УДК 621.371.322

И.П. ЗАИКИН, А.А. ТКАЧЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДНЫХ СТУКТУРАХ

Приведено доказательство существования и единственности решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов преобразования, полученных в задаче дифракции аксиально-симметричных электромагнитных волн обеих поляризаций на симметричном стыке двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором. Показано, что полученные бесконечные системы являются фредгольмовыми и при их численном решении пригоден метод усечения, а при получении явных формул в некоторых предельных случаях возможно использование метода последовательных приближений.

существование и единственность, поляризация, круглый волновод, цилиндрический резонатор, коэффициенты преобразования

Введение

Метод частичных областей (сшивания) удобен для исследования структур сложного вида, распадающихся на две (или более) простые смежные области, для каждой из которых можно получить решение с помощью разделения переменных. Неизвестные поля в каждой из частичных областей представляются в виде разложения по собственным функциям соответствующей области [1].

Так как явный функциональный вид для взаимно ортогональных собственных функций известен, задача сводится к определению системы коэффициентов (или амплитуд) при собственных функциях в разложениях поля в каждой из частичных областей. Для полного решения задачи необходимо потребовать выполнения условий непрерывности полей на общих границах частичных областей. Это требование и использование свойств ортогональности собственных функций приводит обычно к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных амплитуд собственных волн [2].

Формулирование проблемы. Найти точное решение бесконечной системы уравнений в общем случае невозможно и обычно ограничиваются получением приближенного решения с помощью методов редукции или последовательных приближений [3]. Но для их использования необходимы доказательства законности их применения, в частности, доказательство существования и единственности решения системы, что обеспечивает выполнение условия конечности энергии рассеянного поля в любой ограниченной части пространства.

Решение проблемы. H_φ-поляризация

Строгое решение задачи дифракции H_φ-поляризованных электромагнитных волн на симметричном стыке двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором ((22), [2]) завершено получением бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов преобразования в промежуточной области 2:

$$g_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} g_n P_{n\nu} = \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})} \qquad (1)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{n\nu} = \frac{1}{\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \beta_\nu^m \frac{\tau_m}{\tilde{A}_m \Delta_m}, \qquad (2)$$

где

$$\alpha_m^n = \frac{e_n^2 - 1}{2\pi r i} \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 - (m/2r)^2}; \qquad (3)$$

$$\beta_n^m = -\frac{\pi i}{2} \frac{\tilde{A}_m^2}{\tilde{A}_m^2 - j_{0n}^2} J_0(\tilde{A}_m) H_0^{(1)}(\tilde{A}_m); \qquad (4)$$

$$\Delta_m = \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)} - \sigma_m \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)} -$$

$$-\tau_m H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_1(\tilde{A}_m); \qquad (5)$$

$$\sigma_m = \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m \theta)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m \theta)} \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)}; \qquad (6)$$

$$\tau_m = \frac{1 - \sigma_m}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0(\tilde{A}_m)}; \qquad (7)$$

$$e_n^2 = e^{i 4\pi r \gamma_n}, \ \ \gamma_n = \sqrt{æ^2 - j_{0n}^2}, \qquad (8)$$

$$\tilde{A}_m = \sqrt{æ^2 - (m/2r)^2}, m = 0,1,2,... \qquad (9)$$

Для доказательства существования и единственности решения (1), в соответствии с [4], необходимо установить, что матрица (2) системы порождает в гильбертовом пространстве ℓ^2 последовательностей $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$ вполне непрерывный оператор, и показать тем самым, что рассматриваемая бесконечная система второго рода является системой фредгольмового типа, т.е. показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |P_{n\nu}|^2 < \infty. \qquad (10)$$

И если столбец правых частей (1) также принадлежит ℓ^2, для доказательства существования единственного решения этой системы, принадлежащего ℓ^2, достаточно установить, что соответствующая однородная система не имеет нетривиальных решений в этом пространстве (альтернатива Фредгольма).

