

УДК 621.396:537.874.4

А.Д. АБРАМОВ, Т.А. ПЕТРУНИНА, Т.И. МОСКАЛЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Украина

ТЕСТ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПРИ РАЗРЫВНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Рассмотрена задача обнаружения комплексного гармонического сигнала, наблюдаемого на фоне шумов по совокупности независимых отрезков наблюдения. Для решения указанной задачи использована модифицированная методология максимального правдоподобия. Особенностью решения является применение в качестве критической статистики функции, зависящей от собственных значений ковариационной матрицы наблюдений. Синтезирован удобный в вычислительной реализации тест, который использует табулированную статистику и обеспечивает как оперативность получения результатов, так и возможность управления величиной вероятности ошибки первого рода.

Ключевые слова: метод максимального правдоподобия, собственные значения, собственный вектор, ошибка первого рода, вероятность правильного обнаружения, табулированная статистика.

Введение

Разработка принципов синтеза простых технологий обнаружения сигналов, в частности гармонического, по совокупности информации от заданного числа датчиков или при наличии разрывов в наблюдениях представляет интерес для теории и технических приложений. [1 – 3]

Формулировка проблем. Ограничения использования методологии максимального правдоподобия (ММП) в традиционной форме для решения задач обнаружения в указанных условиях хорошо известны практикам:

- концепция постоянной и равной на всех отрезках наблюдений интенсивности и начальной фазы не всегда может быть обоснована;
- сокращение размера вектора входных данных (отсчетов наблюдений) каждой из реализаций приводит к существенному ухудшению качественных показателей всей системы в целом.

Здесь применительно к аналитическому сигналу в рамках ММП приводится вычислительный тест для обнаружения с заданной вероятностью ошибки первого рода комплексного гармонического сигнала с неизвестными интенсивностью $|\dot{E}|$, начальной фазой φ и частотой f_0 по наблюдениям на L изолированных зашумленных независимых отрезках времени.

Пусть в качестве исходных данных, на основании которых принимаются решения, задается совокупность U_1 :

$$U_1 = \Lambda \dot{E}_1 + \varepsilon_1, \text{ где } l = \overline{1, L}. \quad (1)$$

Здесь каждая из компонент $\dot{U}_{kl} (k = \overline{1, K})$ вектора $U_1 = [U_{11}, U_{21}, \dots, U_{M1}]^T$ связана с сигналом и kl -м отсчетом $\dot{\varepsilon}_{kl}$ помехи $\varepsilon_1 = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{M1}]^T$ равенством

$$U_{kl} = |\dot{E}_1| \exp[j2\pi f_0 k \Delta t + j2\pi f_0 (l-1)T_1 + j\varphi] + \varepsilon_{kl} = \dot{E}_1 \exp(j2\pi f_0 k \Delta t) + \varepsilon_{kl}. \quad (2)$$

В последних двух соотношениях $\dot{E}_1 = |\dot{E}_1| e^{j\varphi_1}$, $|\dot{E}_1|$, $\varphi_1 = 2\pi f_0 (l-1)T_1 + \varphi$, f_0 – неизвестные интенсивность, начальная фаза и частота «единичной» гармоники $S(f_0, k) = \exp[j2\pi f_0 k \Delta t]$ ($k = \overline{1, K}$) из диапазона $f_0 \in 2F$, $|\dot{E}_1| \in (E_{\min}, E_{\max})$, $T_1 \geq (k-1)\Delta t$, $\Delta t = 1/2F$. Непредсказуемость числового значения $-\pi \leq \varphi_1 \leq \pi$ обусловлена не только величиной φ , но и неидентичностью выбора начала T_1 отрезков наблюдения. Шумы измерителя – гауссовский случайный процесс ε_1 (независимый от сигнальной компоненты U_1), который характеризуется нулевым математическим ожиданием $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$ и ковариационной матрицей $R_0 = \langle \varepsilon_1 \varepsilon_1^+ \rangle = \sigma_0^2 I_k \delta(l-t)$, где I_k – единичная матрица размером $\dim R_0 = (K \times K)$; “+” и $\delta(\cdot)$ – символы эрмитового сопряжения и Кронекера; σ_0^2 – мощность шумовой компоненты; $\langle \dot{\varepsilon}_{kl} \dot{\varepsilon}_{jn}^* \rangle = \sigma_0^2 \delta(k-j) \delta(l-n)$, $\Lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{k-1})^T$ – информационный вектор «единичного» сигнала, элемент λ которого связан с частотой f_0 уравнением

