УДК 621.391+004.73

Э.В. ФАУРЕ

Черкасский государственный технологический университет, Украина

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В работе рассматриваются статистические особенности композиций дискретных случайных величин, распределенных по биномиальному закону. В соответствии с полученными результатами моделирования определяется частота повторений векторов композиций, а также устанавливается правило вычисления плотности распределения вероятности нелинейной композиции.

преобразование, композиция, статистика, нелинейный, дискретный, случайный, биномиальный

Постановка проблемы и обзор публикаций

Задача обеспечения надежности, функциональной и информационной безопасности в настоящее время стала обязательным элементом инженерного проектирования любой технической системы, любого технического изделия. Данная работа направлена на решение задач обеспечения надежности компьютерных сетей. Показателем надежности структурно-сложной ретрансляционной сети в общем случае является многомерная функция показателей надежности каждого из ее элементов (оконечное оборудование данных, оборудование узлов в сети и каналы связи). Взаимодействие между элементами сети производится путем ретрансляции сигнала исправными промежуточными элементами сети. В [1] оценены показатели надежности для сетей различных структур. В качестве характеристики функционирования канала связи была принята вероятность его отказа. Однако, представляется целесообразным производить оценку качества канала связи в условиях постепенного изменения его характеристик, тем самым предотвращая эффект неожиданности при постепенном отказе канала (например, при постепенном росте уровня шумов в канале связи). Кроме того, такая оценка должна производиться по рабочему сигналу в канале связи. В связи с этим необходимо иметь в своем распоряжении статистические данные о нелинейных процессах взаимодействия сигнала и помехи в канале связи, нелинейных функциональных преобразованиях дискретных случайных процессов.

В работе [2] были установлены связи между линейными (арифметическими) и нелинейными (логическими) функциональными преобразованиями и определена статистика выхода некоторых комбинационных автоматов по известной статистике входа. В частности, было сформулировано общее правило вычисления плотности распределения вероятности нелинейной композиции $D_i(x)$:

$$
\begin{aligned}
D_0(x) &= \mathrm{A}(x) \cap \mathrm{B}(x);\\
D_1(x) &= \overline{\mathrm{A}}(x) \cap \mathrm{B}(x);\\
D_2(x) &= \overline{\mathrm{A}}(x) \cap \overline{\mathrm{B}}(x);\\
D_3(x) &= \mathrm{A}(x) \cap \overline{\mathrm{B}}(x);
\end{aligned} \qquad (1)
$$

$$
\begin{aligned}
D_4(x) &= \mathrm{A}(x) \oplus \mathrm{B}(x);\\
D_5(x) &= \mathrm{A}(x) \equiv \mathrm{B}(x),
\end{aligned} \qquad (2)
$$

где $\mathrm{A}(x)$ и $\mathrm{B}(x)$ – случайные вектора n-мерного пространства.

Указанное правило показывает, что число $D_i(x)$, имеющее $j \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$ ненулевых членов, т.е. веса $wt[D_i(x)] = j$ имеет частоту повторений $W(j) = 3^{n-j}$ или вероятность появления, равную

$$
\mathrm{P}[D_i(x)] = \frac{W(j)}{2^{2n}} = \frac{3^{n-j}}{2^{2n}}, \qquad (3)
$$

где n – размерность пространства.

Композиции $D_4(x)$, $D_5(x)$ по (2) имеют равномерный закон распределения.

В работе [2] анализ производился для случайных векторов $\mathrm{A}(x)$ и $\mathrm{B}(x)$ n-мерного пространства, распределенных по равновероятному закону.

Постановка задачи

Целью данной работы является рассмотрение статистических особенностей композиций дискретных случайных величин, распределенных по биномиальному закону.

