УДК 62.501.7

В.Н. КРАСНИКОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Предложен метод вычисления спектральной плотности, основанный на простом способе аппроксимации эмпирической корреляционной функции, показана возможность его осуществления на простом примере.

функция корреляции, математическая ожидание, точность аппроксимации, многочлены, степенные моменты, ортонормированная система

Введение

При исследовании случайных процессов в системах автоматического управления и решении многих практических задач радиотехнических измерений удобно пользоваться спектральными плотностями этих процессов. Однако непосредственно из экспериментальных данных гораздо проще получить корреляционные функции, а не спектральные плотности.

Поэтому весьма важной является задача определения спектральной плотности по корреляционной функции. Ограничимся при этом рассмотрением стационарного случая.

Согласно теореме А.Я. Хинчина функция корреляции $R(\tau)$ может быть представлена в виде

$$M\left[X(t)X(t+\tau)\right] = R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} dF(\omega),$$

где M – операция математического ожидания;

$X(t)$ – случайная функция; $F(\omega)$ – неубывающая ограниченная функция.

Если функция $F(\omega)$ дифференцируема, то обозначая

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2} G(\omega)$$

получим

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

так что $G(\omega)$ есть преобразование Фурье для $R(\tau)$:

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \qquad (1)$$

Функция $G(\omega)$ и есть спектральная плотность стационарного случайного процесса. При этом корреляционная функция $R(\tau)$ и спектральная плотность $G(\omega)$ стационарного случайного процесса обладают всеми свойствами, характерными для пары преобразований Фурье (в частности, чем шире спектр $G(\omega)$, тем уже корреляционная функция $R(\tau)$, и наоборот).

Постановка задачи

Оценка спектра случайного процесса непременно связана с операцией усреднения. Для эргодических стационарных процессов средние по множеству и по времени с вероятностью единица равны. Выбор усреднения определяется тем, как задан случайный процесс. В условиях эксперимента обычно имеют отдельную реализацию (выборку) и используют усреднение по времени (при теоретическом исследовании процесс задается распределением вероятностей, и тогда используют усреднение по множеству).

Для определения корреляционной функции $R(\tau)$ удобно предварительно центрировать реализацию $X(t)$, т.е.

$$\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_x \text{, где } m_x \approx \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt . \quad (2)$$

Поскольку для фиксированного τ всегда $t+\tau \le T$, то можно учитывать не весь интервал T и тогда

$$M\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t+\tau)\right] = R(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau}\times$$

$$\times \int_0^{T-\tau} \overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t+\tau)\,d\tau. \quad (3)$$

Вычисляя интеграл (3) для ряда значений τ, можно приближенно воспроизвести всю корреляционную функцию.

На практике интегралы (2), (3) заменяют конечными суммами

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i),$$

$$\tau = m\Delta t = \frac{mT}{n} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, ..., m\Delta t\}.$$

Тогда в (3)

$$T - \tau = T - \frac{mT}{n} = \frac{n-m}{n}T,$$

и в итоге получаем

$$R(\tau) = \rho\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m} \overset{0}{X}(t_i)\overset{0}{X}(t_{i+m}),$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

В системе координат $\tau\rho$ по оси τ откладываем $(n-m)$ участков длины Δt, а по оси ρ – значения функции $\rho(\tau)$. В результате будет построена некоторая ломаная, по которой, в принципе, можно определить искомый спектр $G(\omega)$.

Для аппроксимации эмпирической корреляционной функции $\rho(\tau)$ чаще всего используют типовые корреляционные функции, например:

– треугольные, определяемые двумя параметрами R_0 и T_0, так что

$$R_0(\tau) = \begin{cases} R_0\left(1 + \dfrac{\tau}{T}\right), 0 \le \tau \le T; \\ 0, \qquad\qquad \tau \ge T, \end{cases}$$

а корреляционная функция $\rho(\tau)$ может быть представлена в виде линейной комбинации некоторого числа этих типовых треугольных корреляционных функций;

– экспоненциальные, позволяющие так же представить эмпирическую корреляционную функцию в виде

$$\rho(\tau) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\alpha_k|\tau|},$$

где a_k – коэффициенты, выбираемые из условия нормировки и ортогональности; α_k – положительные показатели, n – число слагаемых [1].