$$\lambda = \exp(j2\pi f_0 \Delta t). \quad (3)$$

Амплитуду $\dot{E}_1 (l=1, L)$ и параметр Λ считаем факторами с заданными в «априори» многомерными распределениями $\rho(\dot{E}_1)$ и $\rho(\Lambda)$ из областей Φ_1 и Φ_2 соответственно. Как следствие модельных приближений: матрицу $R_1 = \langle U_1 U_1^T \rangle$ межинтервальных корреляций вектора U_1 можно записать в виде [4]:

$$R_1 = \Lambda \Psi \Lambda^+ + \sigma_0^2 I_M, \text{ где } \Psi = \langle \dot{E}_1 \dot{E}_1^* \rangle = \sigma_E^2. \quad (4)$$

Требуется при указанных исходных данных разработать процедуру (тест) обнаружения по совокупности выборок реализаций ряда (1) сигнала $S(\dots)$ при отсутствии информации о мощности σ_0^2 шумов.

Решение проблемы

В технической литературе предложены оптимальные в рамках критерия отношения правдоподобия (КОП) $T_i (i=0,1)$ правила обнаружения шумоподобных сигналов, наблюдаемых на выходах системы многопозиционных датчиков. В частности, в работе [5, 6] цитируемая идеология трансформирована в методику «подгонки» матрицы R_i к выборочной ковариации S :

$$S = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L U_1 U_1^+, \quad (5)$$

где U_1 – вектор наблюдения.

Такая трансформация позволила при выполнении гипотезы H_1 минимизировать по R_i количественную меру $\ln T_i$:

$$\ln T_i = \ln \{P(U^L/S)/P(U^L/R_i)\}, \quad (6)$$

где $P(U^L/W)$ – плотность вероятности совокупности $U^L = \{U_1, l=1, \overline{L}\}$ независимых векторов U_1 относительно обусловленного события $W \in (S, R_i)$.

Как результат трансформирования, технология проверки сложной гипотезы H_1 свелась к проверке выполнения с заданным уровнем значимости условия равновеликости собственных значений $\phi_i (i=1, 2, \dots, K)$ матрицы S . Применение подобных правил для обнаружения гармонической компоненты $S(\dots)$ с «изменяющейся» на интервале $T_L = \sum_{l=1}^L T_1$ интенсивностью имеет основание. Для доказательства этого утверждения детализируем связь функции правдоподобия $P(U^L/R_0)$ с условной плотностью вероятности $\rho(U^L/\Lambda, \dot{E}_1, R_0)$, объемными

распределениями $\rho(\dot{E}_1)$ и $\rho(\Lambda)$:

$$P(U^L/R_0) = \int_{\Phi_1} \int_{\Phi_2} P(U^L/\Lambda, \dot{E}_1, R_0) \rho(\dot{E}_1) \times \rho(\Lambda) d\dot{E}_1 d\Lambda. \quad (7)$$

Здесь каждой точке множества Φ_1 и Φ_2 возможных исходов случайного эксперимента сопоставляется конкретная реализация совокупности $\{\dot{E}_1\}$ и вектора Λ : различным комбинация вектора $S_1 = \Lambda \dot{E}_1$ будут соответствовать различные точки пространства сигналов, а

$$P(U^L/\Lambda, \dot{E}_1, R_0) = (2\pi)^{-KL} |R_0|^{-L} \times \exp \left\{ -\sum_{l=1}^L (U_1 - \Lambda \dot{E}_1)^+ R_0^{-1} (U_1 - \Lambda \dot{E}_1) \right\}. \quad (8)$$

Матрица R_0 положительно определена, для ее детерминанта использовано обозначение $|R_0|$. Без потери общности повествования при записи соотношения (7) использованное понятие объемного интеграла по областям определения Φ_1 и Φ_2 , отражающего факт последовательного интегрирования, кратность которого определена мерностью соответствующей плотности.