Помимо композиций дискретных случайных величин, указанных в (1) и (2), также необходимо рассмотреть статистические особенности таких нелинейных функциональных преобразований:

$$\begin{aligned} D_6(x) &= \mathrm{A}(x) \cup \mathrm{B}(x); \\ D_7(x) &= \overline{\mathrm{A}}(x) \cup \mathrm{B}(x); \\ D_8(x) &= \overline{\mathrm{A}}(x) \cup \overline{\mathrm{B}}(x); \\ D_9(x) &= \mathrm{A}(x) \cup \overline{\mathrm{B}}(x). \end{aligned} \qquad (4)$$

Решение задачи

Прежде всего, следует отметить, что в соответствии с биномиальным законом распределения дискретных случайных величин [3, 4] $\mathrm{A}(x)$ и $\mathrm{B}(x)$ вероятность появления какого-либо из векторов дискретной случайной величины $M(x)$ веса $\mathrm{wt}(M(x)) = j$ будет равна:

$$P(j) = C_n^j p^j q^{n-j} \qquad (5)$$

где p – вероятность появления «1» в векторе $M(x)$.

Гистограмма распределения вероятности появления вектора веса $\mathrm{wt}(M(x)) = j$ дискретной случайной величины $M(x)$, распределенной по биномиальному закону, для вероятностей появления «1» $p = 0{,}1$ и $p = 0{,}2$ и размерности пространства $n = 3$ показана на рис. 1.

Вероятность появления одного из векторов дискретной случайной величины $M(x)$ веса $\mathrm{wt}(M(x)) = j$ равна:

$$P(j) = p^j q^{n-j}. \qquad (6)$$

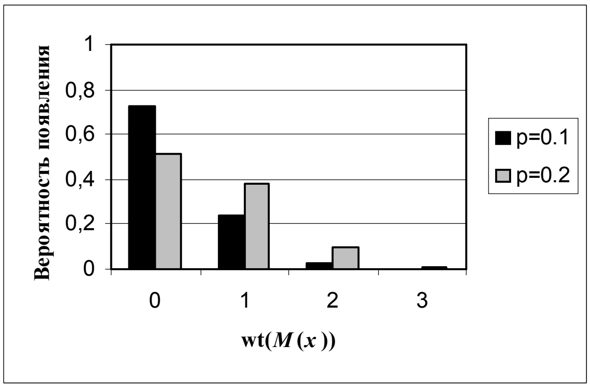

Рис. 1. Вероятность появления вектора как функция веса $M(x)$

Гистограмма распределения вероятности появления вектора дискретной случайной величины $M(x)$, распределенной по биномиальному закону, для вероятностей появления «1» $p = 0{,}1$ и $p = 0{,}2$ и размерности пространства $n = 3$ показана на рис. 2.

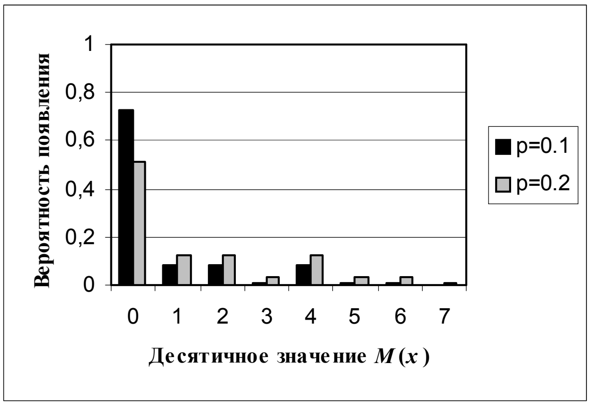

Рис. 2. Вероятность появления вектора $M(x)$ для $n = 3$

Примем, что вероятности появления «1» в векторах $A(x)$ и $B(x)$ будут равны:

$$\begin{aligned} p_1(A) &= p_1 = \frac{m_1}{n_1}; \\ p_1(B) &= p_2 = \frac{m_2}{n_2}, \end{aligned} \qquad (7)$$

где m_1, n_1, m_2, n_2 – некоторые целые неотрицательные числа, причем

$$\begin{cases} m_1 \le n_1; \\ m_2 \le n_2. \end{cases}$$

Для получения статистических данных о композициях дискретных случайных процессов была построена модель. На вход системы подавались случайные величины, распределенные по биномиальному закону. Модель реализовывала одно из нелинейных функциональных преобразований, приведенных в (1), (2) и (4).

