УДК 621.325.5

А.М. РОМАНКЕВИЧ, А.А. КОНОНОВА

Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина

ОСОБЕННОСТИ ТРАНСФОРМАЦИИ *GL*-МОДЕЛЕЙ БАЗОВЫХ ДВУХУСТОЙЧИВЫХ ОМС К НЕБАЗОВЫМ

Работа посвящена обобщению и развитию некоторых результатов, полученных авторами ранее в области синтеза графо-логических моделей, отображающих поведение многопроцессорных систем в потоке отказов для случая, когда система является устойчивой к двум отказам своих компонент. Предлагается новый путь трансформации базовых моделей в небазовые.

многопроцессорные системы, отказоустойчивость, графы, булевы функции

Введение

Для управления сложными объектами во многих современных отраслях промышленности и науки широко применяются сложные многопроцессорные системы. Потеря работоспособности таких систем подчас может привести к катастрофическим последствиям, как, например, отказ системы управления атомной электростанцией, ракетами и самолетами. Поэтому архитектура подобных многопроцессорных систем изначально должна обеспечивать определенный уровень отказоустойчивости. Высокая стоимость реализации крупных систем управления привела к тому, что большое значение приобрело моделирование работы отказоустойчивых многопроцессорных систем (ОМС), позволяющее на этапе проектирования дать оценку надежности системы. Однако нередко решение этой задачи требует колоссальных вычислительных затрат и иногда не может быть выполнено с необходимой точностью за заданный промежуток времени.

Среди множества моделей ОМС особое место занимают графо-логические модели [1, 2], отражающие поведение ОМС в потоке отказов, которые используют преимущества теории графов и аппарата булевых функций. При условии оптимального построения графо-логической модели время, необходимое для определения работоспособности ОМС в случае отказов её модулей, заметно сокращается, что позволяет осуществить расчет модели ОМС с требуемой точностью доступными вычислительными средствами.

В данной работе рассмотрены особенности и некоторые предположения относительно графо-логической модели, предложенной в [1].

Основные определения и свойства

Графологическая модель (далее *GL*-модель) ОМС, состоящей из n элементов, представляет собой неориентированный граф G, каждому ребру которого соответствует булева функция. Аргументами рёберных функций являются индикаторные переменные x_i (i = 1, … , n), равные 1 (i-й элемент системы работоспособен) или 0 (i-й элемент системы вышел из строя). Ребро удаляется из графа определённой *GL*-модели, если соответствующая ему рёберная функция принимает значение 0. Связность графа моделирует работоспособность ОМС.

ОМС, состоящую из n элементов и сохраняющую работоспособность в случае отказа не более, чем m её любых модулей ($0 \le m < n$), будем обозначать $K(m,n)$ и назовём базовой ОМС.

В дальнейшем будем рассматривать *GL*-модель, состоящую из циклического неориентированного графа G и рёберных функций вида ([1]):

$$h_i = x_i \vee \prod_{j=1,]\frac{n-1}{2}[} x_{g_{(i+j)\bmod n}},$$

где n – количество вершин графа G;

$i = 1, \ldots, n$;

$]\frac{n-1}{2}[$ – целая часть дроби $\frac{n-1}{2}$.

В [1] показано, что граф G в этом случае теряет связность, если и только если не менее трёх переменных из множества $\{x_i, \ldots, x_n\}$ принимают нулевые значения. Таким образом, описанная GL-модель отображает реакцию двухустойчивой базовой ОМС на появление отказов.

Примером системы $K(2,7)$ является следующая GL-модель, где каждая функция соответствует одному ребру циклического графа:

$$h_1 = x_1 \vee x_2 x_3 x_4;$$
$$h_2 = x_2 \vee x_3 x_4 x_5;$$
$$h_3 = x_3 \vee x_4 x_5 x_6;$$
$$h_4 = x_4 \vee x_5 x_6 x_7;$$
$$h_5 = x_5 \vee x_6 x_7 x_1;$$
$$h_6 = x_6 \vee x_7 x_1 x_2;$$
$$h_7 = x_7 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Важным достоинством таких GL-моделей является простота формирования рёберных функций: для получения функции h_{i+j} достаточно добавить j по модулю n к индексам всех переменных функции h_i. Кроме того, легко определяется связность циклического графа, ребрам которого ставятся в соответствие функции h_i.

