесконечную последовательность точек, нумеруем точки числами натурального ряда и сопоставляем взаимнооднозначно точкам элементам множества всех конечных слов  $X^*$  по порядку  $\omega_1$ .

**10 этап.** Рассматриваем бесконечную периодическую последовательность с периодом

$$\langle \theta(a_1), \theta(a_2), \dots, \theta(a_d) \rangle$$

как последовательность вторых координат вершин ломаной линии с первыми координатами из множества  $X^*$ . Полученная бесконечная ломаная линия полагается геометрическим образом  $\gamma_{S_\varepsilon}$  инициального автомата  $(A, S_\varepsilon)$ .

**11 этап.** По заданному числу  $m$  и принятым обозначениям состояний  $S_0 = S_\varepsilon$  и для любых  $x \in X, p \in X$   $S_{px} = \delta(S_p, x)$  стандартно, без учета специфических свойств функции  $\delta$ , заполняется часть  $T_\delta'$  таблицы переходов  $T_\delta$  для функции  $\delta$ . Таблица  $T_\delta'$  имеет  $m$  строк и  $\wp = \sum_{j=1}^c m^j$ , где  $c = \text{НОК}(m, d)$ , столбцов (критерий определяется рассмотренными теоремами).

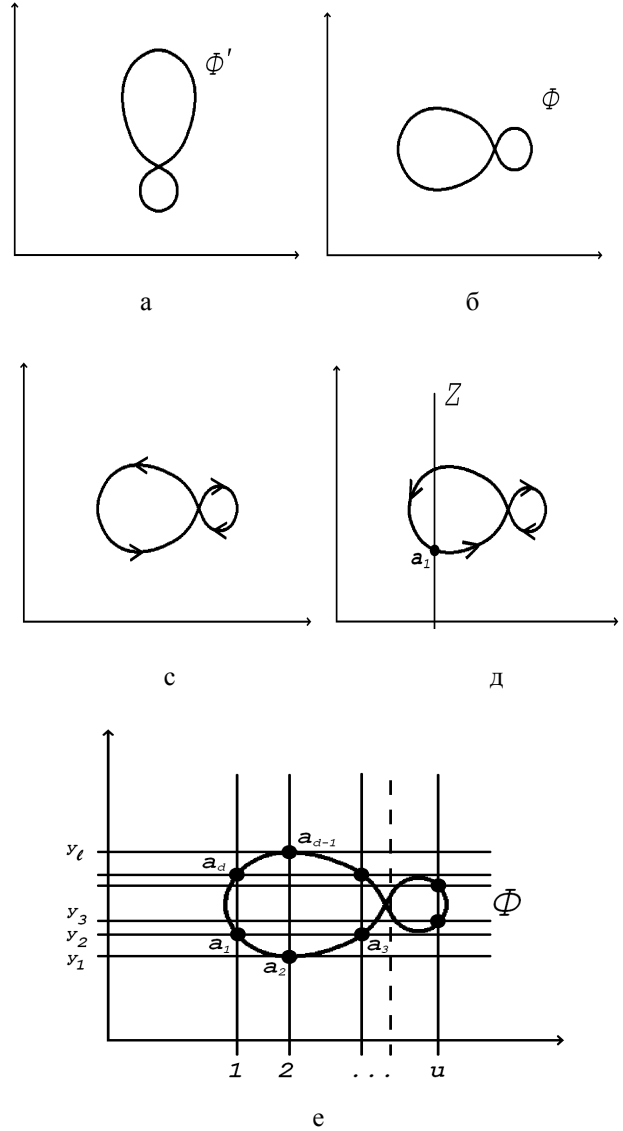


Рис. 2. Реализация этапов метода

**12 этап.** По правилам построения и интерпретации геометрического образа  $\gamma_{S_\varepsilon}$  его разбиению на части соответствующих разбиению  $\eta_1$  оси абсцисс слева направо на строки по  $m$  точек, соответствует последовательности состояний

$$S_\varepsilon, S_{x_1}, \dots, S_{x_m}, S_{x_1 x_1}, \dots, S_p, \dots \quad (1)$$

автомата  $A$ . Следовательно, часть геометрического образа, которой соответствует состояние  $S_p$ , где  $p \in X^*$ , определяет функцию выходов  $\lambda$  на множестве  $\{S_p\} \times X$ . Это позволяет для любого  $p \in X^*$  по соответствующей части геометрического образа  $\gamma_{S_\varepsilon}$

заполнить таблицу выходов автомата для всех состояний, предшествующих в последовательности (1) состоянию  $S_p$ .

**13 этап.** В построенной на 11 этапе таблице  $T_{\delta}'$  (на основании теоремы) представлено, по крайней мере, по одному состоянию из каждого класса эквивалентности состояний автомата  $(A, S_{\varepsilon})$  по числу состояний с использованием таблицы  $T_{\delta}'$  дает таблицу  $T_{\delta}$  для минимальной формы автомата.

Теоремы 1 – 8 являются примерами результатов, обосновывающих геометрический подход в задании автоматов для решения задач анализа, синтеза, диагностирования и управления. В работах [1] – [18] содержатся полные изложения разработанного формального аппарата.

### Литература

1. Резчиков А.Ф., Твердохлебов В.А. Управление и диагностирование в сложных системах. – Саратов: Саратовский университет, 1997. – 160 с.
2. Смирнов А.К., Твердохлебов В.А. Управление жизненными циклами сложных систем. – Саратов: Саратовский университет, 2000. – 128 с.
3. Твердохлебов В.А. Техническое диагностирование в геометрической интерпретации задач, моделей и методов // Материалы Международной конференции «Автоматизация проектирования дискретных систем», т. 1. – Минск, 1995. – С. 97.
4. Твердохлебов В.А. Распознавание автоматов на основе геометрической интерпретации // Тезисы докладов XI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». – М., 1996. – С. 191.
5. Твердохлебов В.А. Геометрические модели и методы в техническом диагностировании // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. – 1996. – № 3, 4. – 58 с.
6. Твердохлебов В.А. Дискретные словарные геометрии для анализа и синтеза математических

автоматов // Доклады Академии военных наук. – Саратов, 1999. № 1. – С.100-113.

7. Твердохлебов В.А. Синтез и анализ геометрических образов конечных автоматов // Тезисы докладов XII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики», ч. II. – М., 1999. – С. 225.

8. Tverdokhlebov V.A. Discrete space for trajectories of diagnostic symptoms // Радиоэлектроника и информатика. – X., 2003. – № 3. – С. 90-98.

9. Твердохлебов В.А. Дискретное пространство для образов поведения конечных автоматов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. – Саратов: Саратовский университет, 2003. – Вып. 5. – С. 163-174.

10. Твердохлебов В.А. Дискретные пространства в задачах управления и диагностирования // Доклады Академии военных наук. – Саратов, 2003. – № 9. – С. 102-108.

11. Твердохлебов В. А. Рекуррентность геометрических образов // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. – 2004. – Вып. 4-5. – С. 88-90.

12. Tverdokhlebov V.A. The general features of geometrical images of finite state machines / Proceedings of East-West Design & Test Workshop (EWDTW'2004), Alushta, 2004. – P. 243-247.

13. Твердохлебов В.А. Конечные автоматы и анализ их геометрических образов // Тезисы докладов XIV международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». – М., 2005. – С. 153.

14. Твердохлебова В.А. Геометрические образы конечных детерминированных автоматов // Известия саратовского университета (Новая серия). – Саратов. – 2005. – Т. 5. – Вып. 1. – С. 141-153.

*Поступила в редакцию 1.03.2006*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.М. Илюшко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.