Не ограничивая общности, был проведен анализ для таких значений:

$$n = 3,\quad p_1 = \frac{1}{10},\ p_2 = \frac{1}{5}.$$

По результатам моделирования определены значения частоты $F[D_i(x)]$, $i = 0, 1, \ldots, 9$ при различных значениях "x", которые показаны в табл. 1.

В качестве частоты $F[D_i(x)]$ было принято количество повторений каждого из векторов $D_i(x)$ в полном переборе. Общее количество векторов в полном переборе составляет $(5\cdot 10)^3 = 12{,}5\cdot 10^4$.

Анализ полученного результата может быть существенно упрощен, если определить зависимость распределения частоты $F[D_i(x)]$ от веса вектора $D_i(x)$. Тогда гистограмма распределения частоты $F[D_i(x)]$ есть весовой спектр пересечений, который принимает вид, приведенный на рис. 3 – 12.

Гистограммы на рис. 3 – 12 показывают, что распределение частоты $F[D_i(x)]$ как функция веса имеет вид ступенчатой убывающей кривой, огибающая которой распределена по показательному закону:

Таблица 1

Частота повторения значений композиций, выраженная в процентном соотношении

Десятичное значение $D_i(x)$	Композиция				
	$\boldsymbol{D_0(x)}$	$\boldsymbol{D_1(x)}$	$\boldsymbol{D_2(x)}$	$\boldsymbol{D_3(x)}$	$\boldsymbol{D_4(x)}$
0	94,1192	77,8688	55,1368	2,1952	40,5224
1	1,9208	6,7712	12,1032	5,6448	14,2376
2	1,9208	6,7712	12,1032	5,6448	14,2376
3	0,0392	0,5888	2,6568	14,5152	5,0024
4	1,9208	6,7712	12,1032	5,6448	14,2376
5	0,0392	0,5888	2,6568	14,5152	5,0024
6	0,0392	0,5888	2,6568	14,5152	5,0024
7	0,0008	0,0512	0,5832	37,3248	1,7576
	Композиция				
	$\boldsymbol{D_5(x)}$	$\boldsymbol{D_6(x)}$	$\boldsymbol{D_7(x)}$	$\boldsymbol{D_8(x)}$	$\boldsymbol{D_9(x)}$
0	1,7576	37,3248	0,5832	0,0512	0,0008
1	5,0024	14,5152	2,6568	0,5888	0,0392
2	5,0024	14,5152	2,6568	0,5888	0,0392
3	14,2376	5,6448	12,1032	6,7712	1,9208
4	5,0024	14,5152	2,6568	0,5888	0,0392
5	14,2376	5,6448	12,1032	6,7712	1,9208
6	14,2376	5,6448	12,1032	6,7712	1,9208
7	40,5224	2,1952	55,1368	77,8688	94,1192

