УДК 519.65.652

Р.Н. КВЄТНИЙ, М.О. МАШНИЦЬКИЙ

Вінницький національний технічний університет, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ТРЬОХВИМІРНИХ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ МОДИФІКАЦІЇ РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ НЬЮТОНА

В даній статті розроблено метод моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Ньютона. Розглянуто приклад використання розробленого методу.

моделювання, трьохвимірні поверхні, інтерполяція, метод Ньютона

Актуальність. Постановка задачі

Моделювання трьохвимірних поверхонь є достатньо актуальною задачею. Стрімкий розвиток електроніки та техніки призвів до необхідності дослідження ефективності розроблених пристроїв, яка залежить від їх координат, наприклад, зміна вологості в кімнаті від розташування розробленого кондиціонера. При дослідженні об'єкта, який описується функцією трьох змінних, постає задача ідентифікації їх математичних моделей.

Для вирішення цієї задачі саме потрібно застосовувати математичне моделювання, яке об'єднує експеримент та теорію і використовується в наступних галузях медицина, космічні дослідження, геофізики. Це значно розширює області впровадження результатів досліджень, крім традиційної комп'ютерної графіки.

Одним з найпоширеніших методів моделювання функцій є інтерполяційний метод Ньютона. На даний час алгоритм методу Ньютона розроблений лише для функцій двох змінних. В цій статі пропонується модифікація метода Ньютона для моделювання трьохвимірних поверхонь.

Задача моделювання трьохвимірних поверхонь на основі інтерполяції функції полягає в побудові функції $F(x,y,z)$, яка приймає в деяких точках x_i, y_j, z_k $(i,j,k=\overline{0,n})$, які називаються вузлами інтерполювання, окремі значення $F(x_0,y_0,z_0)=\varphi_{000}$, $F(x_1,y_1,z_1)=\varphi_{111}$, …, $F(x_n,y_n,z_n)=\varphi_{nnn}$. В загальному випадку інтерполяція функція зводиться до знаходження її нетабличних значень [1 – 4].

Задачі моделювання трьохвимірної поверхні необхідно розв'язувати, коли отримують зображення, в задачах різного типу діагностувань, топографії та багатьох інших галузях. На даний момент в цій галузі проводиться активна дослідницька робота провідних компаній з виробництва графічних прискорювачів та компаній з виготовлення програмного забезпечення для тривимірного моделювання та спеціальних ефектів.

Метою статті є підвищення ефективності моделювання шляхом розширення класичних методів на випадок трьох змінних.

Описання методу

Нехай для функції $\varphi = f(x,y,z)$ задані значення $\varphi_{ijk} = f(x_i, y_j, z_k)$ для рівновіддалених значень незалежних змінних $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jh$ та $z_k = x_0 + kh$, де $(i,j,k=\overline{1..n})$; h – крок інтерполювання.

При використанні поліноміальних методів, згідно з постановкою інтерполяції формули Ньютона, необхідно підібрати поліном $P_n(x_i, y_j, z_k)$ ступеня не вище $(n-1)^2$, який у точках (x_i, y_j, z_k) приймає конкретні значення φ.

Для функції $\varphi = f(x, y, z)$, заданої трьохвимірною таблицею $\{\varphi_{ijk}\}$, можна визначити частині кінцеві різниці:

$$\Delta_x \varphi_{ijk} = \varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{ijk};$$

$$\Delta_y \varphi_{ijk} = \varphi_{i,j+1,k} - \varphi_{ijk};$$

$$\Delta_z \varphi_{ijk} = \varphi_{i,j,k+1} - \varphi_{ijk}.$$

Повторно застосовуючи ці операції, одержимо подвійні різниці вищих порядків:

$$\Delta^{m+n+c}\varphi_{ijk} = \Delta^{m+n+c}_{x^m y^n z^c}\varphi_{ijk} = \Delta^m_{x^m}\left(\Delta^n_{y^n}\left(\Delta^c_{z^c}\varphi_{ijk}\right)\right).$$

Зауважимо, що $\Delta^{0+0+0}\varphi_{ijk} = \varphi_{ijk}$.