Очевидно, что норма $\|U_1 - \Lambda \dot{E}_1\|$ не изменится при ортогональном преобразовании вектора $u_1 = U_1 - \Lambda \dot{E}_1$. Следовательно, если D -ортогональная $(K \times K)$ матрица и $DD^+ = I_M$, при $R_0 = \sigma_0^2 I_M$ невязка $\gamma^2 = \sum_{l=1}^L (U_1 - \Lambda \dot{E}_1)^+ R_0^{-1} (U_1 - \Lambda \dot{E}_1)$ будет равна

$$\gamma^2 = \sum_{l=1}^L (D(U_1 - \Lambda \dot{E}_1))^+ R_0^{-1} (D(U_1 - \Lambda \dot{E}_1)). \quad (9)$$

Последнее соотношение при $L \gg 1$ на основании разложения Такаги [5] тривиально приводится к виду

$$\gamma^2 = L \text{Sp} \{R_0^{-1} (\Phi - Y)\} = L \text{Sp} \{R_0^{-1} (\Phi_1 - Y_1)\} + L \text{Sp} (R_{K-1}^{-1} \nu). \quad (10)$$

Здесь $\text{Sp} T$ – след матрицы T , $\Phi = DSD^+ = \text{diag}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M)$, $\Phi_i > 0 (i=1, \overline{K})$; $Y = (DAS)(DAS)^+ = \text{diag}(Y_1, Y_2, \dots, Y_K) Y_i \geq 0$, Φ_1 и Y_i – i -е собственное значение матриц S и $\Lambda \Psi \Lambda^+$ соответственно; $R_{01} = \sigma_0^2$, $\nu_{K-1} = \sigma_0^2 1_{K-1}$, $\nu = \text{diag}(\Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_{K-1})$. Приведенные соотношения позволяют функцию (8) записать в виде произведения двух сомножителей

$$P(\dots) = P(U^L/R_{K-1}) P(U^L/R_{01}). \quad (11)$$

Первый сомножитель $P(U^L/R_{K-1})$:

$$P(U^L/R_{K-1}) = 2\pi^{-L(K-1)} |R_{K-1}|^L \times \exp(-L \text{Sp} R_{K-1}^{-1} v) \quad (12)$$

в отличие от второго $P(U^L/R_{01})$

$$P(U^L/R_{01}) = 2\pi^{-L} |R_{01}|^{-L} \times \exp(-L \text{Sp} R_{01}^{-1} (\Phi_1 - Y_1)) \quad (13)$$

не зависит от амплитуды гармоники. Во втором – $\text{Sp} R_{01}^{-1} (\Phi_1 - Y_1)$ фактически определяет невязку между σ_0^2 и ее оценкой. С учетом (11) $\ln L_1$ отношения правдоподобия L_1 факторизуется

$$\ln L_1 = T_{K-1}(U^L, \sigma_0^2) + T_1(U^L, \sigma_0^2), \quad (14)$$

здесь $T_{K-1}(U^L, \sigma_0^2) = \ln \frac{P(U^L/v)}{P(U^L/R_{K-1})}$;

$$T_1(U^L, \sigma_0^2) = \ln \int_{\Phi_1} \int_{\Phi_2} \frac{P(U^L/(\Phi_1 - Y_1))}{P(U^L/R_{01})} \rho(\dot{E}_1) \times \times \rho(\Lambda) d\dot{E}_1 d\Lambda. \quad (15)$$