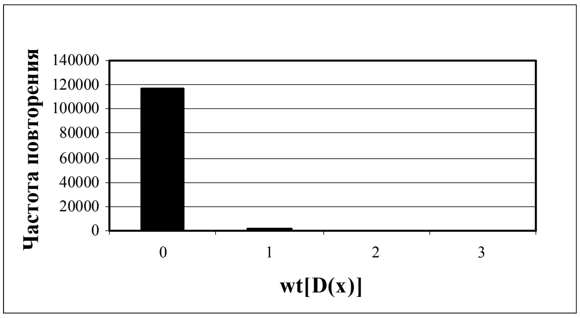

Рис. 3. Частота повторения
как функция веса $D_0(x)$

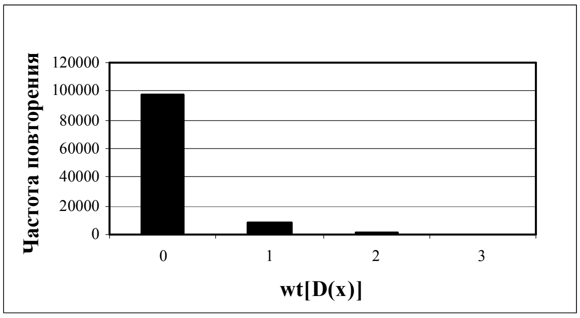

Рис. 4. Частота повторения
как функция веса $D_1(x)$

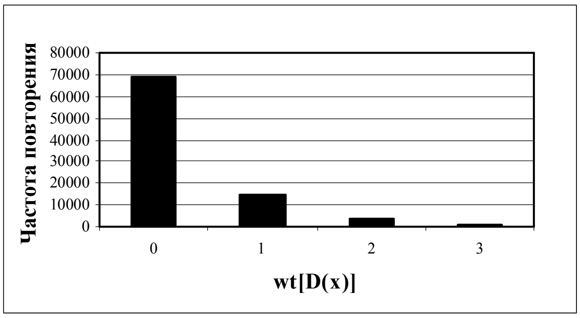

Рис. 5. Частота повторения
как функция веса $D_2(x)$

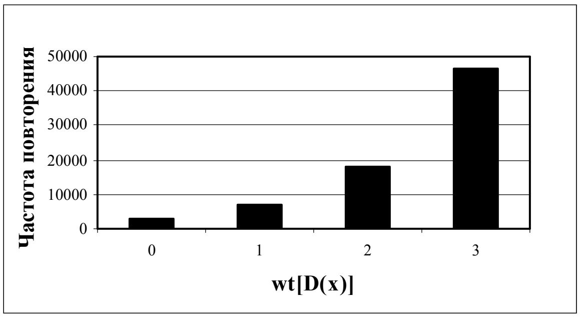

Рис. 6. Частота повторения
как функция веса $D_3(x)$

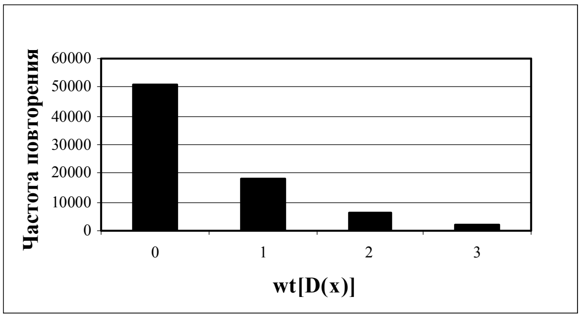

Рис. 7. Частота повторения
как функция веса $D_4(x)$

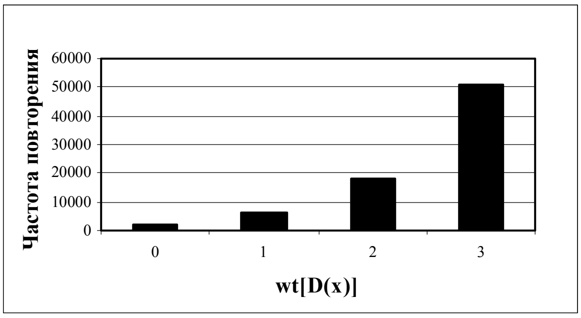

Рис. 8. Частота повторения
как функция веса $D_5(x)$

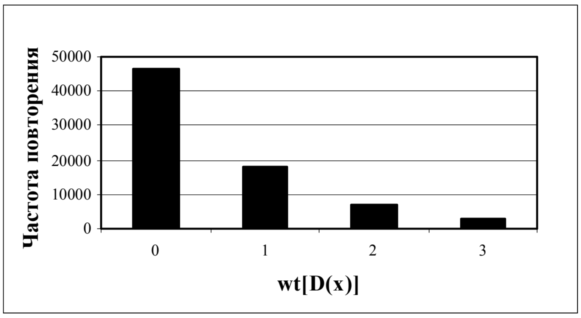

Рис. 9. Частота повторения
как функция веса $D_6(x)$

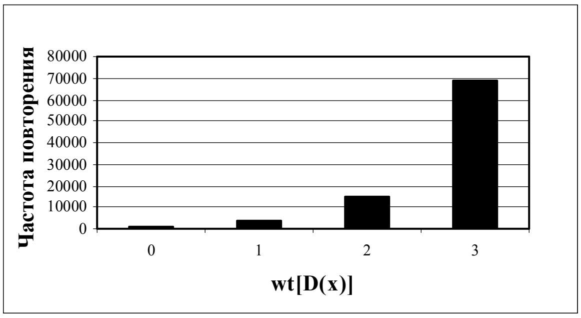

Рис. 10. Частота повторения
как функция веса $D_7(x)$

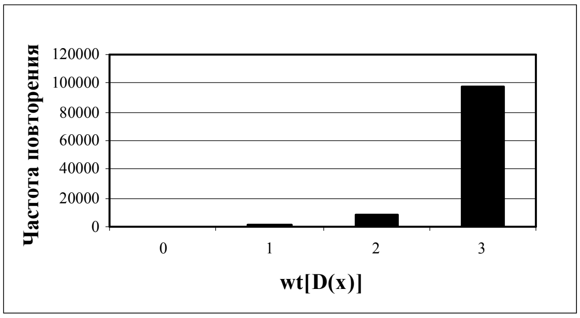

Рис. 11. Частота повторения как функция веса $D_8(x)$

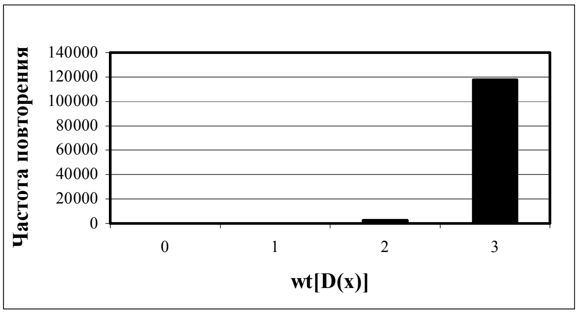

Рис. 12. Частота повторения как функция веса $D_9(x)$

$$
\begin{aligned}