Вид каждой рёберной функции системы $K(2,n)$ полностью определяется последовательностью $\{g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n\}$ номеров элементов системы. Множество всех различных последовательностей, которые можно получить из указанной путём циклического сдвига, назовём f-множеством конкретной системы. Базовым f-вектором будем называть последовательность f-множества, первым элементом которой является 1.

Для приведенной модели $K(2,7)$ базовый f-вектор:

(1,2,3,4,5,6,7,8).

Для простоты будем считать, что f-вектор – это цикл, где за n-м элементом следует первый элемент.

Вектором состояния системы назовём упорядоченную последовательность нулей и единиц, где компонент i равен 1, если i-й элемент системы работоспособен, и равен 0 в противном случае. Поведение модели адекватно поведению системы при появлении любого вектора состояния (т.е. вектора состояния с любым числом нулей). Поскольку в работе исследуются модели 2-устойчивых систем, нас будет интересовать, в первую очередь, случаи минимального превышения числа отказов, т.е. векторы, содержащие 3 нуля. Мы будем относить эти векторы к классу S.

Два нулевые элемента i и j вектора состояния будем называть соседними, если все элементы вектора состояния, находящиеся между i-й и j-й позициями, равны 1. Расстоянием L_{ij} по базовому f-вектору между соседними i-й и j-й нулевыми компонентами вектора состояния назовём величину E+1, где E – количество единичных элементов между i-й и j-й позициями.

Можно показать, что ребро i удаляется, если

$$L_{ij} \leq\ ]\frac{n-1}{2}[\,.$$

Небазовые ОМС

Отличительной особенностью предложенной модели базовой двухустойчивой многопроцессорной системы является ей простота (функции представлены в виде ДНФ, они бесповторны), что позволяет увеличить число экспериментов с моделью и тем самым повысить точность расчета надежности ОМС. На практике намного чаще приходится иметь дело с небазовыми системами, которые становятся неработоспособными при возникновении некоторых p отказов, в то же время оставаясь работоспособными при других q отказах ($q > p$). Существуют различные варианты модификации GL-модели с целью отражения поведения небазовых ОМС, в частности, добавление дополнительных ребер со своими реберными функциями [3] или же изменение реберных функций с сохранением структуры графа.

Дополнительные ребра существенно усложняют модель и, следовательно, увеличивают время, необходимое для расчета надежности системы с требуемой точностью.

А поскольку для одной и той же системы можно построить различные *GL*-модели, то практический интерес представляет поиск оптимальной в этом контексте модели, т.е. модели с минимальным количеством дополнительных ребер. Очевидно, что количество дополнительных ребер напрямую зависит от числа ребер, удаляемых из графа при появлении отказов.

Достаточно распространенной является ситуация, когда необходимо обеспечить устойчивость системы ко всем комбинациям из двух отказов и некоторым комбинациям из трех отказов (вероятность одновременного отказа большего числа модулей значительно ниже). Легко увидеть, что рассматриваемая *GL*-модель базовой ОМС $K(2,n)$ при появлении любых трех отказов теряет либо 2, либо 3 ребра. Поэтому интерес представляет исследование случаев, когда из модели удаляется 2 ребра, т.е. случаев, когда возможно ограничиться только одним дополнительным ребром.

Границы и алгоритмы

В первую очередь остановимся на случаях, когда имеет смысл поиск базовой *GL*-модели, теряющей минимальное число ребер при появлении любого вектора состояния класса *S* из некоторого заданного множества.

Назовем ***верхней границей V_B*** мощность максимального множества V_{max} векторов состояния из класса *S*, для которого можно построить *f*-вектор такой, что при появлении любого вектора состояния из этого множества граф *G* теряет 2 ребра.