Из указанной факторизации вытекает, что правила принятия решения о наличии в разрывных наблюдениях комплексной гармоники будет оптимальным в рамках КОП тогда, когда оно обеспечит минимум по R_{K-1} и R_{01} статистики (14). Очевидно, что относительная независимость вклада составляющих в достижение минимума указанной статистики позволяет говорить о возможности использования каждого из них для формирования соответствующего правила обнаружения. В частности, посредством адаптационной минимизации $T_{K-1}(U^L, \sigma_0^2)$ при неизвестной σ_0^2 , как функции инвариантной к изменениям на интервалах наблюдения интенсивности сигнала.

Базируясь на подходе, ориентированном на минимизацию первого из слагаемых (14), и конкретизируя цитируемую методику к настоящим исходным данным, нетрудно показать, что адаптационная критическая статистика F_n в решаемой задаче приводится к виду:

$$F_n = (L-1) \left\{ (K-n) \ln \sum_{f=1}^K \Phi_f - \sum_{f=1}^K \Phi_f - (K-n) \ln(K-n) \right\}, \text{ где } n=0,1. \quad (16)$$

Как следствие: тестовая статистика (16) может быть использована для обнаружения в шумах комплексной гармоники в рамках условий поставленной задачи.

В технологическом отношении обнаружение

целесообразно свести к формированию по наблюдениям U^L матрицы межинтервальных корреляций S , вычисления ее собственных значений и числовой последовательности F_0, F_1 для соответственно каждой из выдвинутых гипотез H_0 (нет сигнала), H_1 (есть сигнал), сравнению F_n с порогом $\chi_{\alpha, t(n, K)}^2$, который выбран из матрицы χ^2 – распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы

$$t(n, K) = 0,5(K-n)(K-n+1) - 1.$$

При условии $F_0 > \chi_{\alpha, t(n, K)}^2$ гипотеза H_0 об отсутствии в наблюдениях гармоники отвергается. Далее переходят к проверке гипотезы H_1 . Если $F_1 \leq \chi_{\alpha, t(n, K)}^2$, то выносится решение: наблюдаемый процесс содержит гармонический сигнал.

Для подтверждения теоретических выводов приводим результаты аттестации синтезированного теста обнаружения комплексного гармонического сигнала по совокупности независимых отрезков наблюдений, полученные на уровне цифрового статистического эксперимента.

Моделировалась обработка наблюдений, полученных на $L=9$ интервалах, в двух режимах. В каждом интервале T_1 ($l=1, \dots, 9$) наблюдения \dot{U}_{kl} ($k=1, \dots, 9$) представлялись в виде аддитивной смеси соответствующего отсчета гармонического сигнала и гауссовского случайного комплексного процесса (шума) с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_0^2=1$. Период T_0 гармоники задавался в 10 раз меньше интервала T_1 .

Проведено 500 экспериментов, уровень значимости был α выбран равным $\alpha=0,01$. Определялось количество правильных решений об обнаружении сигнала (выполнение гипотезы H_1) при различных соотношениях сигнал/шум μ :

$$\mu = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \frac{\sigma_m^2}{\sigma_0^2}, \quad (17)$$

где σ_m^2 – мощность сигнальной компоненты на m -м интервале наблюдения.

Выборочная межинтервальная ковариационная матрица S оценивалась по $K=81$ временным отсчетам на 9-и равновеликих отрезках T_1 ($l=1, \dots, 9$).

В первом из упомянутых режимов: разрывы наблюдений отсутствуют, случайным параметром гармоники считается начальная фаза φ , равномерно распределенная на интервале $\varphi \in (0, 2\pi)$, множитель

интенсивности $|\dot{E}_1| = 1$ ($1 \in \overline{1,9}$) в пределах всех интервалов T_1 ($1 \in \overline{1,9}$) постоянен, T_0 известно.