&D_0(x): W(j) = (m_1 m_2)^j (n_1 n_2 - m_1 m_2)^{n-j};\\
&D_1(x): W(j) = m_1^j (n_2 - m_2)^j (n_1 n_2 - m_1(n_2 - m_2))^{n-j};\\
&D_2(x): W(j) = m_2^j (n_1 - m_1)^j (n_1 n_2 - m_2(n_1 - m_1))^{n-j};\\
&D_3(x): W(j) = (n_1 - m_1)^j (n_2 - m_2)^j (n_1 m_2 + n_2 m_1 - m_1 m_2)^{n-j};\\
&D_4(x): W(j) = (m_1(n_2 - m_2) + m_2(n_1 - m_1))^j ((n_1 - m_1)(n_2 - m_2) + m_1 m_2)^{n-j};\\
&D_5(x): W(j) = (m_1(n_2 - m_2) + m_2(n_1 - m_1))^{n-j} ((n_1 - m_1)(n_2 - m_2) + m_1 m_2)^j;\\
&D_6(x): W(j) = (n_1 - m_1)^{n-j} (n_2 - m_2)^{n-j} (n_1 m_2 + n_2 m_1 - m_1 m_2)^j;\\
&D_7(x): W(j) = m_2^{n-j} (n_1 - m_1)^{n-j} (n_1 n_2 - m_2(n_1 - m_1))^j;\\
&D_8(x): W(j) = m_1^{n-j} (n_2 - m_2)^{n-j} (n_1 n_2 - m_1(n_2 - m_2))^j;\\
&D_9(x): W(j) = (m_1 m_2)^{n-j} (n_1 n_2 - m_1 m_2)^j.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

В соответствии с полученными результатами моделирования в (8) определена в аналитическом виде частота повторений векторов $D_i(x)$ как функция веса.