После подстановки (3) – (9) в (2) получим

$$P_{n\nu} = -\frac{e_n^2 - 1}{2\pi r i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\left[æ^2 - j_{0n}^2 - (m/2r)^2 \right]} \times$$

$$\times \frac{\tilde{A}_m^2 J_0(\tilde{A}_m) H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)}{\left[æ^2 - j_{0\nu}^2 - (m/2r)^2 \right]} \frac{\tau_m}{\tilde{A}_m \Delta_m} =$$

$$= \frac{1 - e_n^2}{4\pi r i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2 - \delta_m^0)\gamma_n}{\left[æ^2 - j_{0n}^2 - (m/2r)^2 \right]} \times$$

$$\times \frac{\tilde{A}_m J_0(\tilde{A}_m) H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)}{\left[æ^2 - j_{0\nu}^2 - (m/2r)^2 \right]} \frac{\tau_m}{\Delta_m},$$

где δ_m^0 – символ Кронекера:

$$\delta_m^0 = \begin{cases} 1 & \text{ï ðè} \ \ m = 0, \\ 0 & \text{ï ðè} \ \ m \neq 0. \end{cases}$$

Как показано в [3], можно положить, что

$$\left| J_0(\tilde{A}_m) H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) \frac{\tau_m}{\Delta_m} \right|_{\sigma_m = 1} = 1,$$

тогда имеем

$$P_{n\nu} = \frac{(1 - e_n^2)}{4\pi r i} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2 - \delta_m^0)}{\left[æ^2 - j_{0n}^2 - (m/2r)^2 \right]} \times$$

$$\times \frac{\tilde{A}_m}{\left[æ^2 - j_{0\nu}^2 - (m/2r)^2 \right]}.$$

Примем для упрощения оценок $2r = 1$ и запишем для величин, входящих в $P_{n\nu}$, при больших n, ν è m:

$$j_{0n} \approx (n - 1/4)\pi \approx n\pi \approx n;$$

$$j_{0\nu} \approx (\nu - 1/4)\pi \approx \nu\pi \approx \nu;$$

$$\gamma_n \approx i n\pi \approx i n; \ \ e_n^2 \approx 0;$$

$$\tilde{A}_m \approx i m; \ \ (2 - \delta_m^0) = 2;$$

$$\left[æ^2 - j_{0n}^2 - (m/2r)^2 \right] \approx -(m^2 + n^2);$$

$$\left[æ^2 - j_{0\nu}^2 - (m/2r)^2 \right] \approx -(m^2 + \nu^2).$$

Тогда матричные коэффициенты примут вид:

$$P_{n\nu} \approx i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{nm}{\left(m^2 + n^2 \right)\left(m^2 + \nu^2 \right)}, \qquad (11)$$

а система (1) запишется как

$$g_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \left\{ i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{nm}{(m^2+n^2)(m^2+\nu^2)} \right\} = \\ = \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}. \quad (12)$$

Перепишем (12) в виде

$$g_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sqrt{n} \times = \\ \times \left\{ i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\sqrt{n}}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)} \right\} = \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}$$

и умножим на $\sqrt{\nu}$. Получим перенормированную систему

$$x_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n A_{n\nu} = \frac{\delta_\nu^p \sqrt{\nu}}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}, \quad (13)$$

где $$x_\nu = g_\nu \sqrt{\nu}, \quad x_n = g_n \sqrt{n}, \quad (14)$$

$$A_{n\nu} = i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\sqrt{n\nu}}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)}. \quad (15)$$

Покажем, что $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left|A_{n\nu}\right|^2 < \infty$

или

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left| i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\sqrt{n\nu}}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)} \right|^2 = \\ = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\nu \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)} \right|^2 < \infty.$$

Так как $$\frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)} = \\ = \frac{1}{n^2-\nu^2}\left(\frac{m}{m^2+\nu^2} - \frac{m}{m^2+n^2} \right),$$

то $$\left[\frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)} \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\left(n^2-\nu^2\right)^2} \left[\frac{m^2}{\left(m^2+\nu^2\right)^2} + \frac{m^2}{\left(m^2+n^2\right)} - \right. \\ \left. - \frac{2m^2}{\left(m^2+\nu^2\right)\left(m^2+n^2\right)} \right] = \frac{1}{\left(n^2-\nu^2\right)^2} \times \\ \times \left\{ \frac{m^2+\nu^2-\nu^2}{\left(m^2+\nu^2\right)^2} + \frac{m^2+n^2-n^2}{\left(m^2+n^2\right)^2} - \right. \\ - \frac{2}{n^2-\nu^2}\left[\frac{m^2+\nu^2-\nu^2}{m^2+\nu^2} - \right. \\ \left.\left. - \frac{m^2+n^2-n^2}{m^2+n^2} \right]\right\} = \frac{1}{\left(n^2-\nu^2\right)^2} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{m^2+\nu^2} - \frac{\nu^2}{\left(m^2+\nu^2\right)^2} + \frac{1}{m^2+n^2} - \right. \\ - \frac{n^2}{\left(m^2+n^2\right)^2} - \frac{2}{n^2-\nu^2}\left[\frac{n^2}{m^2+\nu^2} - \right. \\ \left.\left. - \frac{\nu^2}{m^2+n^2} \right]\right\}.$$

