УДК 519.6

В.А. РВАЧЁВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ОПТИМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Предложены методы оптимального выбора параметров управления для получения наиболее точной оценки неизвестных параметров целевых функций (идентификации) подсистем нижнего уровня иерархической многоуровневой системы по наблюдаемым из экспериментов приближенным координатам точек максимума этих целевых функций, которые основаны на применении техники дифференциального исчисления для функций многих переменных, в частности метода Ньютона, теории неявных функций и эрмитовой многомерной интерполяции с помощью атомарных функций.

Ключевые слова: *иерархическая многоуровневая система, идентификация, целевая функция, оптимальная оценка, метод Ньютона, эрмитова интерполяция, атомарная функция.*

Введение

Исследование многоуровневых иерархических систем управления (МИСУ) является одним из важных направлений системного анализа [1 – 5]. В настоящей работе рассмотрены некоторые методы получения оптимальной оценки неизвестных параметров целевых функций подсистем нижнего уровня для иерархической многоуровневой системы, а именно методы, состоящие в оптимальном выборе стратегии управления в процессе идентификации параметров этих целевых функций с точки зрения минимизации возможной погрешности в оценке этих параметров в равномерной и интегральных метриках. В случае, когда целевая функция подсистемы нижнего уровня не задана параметрически, предлагаются оптимальные непараметрические методы ядерных оценок и вейвлет-оценок этой целевой функции, использующие атомарные функции одной и нескольких переменных [6, 7].

1. Постановка задачи исследования

Для простоты ниже подробно рассматривается случай иерархической системы с двумя уровнями – верхним и нижним – и одной подсистемой на нижнем уровне. Если на нижнем уровне несколько подсистем с неизвестными внутренними параметрами, то рассмотренные методы применяются к каждой из них.

Пусть на верхнем уровне требуется максимизировать целевую функцию верхнего уровня

$$f(x_{max}(p), p, u),$$

где переменная $x_{max}(p)$ находится в результате максимизации целевой функции нижнего уровня

$$g(x, p, \vec{v}) \to \max_{x},$$

где $\vec{v}$ неизвестный вектор внутренних параметров, то есть

$$g(x_{max}(p), p, \vec{v}) \geq g(x, p, \vec{v}),$$

а параметр управления p задается на верхнем уровне так, чтобы максимизировать целевую функцию верхнего уровня.

Целевая функция $g(x, p, \vec{v})$ предполагается гладкой и строго выпуклой вверх, что обеспечивает единственность точки максимума. Для простоты записи выкладок переменные x, p вначале предполагаем скалярными. Векторный случай рассматривается совершенно аналогично. Неизвестный внутренний параметр целевой функции необходимо находить из эксперимента или наблюдения. При этом задается управляющий параметр, а точка максимума функции нижнего уровня наблюдается с некоторой погрешностью. Эту погрешность будем считать достаточно маленькой, чтобы можно было использовать методы математического анализа.

Поскольку проведение экспериментов или наблюдений в ряде случаев требует больших затрат времени и средств, то нужно указать оптимальный метод определения внутреннего параметра $\vec{v}$, т.е. выбора управляющего параметра p таким образом, чтобы минимизировать погрешность вычисления внутреннего параметра $\vec{v}$ по значениям x_{max}, p. Хотя в многомерном случае получение оптимальных значений управляющих параметров для нахождения значений внутренних параметров целевых функций нижнего уровня с минимально возможной погрешностью могут требовать значительных объемов вычислений на ЭВМ, затраты на их проведения в ряде случаев несоизмеримо малы по сравнению с затратами на проведение дополнительных экспериментов или наблюдений над реальными МИСУ и требуют значительно меньшего времени.