Во втором режиме анализу были подвергнуты две модельные ситуации:

– распределение интенсивности $|\dot{E}_1|$ по интервалам подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием $\langle |\dot{E}_1| \rangle = 0,5$ и дисперсией $\sigma_{|\dot{E}_1|}^2 = 0,25$;

– распределение вероятности непрерывной величины $|\dot{E}_1|$ в диапазоне (от 0 до 1) подчиняется равномерному закону.

Кроме того, полагалось, что начальная фаза φ_1 ($1 \in \overline{1,9}$) на каждом T_1 распределена равномерно

$$P(\varphi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } \varphi \in (0, 2\pi); \\ 0 & \text{при } \varphi \notin (0, 2\pi), \end{cases} \quad (18)$$

частота f_0 гармоники и σ_0^2 неизвестны.

Эффективность теста, отвечающего исходным данным первого режима, иллюстрирует зависимость вероятности правильного обнаружения $P_{пр}$ от соотношения сигнал/шум μ , которая показана на рис. 1.

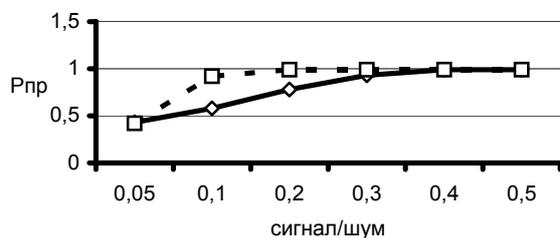


Рис. 1. Вероятность правильного обнаружения по критерию Неймана-Пирсона

Здесь ломаная кривая, соединяющая непрерывно экспериментально полученные результаты – рабочая характеристика синтезированного теста обнаружения. Пунктирная линия – рабочая характеристика традиционного алгоритма обнаружения, оптимального в рамках критерия Неймана-Пирсона, полученная по результатам моделирования при идентичных исходных данных.

Числовой материал, полученный в результате аттестации теста для условий второго режима, приведен в таблице. Верхняя строка в таблице указывает вид распределения «множителей интенсивности» на интервалах наблюдения, первый столбец – последовательность соотношений сигнал-шум. Величина на пересечении упомянутых строки и столбца: процент благоприятных исходов в общем числе экс-

периментов.

На рис. 2 приведены рабочие характеристики теста при заданных распределениях интенсивности $|\dot{E}_1|$ на подинтервалах наблюдения.

Таблица

Вероятность правильного обнаружения в зависимости от μ для двух сигнальных ситуаций

μ	Нормальное распределение, %	Равномерное распределение, %
0,01	44	43
0,1	44	44
0,2	45	49
0,3	53	53
0,4	58	60
0,5	69	65
0,6	76	74
0,7	80	79
0,8	86	83
0,9	88	87
1	91	92
1,2	94	94
1,4	96	95
1,6	97	97
1,8	98	98
2	99	99

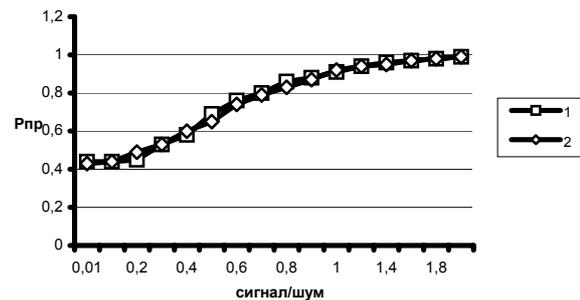


Рис. 2. Вероятность правильного обнаружения в зависимости от μ для двух сигнальных ситуаций:

- 1 – нормальное распределение «множителей интенсивности» на подинтервалах наблюдения;
- 2 – равномерное распределение «множителей интенсивности» на подинтервалах наблюдения

Анализ приведенных кривых позволяет убедиться, что характер изменения интенсивности гармоники на подинтервалах наблюдения не оказывает существенного влияния на качество обнаружения.