Решение задачи оценки спектральной плотности случайного процесса

Вычисление спектральной плотности при помощи указанных выше типовых корреляционных функций может быть иногда целесообразным, однако даже при достаточно точном «экспоненциальном» подходе очевиден недостаток, заключающийся в том, что число членов n, необходимых для обеспечения приемлемой точности аппроксимации, оказывается значительным. Следует так же отметить, что количество членов разложения в значительной степени зависит от правильности выбора параметра α.

По этой причине предлагается простой и естественный способ аппроксимации эмпирической функции $R(\tau)$ в виде

$$\rho(\tau) = P(\tau)e^{-\tau^2},$$

где $P(\tau)$ – многочлен невысокой степени $P(\tau) = \sum_{k=0}^{N} a_k \tau^k$; $N = \deg P(\tau)$, который разыскивается из условия наименьшего уклонения функции

$\rho(\tau)$ от функции $R(\tau)$ в метрике пространства L^2 функций, заданных на системе точек $\tau = \{0, \Delta t, 2\Delta t, ...\}$, с использованием системы дискретных многочленов Эрмита. Такой теоретико-функциональный подход существенно упрощает вычислительные процедуры и позволяет избежать накопления погрешностей при использовании классических вариантов метода наименьших квадратов. Отметим, что возможные дополнительные физические соображения заставляют искать функцию $\rho(\tau)$ в модифицированном виде

$$\rho(\tau) = P(\tau) e^{-\alpha\tau^2}.$$

Этот вариант простой заменой переменных сводится к случаю, когда $\alpha = 1$.

Оценка спектра $G(\omega)$ при таким образом выбранной функции $R(\tau)$ легко вычисляется

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) \cdot e^{-\alpha\tau^2} \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \cdot e^{-\alpha\tau^2} \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{см. в } [2], \text{ стр. } 352.3 \\ \text{ИПІ } 121\ (23) \text{ при } \beta=1,\ q=\omega,\ x=\tau \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{8}\right) \sum_{k=0}^{N} a_k \left(j\sqrt{2}\right)^{-2} D_k\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right),$$

где $D_k(\bullet)$ – функции параболического цилиндра (см. в [2], 9.251 УВІІ 157, либо 9.253 МО 123u через полиномы Эрмита).

В дополнение изложенному, покажем возможность осуществления предложенного способа аппроксимации эмпирической корреляционной функции.

В линейном пространстве дискретно заданных функций на системе точек $\{0, h, 2h, ..., mh\}$, где $h = \Delta t$, введем скалярное произведение элементов этого пространства

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{m} f(kh) g(kh) e^{-k^2h^2}.$$

Система многочленов $1, t, ..., t^m$ образует базис этого пространства. Понятно, что удобнее работать с ортогонализированной системой, первые три элемента которой производим ниже:

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{S_0}},$$

$$P_1(t) = A_1\left(t - \frac{hS_1}{S_0}\right),$$

$$P_2(t) = A_2\left(t^2 + b_2 t + C_2\right), \qquad (4)$$

где

$$A_1 = \left(S_2 - \frac{2hS_1^2}{S_0}\right)^{-1/2};\ b_2 = \frac{(1-h)S_1S_2 - hS_1 - S_0S_3}{S_0S_2 - S_1^2};$$

$$C_2 = -\frac{1}{S_0}\left(S_2 + b_2S_1\right);$$

$$A_2 = \left[S_4 + 2b_2S_3 + \left(b_2^2 + 2C_2\right)S_2 + 2b_2C_2S_1 + C_2^2S_0\right]^{-1};$$

а $S_0 = \sum_{k=0}^{m} e^{-k^2h^2}$, $S_1 = \sum_{k=0}^{m} hke^{-k^2h^2}$, и т.д. – степенные моменты.