На основі різниці функції трьох змінних $\varphi = f(x, y, z)$ можна побудувати інтерполяційний поліном, аналогічний інтерполяційному поліному Ньютона. Нехай $P_n(x, y, z)$ – цілий поліном такий, що

$$\Delta^{m+n+c}_{x^m y^n z^c} P(x_0, y_0, z_0) = \Delta^{m+n+c}\varphi_{ijk}, \qquad (1)$$

($m, n, c = \overline{1..n}$).Припустимо, що $P_n(x, y, z)$ розкладений по узагальнених степенях різниць $x - x_0$, $y - y_0$ та $z - z_0$, тобто:

$$\begin{aligned} P_n(x, y, z) &= C_{000} + C_{100}(x - x_0) + C_{010} \times \\ &\times (y - y_0) + C_{001}(z - z_0) + C_{200}(x - x_0)\times \\ &\times (x - x_1) + C_{110}(x - x_0)(y - y_0) + C_{101} \times \\ &\times (x - x_0)(z - z_0) + C_{011}(y - y_0)(z - z_0) + \\ &+ C_{020}(y - y_0)(y - y_1) + C_{002}(z - z_0)\times \\ &\times (z - z_1) + C_{300}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ &+ C_{030}(y - y_0)(y - y_1)(x - x_2) + C_{003} \times \\ &\times (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) + C_{210}(x - x_0)\times \\ &\times (x - x_1)(y - y_0) + C_{201}(x - x_0)(x - x_1)\times \\ &\times (z - z_0) + C_{120}(x - x_0)(y - y_0)(y - y_1) + \\ &+ C_{021}(y - y_0)(y - y_1)(z - z_0) + C_{102}(x - x_0)\times \\ &\times (z - z_0)(z - z_1) + C_{012}(y - y_0)(z - z_0)\times \\ &\times (z - z_1) + C_{111}(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0) + \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

Визначимо коефіцієнти C_{ijk} ($i, j, k = \overline{1..n}$) полінома $P_n(x, y, z)$. Нехай $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, тоді на основі формули (1) отримаємо вираз: $P(x_0, y_0, z_0) = \varphi_{000} = C_{000}$.

Складемо першу кінцеву різницю на основі формули (1):

$$\begin{aligned} \Delta_x P(x, y, z) &= C_{100} + 2\,C_{200}h_x(x - x_0) + \\ & C_{110}h_x(y - y_0) + \ldots \end{aligned}$$

$$\Delta_y P(x, y, z) = C_{010}h_y + C_{110}h_y(x - x_0) + \ldots$$

$$\Delta_z P(x, y, z) = C_{001}h_z + C_{101}h_z(x - x_0) + \ldots$$

Звідси, якщо припустити, що $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ та застосувати формулу (1), тоді отримаємо вираз: $\Delta_x P(x_0.y_0, z_0) = \Delta^{1+0+0}\varphi_{000} = C_{100}h_x$, $\Delta_y P(x_0.y_0, z_0) = \Delta^{0+1+0}\varphi_{000} = C_{010}h_y$, тобто

$$C_{100} = \frac{\Delta^{1+0+0}\varphi_{000}}{h_x}, \quad C_{010} = \frac{\Delta^{0+1+0}\varphi_{000}}{h_y}.$$

Складемо кінцеву різницю другого порядку:

$$\Delta_{xx}P(x.y, z) = 2!C_{200}h_x^2 + \ldots,$$

$$\Delta_{yy}P(x.y, z) = 2!C_{020}h_y^2 + \ldots$$

$$\Delta_{xy}P(x.y, z) = C_{110}h_x h_y + \ldots.$$

Аналогічно робимо перетворення, як для першого порядку, отримаємо вираз:

$$\Delta_{xx}P(x_0.y_0, z_0) = \Delta^{2+0+0}\varphi_{000} = 2!C_{200}h_x^2 + \ldots,$$

$$\Delta_{yy}P(x_0.y_0, z_0) = \Delta^{0+2+0}\varphi_{000} = 2!C_{020}h_y^2 + \ldots,$$

$$\Delta_{xy}P(x_0.y_0, z_0) = \Delta^{1+1+0}\varphi_{000} = C_{110}h_x h_y + \ldots,$$

тобто $C_{200} = \dfrac{\Delta^{2+0+0}\varphi_{000}}{2!h_x^2}$, $C_{020} = \dfrac{\Delta^{0+2+0}\varphi_{000}}{2!h_y^2}$,

$$C_{110} = \frac{\Delta^{1+1+0}\varphi_{000}}{h_x h_y}.$$

Для зручності обчислення введемо змінні: $p = \dfrac{(x - x_0)}{h_x}$, $q = \dfrac{y - y_0}{h_y}$, $r = \dfrac{z - z_0}{h_z}$, тоді:

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}(y-y_0)^{[j]}(z-z_0)^{[k]}}{h_x^j \cdot h_y^j \cdot h_z^k} =$$
$$\frac{(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)}{h_x \cdot h_y \cdot h_z} \times$$
$$\times \frac{(x-x_0-h_x)(y-y_0-h_x)(z-z_0-h_x)}{h_x \cdot h_y \cdot h_z} \cdot .... \times$$
$$\times \frac{(x-x_0-(i-1)\cdot h_x)\cdot(y-y_0-(j-1)\cdot h_y)\times}{h_x \cdot h_y \cdot h_z}$$
$$\frac{\times(z-z_0-(k-1)\cdot h_z)}{} = pqr(p-1)(q-1)(r-1)\times$$
$$\times(p-2)(q-2)(r-2)...(p-i+1)(q-j+1)\times$$
$$\times(r-k+1);$$

де $i, j, k = \overline{1..n}$.

Звідси формула (2) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} P_n(x,y,z) &= \varphi_{000} + p\Delta^{1+0+0}\varphi_{000} + q\times \\ &\times\Delta^{0+1+0}\varphi_{000} + r\Delta^{0+0+1}\varphi_{000} + \frac{1}{2!}\big[p(p-1)\times \\ &\times\Delta^{2+0+0}\varphi_{000} + 2pq\Delta^{1+1+0}\varphi_{000} + 2pr\times \\ &\times\Delta^{1+0+1}\varphi_{000} + 2qr\Delta^{0+1+1}\varphi_{000} + q(q-1)\times \\ &\times\Delta^{0+2+0}\varphi_{000} + r(r-1)\Delta^{0+0+2}\varphi_{000}\big] + \\ &+\frac{1}{3!}\big[p(p-1)(p-2)\Delta^{3+0+0}\varphi_{000} + \\ &+q(q-1)(q-2)\Delta^{0+3+0}\varphi_{000} + r(r-1)\times \\ &\times(r-2)\Delta^{0+0+3}\varphi_{000} + 3p(p-1)q\times \\ &\times\Delta^{2+1+0}\varphi_{000} + 3p(p-1)r\Delta^{2+0+1}\varphi_{000} + \\ &+3pq(q-1)\Delta^{1+2+0}\varphi_{000} + q(q-1)r\times \\ &\times\Delta^{0+2+1}\varphi_{000} + 3pr(r-1)\Delta^{1+0+2}\varphi_{000} + \\ &+3qr(r-1)\Delta^{0+1+2}\varphi_{000} + 6pqr\Delta^{1+1+1}\varphi_{000}\big] + ..., \end{aligned} \tag{3}$$

де $p = \frac{(x-x_0)}{h_x}$ – число кроків, які необхідні для досягнення точки x, виходячи з точки x_0; $q = \frac{(y-y_0)}{h_y}$ – число кроків, які необхідні для досягнення точки y, виходячи з точки y_0; $r = \frac{(z-z_0)}{h_z}$ – число кроків, які необхідні для досягнення точки z, виходячи з точки z_0.

Введемо означення узагальненого ступеня для функцій трьох змінних. Узагальненим ступенем чисел p, q та r будемо називати добуток n множників, перший з яких дорівнює p, q та r відповідно, а кожний з наступних на 1 менше попереднього:

$$\begin{aligned} p^{[n]} &= p(p-1)(p-2)...(p-n+1); \\ q^{[n]} &= q(q-1)(q-2)...(q-n+1); \\ r^{[n]} &= r(r-1)(r-2)...(r-n+1). \end{aligned} \tag{4}$$

Якщо застосувати формули (3) та (4), ми отримаємо модифіковану інтерполяційну формулу Ньютона в узагальненому вигляді для моделювання трьохвимірних поверхонь:

$$P_n(x,y,z) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{p^{[i]}\cdot q^{[j]}\cdot r^{[k]}}{i!\cdot j!\cdot k!}\Delta^{i+j+k}\varphi_{000}.$$

Оцінка похибки модифікованої інтерполяційної формули Ньютона

Похибки задачі математичного моделювання трьохвимірної поверхні за допомогою інтерполяції обумовлюються наступними причинами:

1) математичний опис задачі є неточним, в частинному випадку неточно задані початкові дані опису;

2) метод, що використовується для розв'язку даної задачі, часто не є точним: отримання точного розв'язку поставленої математичної задачі вимагає необмеженого чи достатньо великого числа арифметичних операцій, тому замість точного розв'язку необхідно переходити до наближеного;

3) при введенні даних до комп'ютера, при виконанні арифметичних операцій і при виведенні даних виконуються округлення.