Доказано [4], что

$$V_B = |\, V_{max} \,| = n \cdot C^2_{]n/2[}\,.$$

Другими словами, если мощность некоторого множества *V* векторов состояния из класса *S* превышает V_B, то для любой *GL*-модели найдется вектор состояния из *V* такой, что при его появлении из данной *GL*-модели удаляются три ребра.

Нижней границей $V_н$ назовём мощность минимального множества V_{min} векторов состояния из класса *S*, для которого невозможно построить *f*-вектор такой, что при появлении любого вектора состояния, принадлежащего множеству, граф теряет 2 ребра.

Из [5] известно, что

$$V_н = |\, V_{min} \,| = \begin{cases} \frac{3}{8} \cdot n \cdot (n-2) + 1 & \text{для четных n;} \\ n-2 & \text{для нечетных n.} \end{cases}$$

Другими словами, если мощность некоторого множества векторов состояния из класса *S* меньше $V_н$, то всегда можно построить *GL*-модель, из которой удаляется два ребра при появлении любого вектора состояния их заданного множества.

Тот факт, что мощность некоторого множества векторов состояния находится в пределах между V_{min} и V_{max}, еще не дает ответа на вопрос о существовании искомой *GL*-модели. Поэтому интерес представляет определение условий, при которых для заданного множества векторов состояния класса *S* всегда можно построить такую *GL*-модель, из которой удаляется 2 ребра при появлении любого вектора состояния из заданного множества.

Решение задачи о существовании искомой *GL*-модели основывается на нижеследующих свойствах *GL*-моделей. Пусть задана конкретная *GL*-модель и соответствующее ей множество V_{max}.

Свойство 1: максимальное количество V' векторов состояния, содержащих нулевые элементы на *i*-й позиции (i = 1,…, n), ограничено значением $3 \cdot C^2_{[n/2]}$, т.е.:

$$V'_{max} = \begin{cases} \frac{3}{8} \cdot n \cdot (n-2) \text{ для четных } n; \\ \frac{3}{8} \cdot (n-1) \cdot (n-3) \text{ для нечетных } n. \end{cases}$$

Свойство 2: количество V'' векторов состояния, одновременно содержащих нулевые элементы на позициях i и j ($i = 1,\ldots, n$; $j = 1,\ldots, n$; $i \neq j$), не превышает значения $2 \cdot (]\frac{n}{2}[-1)$, т.е.:

$$V''_{max} = \begin{cases} n-2 \text{ для четных } n; \\ n-3 \text{ для нечетных } n. \end{cases}$$

Эти свойства позволяют определить, существует ли искомая GL-модель, т.е. такая, из которой удаляется 2 ребра при появлении любого вектора состояния из заданного множества V.

Процесс определения существования оптимальной в плане количества удаляемых ребер GL-модели выглядит следующим образом. Пусть есть множество V векторов состояния класса S отказоустойчивой системы $K(2,n)$. Достаточно:

1) выделить из множества V подмножества V_i, включающие в себя те векторы состояния, которые содержат нулевые элементы на i-й позиции ($i = 1, \ldots, n$);

2) для каждого множества V_i определить количество k_{ij} векторов состояния, содержащих нулевые элементы на j-й позиции ($j = 1, \ldots, n$), данные свести в таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Итоговые данные

$j \setminus i$	1	2	…	n
1	k_{11}	k_{21}	…	k_{n1}
2	k_{12}	k_{22}	…	k_{n2}
3	k_{13}	k_{23}	…	k_{n3}
…	…	…	…	…
n	k_{1n}	k_{2n}	…	k_{nn}

Сумма значений k_{ij} по каждой колонке даст значение V' для $i = 1, \ldots, n$, т.е.

$$V'_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \ .$$

Максимальное значение k_{ij} в каждой колонке даст значение V'' для $i = 1, \ldots, n$.

Выполнение условий, о которых говорилось выше

$$\begin{cases} V' \leq V'_{max}; \\ V'' \leq V''_{max}, \end{cases}$$

свидетельствует о существовании искомой GL-модели.