Небольшие отклонения обусловлены тем, что вероятность правильного обнаружения $P_{пр}$ оценивалась по конечному числу экспериментов.

Заключение

Приведенные теоретические и экспериментальные результаты аттестации синтезированного

теста обнаружения комплексного гармонического сигнала по совокупности независимых отрезков наблюдений, полученные на уровне статистического цифрового материала, позволяют сделать следующие выводы:

- синтезированное правило принятия решений о наличии в наблюдениях гармонического сигнала не зависит от характера изменения его интенсивности на подинтервалах наблюдения;
- технология, реализующая тест, во-первых, проста в вычислительной реализации, использует табулированную статистику и позволяет управлять величиной ошибки первого рода, во-вторых, она отвечает критерию Неймана-Пирсона.

Литература

1. Акимов П.С. Теория обнаружения сигналов / П.С. Акимов, П.А. Бакут, В.А. Богданович и др.; под ред. П.А. Бакута. – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.
2. Репин В.Г. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информа-

ционных систем / В.Г. Репин, Г.П. Тартаковский. – М.: Сов. радио, 1977. – 432 с.

3. Богданович В.А. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов / В.А. Богданович, А.Г. Вострецов. – М.: Физ. мат. лит., 2004. – 320 с.

4. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. / С.Л. Марпл-мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

5. Абрамов А.Д. Определение числа шумовых пространственно-временных сигналов методом проверки сложных гипотез по критерию отношения правдоподобия / А.Д. Абрамов // *Авиационно-космическая техника и технология*. Сб. научн. тр. – Х.: Харьковский авиационный ин-т им. Н.Е. Жуковского, 1997. – С. 284-288.

6. Абрамов А.Д. Экспериментальное исследование определителя числа одновременно наблюдаемых компонент с неизвестными параметрами / А.Д. Абрамов, Р.В. Нежальский // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. – 2004. – № 1. – С. 50-54.

7. Корн Г.П. Справочник по математике / Г.П. Корн, Г.Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

Поступила в редакцию 18.04.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Илюшко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ТЕСТ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ГАРМОНІЙНОГО СИГНАЛУ ПРИ РОЗРИВНИХ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ

О.Д. Абрамов, Т.О. Петруніна, Т.І. Москаленко

Розглянуте завдання виявлення комплексного гармонічного сигналу, спостережуваного на тлі шумів по сукупності незалежних відрізків спостереження. Для вирішення вказаного завдання використана модифікована методологія максимальної правдоподібності. Особливістю рішення є застосування у якості критичної статистики функції, залежної від власних значень коваріаційної матриці спостережень. Синтезований зручний в обчислювальній реалізації тест, який використовує табульовану статистику і забезпечує як оперативність отримання результатів, так і можливість управління величиною вірогідності помилки першого роду.

Ключові слова: метод максимальної правдоподібності, власне значення, власний вектор, помилка першого роду, вірогідність правильного виявлення, табульована статистика.

THE TASK OF DETECTION OF THE COMPLEX HARMONIC SIGNAL IN THE PRESENCE OF TOTALLY INDEPENDENT OBSERVATION INTERVALS

A.D. Abramov, T.A. Petrunina, T.I. Moskalenko

The task of detection of the complex harmonic signal observed against a background noise by using totally independent observation intervals has been considered. The modified maximum probability methodology has been used for solving the above-mentioned task. The application of covariance matrix eigenvalues dependent function as critical statistics is peculiarity of this solution. The test convenient in calculation uses the tabulated statistics and provides efficiency in getting results and possibility of type 1 error value management has been synthesized.

Key words: maximum probability methodology, eigenvalues, eigenvector, type 1 error, probability of correct discovery, tabulated statistics.

Абрамов Александр Дмитриевич – канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Петрунина Татьяна Александровна – аспирант, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: tatyana_petrunin@mail.ru.

Москаленко Татьяна Игоревна – инженер, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.