2. Решение задачи оптимального определения внутренних параметров

В случае, когда целевая функция нижнего уровня гладкая, внутренняя точка максимума ее находится из условия

$$g'_x(x,p,\vec{v})=0.$$

Пусть $\vec{v}=(v_1,\dots,v_s)$. Задав набор управляющих значений управляющих параметров $(p_1,\dots,p_s)$ для нахождения неизвестного вектора внутренних параметров подсистемы нижнего уровня $\vec{v}=(v_1,\dots,v_s)$, получаем систему уравнений

$$g'_x(x_{max,i},p_i,\vec{v})=0,\quad i=1,...,s, \qquad (1)$$

из которой находим

$$v_k=\varphi_k(x_{max,1},\dots,x_{max,s},p_1,\dots,p_s),$$
$$k=1,\dots,s.$$

Пусть

$$a_{k,l}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l},\quad M=\left[|a_{k,l}|\right].$$

Тогда вектор погрешности определения значений внутренних параметров выражается как произведение матрицы M и вектора погрешностей наблюдаемых точек максимума целевой функции нижнего уровня.

Таким образом, требуется выбрать для экспериментов такой набор управляющих параметров, который бы минимизировал

$$\|M\|^2=\sum_{k,l=1}^{s}|a_{k,l}|^2.$$

Поскольку значения внутренних параметров целевой функции нам неизвестны, следует рассчитывать на худший случай – сначала найти для каждого набора $(p_1,...,p_s)$ наихудший набор $\vec{v}=(v_1,...,v_s)$, т.е. такой, что дает максимальное значение $\|M\|$:

$$\|M\|^2\xrightarrow[(v_1,\dots,v_s)]{}\max,$$

а потом найти набор $(p_1,\dots,p_s)$, который доставляет минимум этому максимуму.

Рассмотрим простейший (но имеющий реальный экономический смысл) пример.

Пусть целевая функция подсистемы нижнего уровня имеет вид

$$g(x,p,v)=px-vx^2,$$

где $x>0,\ 0<p\le P,\ 0<a\le v\le b$, и v неизвестно.

Требуется указать значение управляющего параметра p, которое обеспечивало бы при определении точки максимума x_{max} из эксперимента наименьшую погрешность определения v.

Имеем

$$g'(x)=p-2vx.$$

В точке максимума $p-2vx=0$;

$$x_{max}=\frac{p}{2v}.$$

Далее

$$v'_x=-\frac{p}{2x^2}.$$

При фиксированном p:

$$\max_{x_{max}}|v'_X|=\max\frac{p}{2x_{max}^2}=\max_{a\le v\le b}\frac{2v^2}{p}=\frac{2b^2}{p}.$$

Минимум этого выражения достигается при

$$p=P,$$

т.е. следует выбирать максимально возможное значение p.

Рассмотрим более сложный пример, также имеющий реальный смысл. В этом примере выкладки элементарны, но достаточно громоздки.

Пусть

$$g(x,p,v_1,v_2)=px^2-v_1x-v_2x^3,$$

где

$$x\ge 0,\ 0<p\le P,\ 0<a_1\le v_1\le b_1,$$
$$0<a_2\le v_2\le b_2.$$

Имеем

$$g'_X(x,p,v_1,v_2)=h(x,p.v_1,v_2)=2px-v_1-3v_2x^2.$$

В точке максимума получаем

$$2px-v_1-3v_2x^2=0,$$

откуда

$$x_{max}=\frac{p+\sqrt{p^2-3v_1v_2}}{3v_2}.$$

Для нахождения двух внутренних параметров в данном случае нужно провести два эксперимента, выбрав при этом два разных значения управляющих параметров.

Фиксируем p_1,p_2.