Тогда $$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)} \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\left(n^2-\nu^2\right)^2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+\nu^2} + \right. \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} - \frac{2n^2}{n^2-\nu^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} - \\ - \nu^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(m^2+\nu^2\right)^2} - n^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(m^2+n^2\right)^2} + \\ \left. + \frac{2\nu^2}{n^2-\nu^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+\nu^2} \right\} = \Sigma_m. \quad (16)$$

Используя интегральное представление сумм, получаем [5]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+\nu^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\nu^2} = \\ = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{\nu} \right) < \frac{\pi}{2\nu};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+n^2}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+n^2}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{n}\right)<\frac{\pi}{2n};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(m^2+\nu^2\right)^2}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+\nu^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\nu^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{1+\nu^2}-\frac{1}{2}arctg\frac{1}{\nu}\right)<\frac{\pi}{4\nu^3};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(m^2+n^2\right)^2}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+n^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{n}{1+n^2}-\frac{1}{2}arctg\frac{1}{n}\right)<\frac{\pi}{4n^3}.$$

Подставляя найденные суммы в (16), найдем

$$\Sigma_m<\frac{1}{\left(n^2-\nu^2\right)^2}\left(\frac{\pi}{2\nu}+\frac{\pi}{2n}-\frac{n\pi}{n^2-\nu^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{4\nu}-\frac{\pi}{4n}+\frac{\nu\pi}{n^2-\nu^2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{\left(n^2-\nu^2\right)^2}\left(\frac{1}{4\nu}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{n+\nu}\right).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|A_{n\nu}\right|^2<\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{n\nu\pi}{\left(n^2-\nu^2\right)^2}\left(\frac{1}{4\nu}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4n}-\frac{1}{n+\nu}\right)\right|=\left|\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\nu^2-n^2\right)^2}+\right.$$

$$+\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{\left(\nu^2-n^2\right)^2}-$$

$$\left.-\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu+n)-n}{\left(\nu^2-n^2\right)^2\left(\nu+n\right)}\right|=$$

$$=\left|-\frac{3\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\nu^2-n^2\right)^2}+\right.$$

$$+\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{\left(\nu^2-n^2\right)^2}+$$

$$\left.+\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\nu^2-n^2\right)^2\left(\nu+n\right)}\right|. \qquad (17)$$

Воспользовавшись интегральным представлением сумм, получим [5]:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\nu^2-n^2\right)^2}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2-n^2\right)^2}=$$

$$=\left\{\frac{x}{2n^2\left(n^2-x^2\right)}+\frac{1}{4n^3}\ln\left|\frac{x+n}{x-n}\right|\right\}_1^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{2n^3}\left(\frac{n}{n^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{n+1}{n-1}\right|\right)\sim-\frac{1}{2n^4},$$

так как

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{n+1}{n-1}\right|\sim\frac{1}{n};$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{\left(\nu^2-n^2\right)^2}=\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2-n^2\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x^2-n^2\right)}\Bigg|_1^{\infty}=\frac{1}{2\left(1-n^2\right)}=$$

$$=-\frac{1}{n^2}\frac{n^2}{2\left(n^2-1\right)}\sim-\frac{1}{n^2};$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\nu^2-n^2\right)^2\left(\nu+n\right)}=$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2-n^2\right)^2\left(x+n\right)}=\frac{1}{4n^4}\times$$

$$\times\left[\frac{n^2}{2(n+1)^2}+\frac{n}{2(n+1)}-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{n+1}{n-1}\right|\right]\sim 1/8n^4.$$

Подставляя найденные суммы в (17), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|A_{n\nu}\right|^2=\left|-\frac{3\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(-\frac{1}{2n^4}\right)+\right.$$

$$+\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)+\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{1}{8n^4}\right)\Bigg| =$$

$$=\left|\frac{3\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right|=$$

$$=\left|\frac{3\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\frac{\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right|=$$

$$=\left|-\frac{3\pi}{16n^2}+\frac{\pi}{8n}\right|<\infty$$

при $n\to\infty$.