Похибки, що відповідають даним причинам, відповідно називають:

1) похибкою, що не усувається;

2) похибкою методу;

3) обчислювальною похибкою.

В даній роботі обмежимося обчисленням тільки похибки методу.

Для функції $f(x,y,z)$ ми будуємо інтерполяційний поліном, який в точках (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1),

(x_2, y_2, z_2), ..., (x_n, y_n, z_n).

Визначимо, наскільки близько побудований поліном $P_n(x, y, z)$ наближується до функції $f(x, y, z)$ в інших точках, тобто оцінимо остаточний член:

$$R_n(x, y, z) = f(x, y, z) - P_n(x, y, z). \quad (5)$$

Для визначення ступеня наближення накладаються додаткові умови, а саме ті, що в заданому просторі $a_x \le x \le b_x$, $a_y \le y \le b_y$, $a_z \le z \le b_z$ що містить вузли інтерполювання, функція $f(x, y, z)$ має всі похідні $f'(x, y, z)$, $f''(x, y, z)$, ..., $f^{(n)}(x, y, z)$ до n-го порядку включно.

Введено додаткову функцію:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = f(x, y, z) - P_n(x, y, z) - \\ - k\prod\nolimits_{n+1}(x, y, z) \end{aligned}, \quad (6)$$

Де $\begin{aligned} \prod\nolimits_{n+1}(x, y, z) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) \times \\ \times (y - y_0)(y - y_1)...(y - y_n)(z - z_0) \times \\ \times (z - z_1)...(z - z_n) \end{aligned}$,

та k – постійний коефіцієнт, який оберемо нижче в ході міркувань.

Зрозуміло, що функція $u(x, y, z)$ має $n+1$ коренів в заданих точках.

Коефіцієнт k підбирається таким чином, щоб $u(x, y, z)$ мала $(n+2)$-й корінь в будь-якій, але фіксованій точці $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ заданого простору, але не співпадаючий з вузлами інтерполювання. Для визначення коефіцієнта k рівняння (6) перепишемо у наступному вигляді:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - P_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - k\prod\nolimits_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0.$$

Звідки, так як $\prod_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \ne 0$, отримаємо:

$$k = \frac{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - P_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\prod_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}. \quad (7)$$

Очевидно, що на просторі, що розглядається, похідна $u^{(n+1)}(x, y, z)$ має хоча б один нуль, який позначимо через $(\xi_x; \xi_y; \xi_z)$, тобто $u^{(n+1)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z) = 0$.

З формули (6), так як $P_n^{(n+1)}(x, y, y) = 0$ та $\prod_{n+1}^{(n+1)}(x, y, z) = ((n+1)!)^3$, отримаємо

$$u^{(n+1)}(x, y, z) = f^{(n+1)}(x, y, z) - k((n+1)!)^3.$$

При $x = \xi_x$, $y = \xi_y$, $z = \xi_z$ отримаємо: $0 = f^{(n+1)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z) - k((n+1)!)^3$.

Звідки

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z)}{((n+1)!)^3}. \quad (8)$$

Якщо порівняти праві частини формул (7) та (8), можна помітити, що:

$$\frac{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - P_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\prod_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z)}{((n+1)!)^3}. \quad (9)$$

Тобто

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - P_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z)}{((n+1)!)^3}\prod\nolimits_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned} \quad (10)$$

Так як $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ довільні, тоді формула (10) буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} R_n(x, y, z) = f(x, y, z) - P_n(x, y, z) = \\ = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z)}{((n+1)!)^3}\prod\nolimits_{n+1}(x, y, z), \end{aligned} \quad (11)$$

де ξ_x, ξ_y, ξ_z залежать відповідно від x, y та z і лежать в межах заданого простору.