Для максимального множества V_{max} была решена задача построения GL-модели, удовлетворяющей требованиям оптимальности. Алгоритм нахождения соответствующего f-вектора основывается на том свойстве, что в множестве V_{max} нулевые элементы наиболее часто расположены так, что расстояние по базовому f-вектору между ними равно 1. Идея алгоритма формирования GL-модели заключается в том, чтобы в максимально возможном множестве векторов состояния, при появлении которых из GL-модели удаляются 2 ребра, найти номера двух позиций, на которых наиболее часто расположены нулевые элементы, и принять, что расстояние между соответствующими элементами базового f-вектора равно 1. Получив таким образом все пары соседних элементов базового f-вектора, можно построить и сам базовый f-вектор.

Максимум процессоров при минимуме теряемых GL-моделью ребер. При проектировании сложной системы управления разработчику часто приходится вносить какие-то изменения с целью достижения требуемого уровня надежности. При этом ему приходится учитывать много параметров, в том числе параметры, влияющие на сложность будущей модели. Примером может служить задача обеспечения устойчивости к отказам высокой кратности среди процессоров какого-то подмножества процессоров системы.

Интерес представляет определение максимального множество T_{max} процессоров в ОМС типа $K(2,n)$, отказ любых 3-х из которых приводил бы к пропаданию в соответствующей GL-модели ровно 2-х ребер.

Можно доказать (см. [6]), что:

$$|\ T_{\max}\ | =]\frac{n}{2}[+1.$$

Изменение реберных функций

Использование дополнительных ребер, несомненно, решает задачу трансформации GL-модели базовой ОМС в GL-модель небазовой, однако, такой подход в любом случае усложняет граф модели, затрудняя определение его связности, и тем самым увеличивая временные затраты на расчет надежности системы. Кроме того, задача проведения дополнительных ребер усложняется при наличии ситуации, когда некоторые векторы состояния заданного множества образуют так называемые «попарные реберные циклы».

Суть попарных реберных циклов заключается в следующем. Пусть имеются 3 вектора состояния ОМС, принадлежащие классу S. Допустим, что при появлении первого вектора состояния из графа G удаляются ребра i и j, при появлении второго вектора состояния – ребра j и k, при появлении третьего вектора состояния – ребра i и k. Ребра i, j, k составляют, таким образом, своеобразный цикл, который и будем называть попарным реберным циклом (ПРЦ). В описанном примере ПРЦ состоит из трёх ребер, хотя в общем случае ПРЦ может содержать p ребер ($2 \le p \le n$).

Дадим формальное определение ПРЦ. Попарный реберный цикл – это такая ситуация, когда при появлении каждого вектора состояния, принадлежащего некоторому множеству V, из графа G модели удаляются ребра

$$i_v \quad \text{и} \quad j_v \qquad (\text{v} = 1, \ldots, |\ V|)$$

и при этом

$$i_v\ =\ j_{\ (v+1) \bmod v}\ ,$$

где v – номер вектора состояния в заданном множестве V.

Если векторы состояния заданного множества образуют ПРЦ с нечетным количеством ребер, одного внутреннего ребра уже недостаточно для сохранения связности графа модели, следовательно, теряет смысл поиск оптимальной (в плане количества удаляемых ребер модели). Поэтому важно определить наличия ПРЦ в системе уже на первом этапе проектирования модели, для чего используются специальные алгоритмы.

Как уже упоминалось выше, альтернативой проведению дополнительных ребер для модификации нужным образом GL-модели может служить изменение её реберных функций. При этом из модели при появлении заданных отказов удаляется одно ребро, т.е. граф не теряет связность, что вообще исключает необходимость использования дополнительных ребер, не выводя граф модели из разряда циклических.

Очевидным способом сохранения связности графа при появлении заданных комбинаций из трех отказов является добавление соответствующих конституент в те функции, которые принимают значение 0 в моделях базовых ОМС [4]. Например, пусть дана система, состоящая из 7 процессоров и сохраняющая работоспособность при появлении любых комбинаций из двух отказов и одновременном отказе процессоров 1, 4 и 7.