Столбец правых частей в (13) из-за символа Кронекера тоже конечен, т.е. принадлежит к ℓ^2. А показать, что соответствующая системе (13) однородная система имеет в ℓ^2 только тривиальное решение, не представляет труда – любая однородная система уравнений с равными количествами уравнений и неизвестных имеет только тривиальное (нулевое) решение [6]. Таким образом, система (13), а значит, и исходная система (1) имеют единственное решение в ℓ^2.

E_φ-поляризация

Строгое решение задачи дифракции E_φ-поляризованных волн получено ((40), [1]) в виде бесконечной системы линейных уравнений второго рода

$$g_\nu-\sum_{n=1}^{\infty}g_nP_{n\nu}=\frac{\delta_\nu^p}{H_1^{(1)}(j_{1\nu})} \qquad (18)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{n\nu}=\frac{4}{\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\eta_m j_{1n}}{\tilde{A}_m^2\Omega_m}\alpha_m^n\beta_\nu^m, \qquad (19)$$

где
$$\alpha_m^n=\frac{e_n^2-1}{2\pi ri}\frac{m/2r}{\gamma_n^2-(m/2r)^2}, \qquad (20)$$

$$\beta_\nu^m=-\frac{\pi i}{2}\frac{j_{1\nu}\tilde{A}_m(m/2r)}{\gamma_\nu^2\left(\tilde{A}_m^2-j_{1\nu}^2\right)}\times$$

$$\times J_1(\tilde{A}_m)H_1^{(1)}(\tilde{A}_m), \qquad (21)$$

$$e_n^2=e^{4\pi ri\gamma_n},\ \ \gamma_n=\sqrt{æ^2-j_{1n}^2}, \qquad (22)$$

$$\tilde{A}_m=\sqrt{æ^2-(m/2r)^2},\ m=1,2,..., \qquad (23)$$

$$\Omega_m=\eta_mJ_0(\tilde{A}_m)H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)-$$

$$-\frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)}{H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)}-\lambda_m\frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)}{H_1^{(2)}(\tilde{A}_m)}, \qquad (24)$$

$$\eta_m=\frac{1-\lambda_m}{J_1(\tilde{A}_m)H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)}, \qquad (25)$$

$$\lambda_m=\frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_m\theta)H_1^{(2)}(\tilde{A}_m)}{H_1^{(2)}(\tilde{A}_m\theta)H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)}. \qquad (26)$$

Подставив (20)…(26) в (19), получим

$$P_{n\nu}=\frac{2}{\pi i2r}\frac{(1-e_n^2)j_{1n}j_{1\nu}}{\gamma_\nu^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m/2r)^2}{\tilde{A}_m}\times$$

$$\times\frac{1}{\gamma_n^2-(m/2r)^2}\frac{J_1(\tilde{A}_m)H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)}{\tilde{A}_m^2-j_{1\nu}^2}\frac{\eta_m}{\Omega_m}.$$

Как показано в [3],

$$\left|J_1(\tilde{A}_m)H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)\frac{\eta_m}{\Omega_m}\right|_{\lambda_m=1}=1,$$

кроме того, с целью упрощения оценок положим $2r=1$. Тогда матричные коэффициенты $P_{n\nu}$ будут равны

$$P_{n\nu}=\frac{2}{\pi i}\frac{(1-e_n^2)j_{1n}j_{1\nu}}{\gamma_\nu^2}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\tilde{A}_m\left(\gamma_n^2-m^2\right)\left(\tilde{A}_m^2-j_{1\nu}^2\right)}. \qquad (27)$$

Поведение величин, входящих в (27), при больших n,ν è m представим как^

$$j_{1n}\approx(n+1/4)\pi\approx n\pi\approx n;$$

$$j_{1\nu}\approx(\nu+1/4)\pi\approx\nu\pi\approx\nu;$$

$$\gamma_n\approx ij_{1n}\approx in\pi\approx in;\ \gamma_\nu\approx ij_{1\nu}\approx i\nu\pi\approx i\nu;$$

$$\gamma_\nu^2\approx-(\nu\pi)^2\approx-\nu^2;\ \ e_n^2\approx0;$$

$$\tilde{A}_m\approx im;\ \ \tilde{A}_m^2\approx-m^2.$$

Тогда выражение (27) примет вид

$$P_{n\nu}\approx2\frac{n}{\nu}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)}, \qquad (28)$$