Частоту повторений векторов $D_i(x)$, $i = 6, ..., 9$ можно также определить исходя из закона де Моргана, где

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \overline{\overline{A} \cup \overline{B}};\\
A \cap \overline{B} &= \overline{\overline{A} \cup B};\\
\overline{A} \cap B &= \overline{A \cup \overline{B}};\\
\overline{A} \cap \overline{B} &= \overline{A \cup B}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Законы распределения частоты повторений для пар $D_6(x) - D_3(x)$, $D_7(x) - D_2(x)$, $D_8(x) - D_1(x)$, $D_9(x) - D_0(x)$ подтверждаются указанным законом.

Частота повторения для одной из композиций пары для веса вектора, равного j, равна частоте повторения для другой из композиций пары для веса вектора, равного $n - j$, т.е.:

$$
\begin{aligned}
W_{D_6}(j) &= W_{D_3}(n - j);\\
W_{D_7}(j) &= W_{D_2}(n - j);\\
W_{D_8}(j) &= W_{D_1}(n - j);\\
W_{D_9}(j) &= W_{D_0}(n - j).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Такая закономерность позволяет сформулировать общее правило вычисления плотности распределения вероятности нелинейной композиции $D_i(x)$, перечисленной в (1), (2), (4) при любой разрядности случайных векторов. Вероятность появления вектора веса j в композиции $D_i(x)$ равна:

$$
\mathrm{P}[D_i(x)] = \frac{W(j)}{V}, \tag{11}
$$

где

$$
V = (n_1 n_2)^n. \tag{12}
$$

Число векторов $D_i(x)$ веса «j» равно

$$N(j) = C_n^j . \qquad (13)$$

Как можно видеть из полученных результатов, законы распределения композиций векторов $A(x)$ и $B(x)$ для равномерного закона распределения этих векторов являются частным случаем законов распределения композиций векторов $A(x)$ и $B(x)$ для биномиального закона. Для этого следует в качестве вероятностей появления «1» в векторах $A(x)$ и $B(x)$ принять:

$$p_1(A) = p_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{2};\ p_1(B) = p_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{1}{2}.$$

Выводы

Полученные результаты совместно с результатами из [2] позволяют оценивать статистические особенности нелинейных композиций, приведенных в формулах (1), (2), (4).

Операнды данных композиций – дискретные случайные величины $A(x)$ и $B(x)$ – могут быть распределены как по равномерному закону, так и по биномиальному.

К тому же, не исключается возможность одновременного распределения операндов по различным из перечисленных законов.

Это позволяет решить часть задач оценки качественных характеристик канала связи в условиях нелинейного взаимодействия сигнала и помехи по демодулированному сигналу данных (векторной смеси сигнала и помехи).

Необходимостью дальнейшего исследования в данной области является изучение статистических свойств нелинейных функциональных преобразований дискретных случайных процессов, распределенных по законам, отличных от равномерного и биномиального, например, экспоненциального, Пуассона, гипергеометрического и т.д.

Литература

1. Надежность технических систем: Справочник / Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.; Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.

2. Митянкина Т.В., Швыдкий В.В., Фауре Э.В. Преобразование дискретного случайного процесса комбинационным автоматом // Вісник ЧДТУ. – 2004. – № 3. – С. 67-69.

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – 499 с.

4. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Сов. радио, 1974. – 432 с.

Поступила в редакцию 24.02.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.Ф. Кривуля, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.