Одним из вариантов GL-модели базовой системы может служить модель, рассмотренная в разделе «Основные определения и свойства». Заменив функцию h_1 на

$$h_1' = x_1 \vee\ x_2 x_3 x_4 \vee\ \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 x_6 \overline{x_7}$$

и функцию h_4 на

$$h_4' = x_4 \vee\ x_5 x_6 x_7 \vee\ \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 x_6 \overline{x_7}\ ,$$

мы преобразуем данную модель к модели необходимой небазовой системы.

Однако если система остается работоспособной при достаточно большом количестве комбинаций из трех отказов, такое преобразование значительно усложняет модель. Этого недостатка лишен другой способ преобразования, заключающийся в удалении из некоторых реберных функций определенных аргументов.

В ходе такого преобразования *GL*-моделей базовых ОМС $K(2,n)$, состоящих из нечетного числа модулей, возможно упрощение *GL*-модели путем удаления из одной любой функции h_i аргумента $x_{(i+\frac{n-1}{2}) \bmod n}$. Более того, можно подобрать $\frac{n-1}{2}$ функций, аналогичное изменение которых не влияет на работу *GL*-модели. Например, функции вышеуказанной модели после упрощения будут выглядеть следующим образом:

$$h_1 = x_1 \vee x_2 x_3;$$

$$h_2 = x_2 \vee x_3 x_4;$$

$$h_3 = x_3 \vee x_4 x_5;$$

$$h_4 = x_4 \vee x_5 x_6 x_7;$$

$$h_5 = x_5 \vee x_6 x_7 x_1;$$

$$h_6 = x_6 \vee x_7 x_1 x_2;$$

$$h_7 = x_7 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Отметим, что модели систем, состоящие из четного количества модулей, указанным свойством не обладают.

Изменение реберных функций, выходящее за рамки описанного упрощения, путем удаления других аргументов, приводит к тому, что граф *G* сохраняет связность при появлении некоторых комбинаций из трех отказов, т.е. происходит преобразование к модели небазовой ОМС. Так для рассматриваемой упрощенной модели удаление из функции h_4 элемента x_7 приводит к тому, что граф сохраняет связность при отказе тех же модулей 1, 4, 7, что и требовалось обеспечить. Можно доказать, что для любой двухустойчивой ОМС с нечетным числом микропроцессоров, которая остается работоспособной при появлении любого заданного вектора состояния класса *S*, существует *GL*-модель, построенная указанным образом.

Заключение

Из сказанного можно заключить, что задача построения моделей базовых 2-отказоустойчивых многопроцессорных систем в общем решена. Однако не менее важной является задача трансформации таких моделей в небазовые. Принципиальное решение таких преобразований приведено в [4], однако нам кажется более интересным в практическом смысле направление, связанное с удалением отдельных ребер и обозначенное выше в последнем разделе.

Литература

1. Романкевич О.М., Карачун Л.Ф., Романкевич В.О. До питання побудови моделі поведінки багатомодульних систем // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 1998. – № 1. – С. 38-40.

2. Романкевич А.М., Карачун Л.Ф., Романкевич В.А. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем // Электронное моделирование. – 2001. – Т. 23, № 1. – С. 102-111.

3. Романкевич А.М., Романкевич В.А., Кононова А.А., Рабах Ал Шбул. О некоторых особенностях *GL*-моделей *K*(2,n) // Вісник НТУУ “КПІ”. – 2004. – № 41. – С. 85-92.

4. Романкевич А.М., Иванов В.В., Романкевич В.А. Анализ многоустойчивых многомодульных систем со сложным распределением отказов на основе циклических *GL*-моделей // Электронное моделирование. – 2004. – Т. 26, № 5. – С. 67-81.

5. Романкевич А.М., Романкевич В.А., Кононова А.А. Граничные характеристики графо-логической модели 2-отказоустойчивой многопроцессорной системы // Вісник НТУУ “КПІ”. – 2004. – № 42. – С. 28-39.

6. Romankevich A., Romankevich V., Kononova A., Rabah Al Shbul. GL-models of K(2,n) FTMpS // Proceeding of IEEE East-West Design & Test Workshop. – 2005. – P. 88-191.

Поступила в редакцию 15.02.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.