Так як вузли інтерполювання – рівновіддалені, тобто $x_{i+1} - x_i = h_x$, $y_{i+1} - y_i = h_y$ та $z_{i+1} - z_i = z_y$, та нехай $p = \frac{x - x_0}{h_x}$, $q = \frac{y - y_0}{h_y}$ і $r = \frac{z - z_0}{h_z}$, тоді на основі формули (11) отримаємо остаточний член першої інтерполяційної формули Ньютона:

$$\begin{aligned} R_n(x, y, z) = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-n)}{((n+1)!)^3} \times \\ \times q(q-1)(q-2)...(q-n) \times \\ \times r(r-1)(r-2)...(r-n) \times \\ \times h_x^{n+1} h_y^{n+1} h_z^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z), \end{aligned} \quad (12)$$

де $(\xi_x; \xi_y; \xi_z)$ – деяке проміжне значення між вузлами інтерполювання (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n) та точкою (x, y, z).

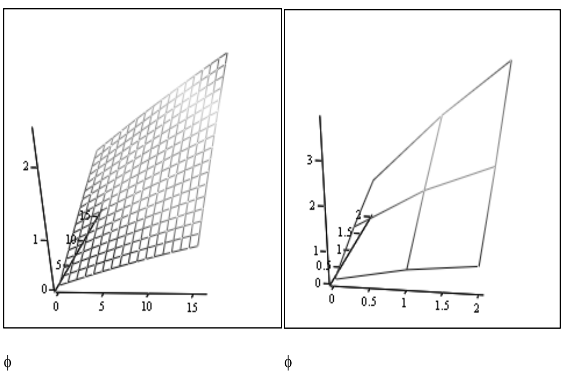
Частіше всього при практичних обчисленнях інтерполяційна формула Ньютона обривається на членах, які містять такі різниці, які в границях заданою точності можна вважати постійними для функцій $\varphi = f(x, y, z)$ – h_x, h_y та h_z достатньо малі, і враховуючи, що $f^{(n+1)}(x, y, z) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta^{n+1}\varphi}{h_x^{\,n+1} \cdot h_y^{\,n+1} \cdot h_z^{\,n+1}}$, де $\Delta^{n+1}\varphi = \Delta_x^{n+1}\left(\Delta_y^{n+1}\left(\Delta_z^{n+1}\varphi\right)\right)$, приблизно можна покласти, що $f^{(n+1)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z) \approx \dfrac{\Delta^{n+1}\varphi_{000}}{h_x^{\,n+1} \cdot h_y^{\,n+1} \cdot h_z^{\,n+1}}$.

В цьому випадку остаточний член першої інтерполяційної формули дорівнює:

$$R_n(x, y, z) \approx \frac{p(p-1)\ldots(p-n)q(q-1)\ldots}{((n+1)!)^3} \times \\ \times (q-n)r(r-1)\ldots(r-n)\Delta^{n+1}\varphi_{000}\,. \tag{13}$$

Наприклад, нехай задано чотири точки в просторі $\varphi_0(x_0, y_0, z_0)$, $\varphi_1(x_1, y_0, z_0)$, $\varphi_2(x_0, y_1, z_0)$, $\varphi_3(x_0, y_0, z_1)$. Отже отримаємо вираз, який дозволяє описати поверхню, яка проходить через задані точки:

$$P_n(x, y, z) = \varphi_0 + \frac{(x - x_0)}{h_x}(\varphi_1 - \varphi_0) + \\ + \frac{(y - y_0)}{h_y}(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{(z - z_0)}{h_z}(\varphi_3 - \varphi_0).$$



а б

Рис. 1. Зображення двох поверхонь

На рис. 1, а зображена поверхня, яка отримана з початкових значень функції $\varphi(x, y, z)$.

На рис. 1, б розташована поверхня, яку ми отримали в результаті застосування модифікованої інтерполяційної формули Ньютона для функції, яка залежить від трьох змінних.

Висновки

В даній статті запропоновано метод математичного моделювання трьохвимірних поверхонь за допомогою модифікованої інтерполяційної функції трьох змінних за методом Ньютона.

Розглянута математична модель є досить проста та ефективна і може бути використана на практиці в таких галузях, як медицина, космічні дослідження, геофізика для моделювання трьохвимірних поверхонь, інтерполяції або відновлення функції, що описують величину, яка залежить від координат простору.

Література

1. Половко А.М., Бутусов П.Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.

2. Квєтний Р.Н. Методи комп’ютерних обчислень: Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 148 с.

3. Бахвалов Н.С. Численные методы, 2 изд. – М.: Наука, 1987. – 598 с.

4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

Надійшла до редакції 27.02.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Дубовой, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.