Несложно построить дальнейшие элементы ортонормированной системы $P_3(t)$, $P_4(t)$, … исходя из условий ортогональности. Опираясь на общую схему построения систем ортогональных многочленов, дадим формулы, охватывающие общий случай.

При помощи последовательности моментов $S_0, S_1, S_2, ...$ введем определитель Ганкеля [3]:

$$D_n := \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_n \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{2n} \end{vmatrix}, n = 0, 1, ...; D_{-1} := 1,$$

и многочлен

$$P_n(t) := \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} \cdot D_n}} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_n \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \cdots & S_{2n-1} \\ 1 & t & \cdots & t^n \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Например,

$$P_3(t) = \left(\begin{vmatrix} S_0 S_1 S_2 \\ S_1 S_2 S_3 \\ S_2 S_3 S_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 S_1 S_2 S_3 \\ S_1 S_2 S_3 S_4 \\ S_2 S_3 S_4 S_5 \\ S_3 S_4 S_5 S_6 \end{vmatrix} \right)^{-1/2} \cdot \begin{vmatrix} S_0 S_1 S_2 S_3 \\ S_1 S_2 S_3 S_4 \\ S_2 S_3 S_4 S_5 \\ 1 \quad t \quad t^2 t^3 \end{vmatrix}.$$

Раскрывать определитель удобнее после предварительного вычисления моментов S_k при конкретных исходных данных h и m, т.е. при определенных значениях числа отсчетов корреляционной функции m и величин интервалов h, на которых получают каждый отсчет.

Формулы (4) получены из (5). Ниже для частного случая h=1 и m=10 приведены конкретные значения для $P_0(t)$, $P_1(t)$ и $P_2(t)$:

$S_0 = 1,386318601; S_1 = 0,404881399; S_2 = 0,442254486;$
$S_3 = 0,517743821; S_4 = 0,640954675;$

$$D_0 = S_0; \quad D_1 = \begin{vmatrix} S_0 S_1 \\ S_1 S_2 \end{vmatrix} = 0,449176674;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} S_0 S_1 S_2 \\ S_1 S_2 S_3 \\ S_2 S_3 S_4 \end{vmatrix} = 0,028677405;$$

$P_0(t) = 0,721334907;$

$P_1(t) = 1,756802448t - 0,513083090;$

$P_2(t) = 3,957661777t^2 - 4,766421040t + 0,123668481.$

Опираясь на известные факты из теории ортогональных рядов, можно написать следующее приближенное равенство

$$\left. \begin{array}{l} \rho(t) \approx \sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu P_\nu(t) e^{-t^2/2}, n < m \\ \text{переходящее в} \\ \rho(t) = e^{-t^2/2} \sum\limits_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu P_\nu(t) \end{array} \right\} \qquad (6)$$

при условии, что функция $\rho(t)$ задана лишь в точках множества $\{0, h, 2h, ..., mh\}$.

Здесь

$$\alpha_k = (\rho(\tau), P_\nu(t)) = \sum_{\nu=0}^{m} \rho(\nu h) P_k(\nu h) e^{-\nu^2 h^2/2}.$$

И последнее, остается открытым вопрос о величине погрешности предложенной аппроксимации.

Величина погрешности соотношения (6) в смысле введенного пространства вычисляется по формуле Парсеваля:

$$\delta^2 = \sum_{\nu=0}^{m} [\rho(\nu h)]^2 e^{-\nu^2 h^2/2} - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2.$$

Заключение

Предложенный подход позволяет избежать накопления погрешностей при использовании метода наименьших квадратов для приближения корреляционной функции, заданной в виде суммы экспоненциальных функций, при этом используется минимальное число членов разложения и многочлен невысокой степени, что и показывают вычисления приведенного в работе примера.

Литература

1. Ливщиц Н.А., Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Т. 1. – М.: Сов. радио, 1963. – 887 с.

2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1101 с.

3. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 310 с.

Поступила в редакцию 29.05.2007

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.