а система (18)

$$g_\nu - \sum_{n=1}^{\infty} g_n \left\{ 2\frac{n}{\nu} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)} \right\} = \frac{\delta_\nu^p}{H_1^{(1)}(j_{1\nu})}$$

или

$$g_\nu \nu - \sum_{n=1}^{\infty} g_n n \times$$

$$\times \left\{ 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)} \right\} = \frac{\nu\delta_\nu^p}{H_1^{(1)}(j_{1\nu})}.$$

Сделав обозначения

$$x_\nu = g_\nu \nu, \quad x_n = g_n n,$$

получим перенормированную систему

$$x_\nu - \sum_{n=1}^{\infty} x_n B_{n\nu} = \frac{\nu\delta_\nu^p}{H_1^{(1)}(j_{1\nu})}, \qquad (29)$$

где $\quad B_{n\nu} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)}.$

Для доказательства существования единственного решения (29), а значит и (18), необходимо показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty} B_{n\nu}\right|^2 < \infty$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)}\right|^2 < \infty.$$

Для случая H_φ-поляризации нами показано, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{m}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+\nu^2\right)}\right]^2 =$$

$$= \frac{\pi}{\left(n^2-\nu^2\right)^2}\left(\frac{1}{4\nu}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{n+\nu}\right).$$

Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|B_{n\nu}\right|^2 = \pi\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\left(\nu^2-n^2\right)^2} + \right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n^2-\nu^2\right)^2} -$$

$$\left. -4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\nu^2-n^2\right)\left(\nu+n\right)}\right|.$$

Как было показано выше, внутренняя сумма в последнем слагаемом ведет себя как

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\nu^2-n^2\right)\left(\nu+n\right)} \sim \frac{1}{8n^4}.$$

Поведение внутренних сумм в первых двух слагаемых найдем, заменяя суммы интегралами [7]:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\left(\nu^2-n^2\right)^2} = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x^2-n^2)^2} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2n^2(x^2-n^2)}+\frac{1}{2n^4}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\frac{x^2}{\left|x^2-n^2\right|}\right\}_1^{\infty} = \frac{1}{2n^2(1-n^2)}+$$

$$+\frac{\ln\left|n^2-1\right|}{2n^4} = -\frac{1}{2n^4}\frac{n^2}{n^2-1}+\frac{\ln\left|n^2-1\right|}{2n^4} \sim$$

$$\sim -1/2n^4,$$

так как $\ln\left|n^2-1\right| << 2n^4$.

Точно так же

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-\nu^2)^2} \sim -\frac{1}{2\nu^4}.$$

Тогда окончательно получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|B_{n\nu}\right|^2 = \pi\left|-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right| \sim \frac{\pi}{6\nu^3} < \infty$$

при $\nu \to \infty$.

А так как столбец правых частей (29) из-за символа Кронекера тоже конечен, то сама система (29), а также исходная система (18) имеют единственное решение в ℓ^2.

Заключение

Таким образом, полученные бесконечные системы (1) и (18) являются фредгольмовыми, поэтому для их приближенного решения пригоден метод редукции [8].

Кроме того, проведенное доказательство сходимости систем позволяет получить некоторые аналитические приближения, в частности, длинноволновое приближение и приближения "узкие щели" и геометрической оптики [3], позволяющие быстро и с достаточной для практики точностью получить значения коэффициентов преобразования на рассмотренной структуре.

Литература

1. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 323 с.

2. Заикин И.П., Ткаченко А.А. Дифракция электромагнитных волн на симметричном соединении двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором. Часть I. Постановка и строгое решение задачи // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2007. – Вип. 3 (22). – С. 5-13.

3. Заикин И.П., Ткаченко А.А. Дифракция электромагнитных волн на симметричном соединении двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором. Часть II. Аналитические приближения // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2007. – Вип. 4 (23). – С. 7-14.

4. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. – 287 с.

5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

6. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высш. шк., 1970. – 416 с.

7. Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределенных интегралов. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

Поступила в редакцию 29.08.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.В. Лукин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.