Тогда получим для точек максимума

$$x_k=x_{max}(k)=\frac{p_k+\sqrt{p_k^2-3v_1v_2}}{3v_2}.$$

Для нахождения внутренних параметров имеем системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} v_1+3x_1^2v_2=2p_1x_1, \\ v_1+3x_2^2v_2=2p_2x_2, \end{cases}$$

откуда несложно найти v_1,v_2 как функции x_1,x_2, затем частные производные

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad k = 1,2,\ i = 1,2$$

и сумму
$$S = \sum_{i,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 .$$

Подставив в эту сумму значения x_1, x_2, найденные выше, получим S как элементарную функцию переменных v_1, v_2. Затем найдем максимум $m(p_1, p_2)$ этой функции при условиях $v_k \in [a_k, b_k]$ из системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial v_1} = 0, \frac{\partial S}{\partial v_2} = 0,$$

и наконец минимум $m(p_1, p_2)$ при условиях $p_k \in (0, P]$. Значения p^*_1, p^*_2, для которых принимается этот минимум, и есть оптимальные значения управляющих параметров при экспериментальном определении значений внутренних параметров целевой функции нижнего уровня.

Аналогично рассматривается случай, когда целевая функция нижнего уровня зависит от двух переменных x, y и управляющий параметр двумерный, т.е. например

$$g(x, y, p_1, p_2, v_1, v_2) = p_1 x + p_2 y - v_1 x^2 - v_2 y^2$$

и $p_1 \le P_1, p_2 \le P_2$.

В этом случае необходимые условия максимума дают два уравнения

$$\frac{\partial g}{\partial x} = p_1 - 2v_1 x = 0, \ \frac{\partial g}{\partial y} = p_2 - 2v_2 y = 0,$$

откуда

$$x_{max} = \frac{p_1}{2v_1}, y_{max} = \frac{p_2}{2v_2}.$$

Здесь достаточно одного эксперимента для определения двух внутренних параметров. Рассуждая как в первом примере, получаем, что оптимальный выбор параметров управления для наиболее точной оценки внутренних параметров

$$p_1 = P_1, p_2 = P_2.$$

Если бы целевая функция нижнего уровня зависела от трех внутренних параметров, например, имела вид

$$g(x, y, p_1, p_2, v_1, v_2) = p_1 x + p_2 y - v_1 x^2 - v_2 y^2 - v_3 xy,$$

то одного эксперимента было бы недостаточно, чтобы из двух уравнений (равенства нулю двух частных производных) определить три неизвестных параметра. Требовалось бы провести хотя бы два, а два эксперимента давали бы четыре уравнения для определения трех неизвестных параметров, вообще говоря, возможно несовместных ввиду приближенности определения точек максимума. В подобном случае целесообразно находить неизвестные внутренние параметры методом наименьших квадратов, т.е. минимизацией суммы квадратов четырех первых производных целевой функции.

В общем многопараметрическом случае необходимо применение численных методов:

1) при нахождении точек максимума целевой функции для заданных значений управляющих параметров и внутренних параметров целевой функции,

2) для нахождения зависимости внутренних параметров от точек максимума при фиксированных значениях управляющих параметров,

3) для нахождения частных производных внутренних параметров относительно точек максимума при фиксированных значениях управляющих параметров, которые необходимы для вычисления функции-погрешности определения внутренних параметров,

4) для нахождения максимума этой погрешности при фиксированных значений управляющих параметров

5) для минимизации этого максимума изменением значений управляющих параметров.

Нахождение точек максимума и минимума в гладком случае сводится к решению систем нелинейных уравнений. При решении этих систем методом Ньютона важно наличие хорошего начального приближения. При этом можно использовать непрерывную зависимость точек экстремума от управляющих параметров, в том типичном случае, когда такая непрерывная зависимость имеет место.

Для сокращения объема вычислений можно использовать многомерную лагранжеву интерполяцию, например методом радиальных базисных функций [9], или многомерную эрмитову интерполяцию в случае гладкой зависимости точек экстремума от управляющих параметров [8].

В случае, когда структура целевой функции нижнего уровня неизвестна или известна частично, т.е. когда эта целевая функция не представлена в виде суперпозиции известных функций и неизвестных параметров, можно использовать методы, подобные тем, которые используются в математической статистике для непараметрической регрессии, такие как метод ядерных оценок, методы с использованием вейвлет-функций и локальных сплайнов. Во всех этих методах перспективным является использование атомарных функций как непосредственно в качестве ядер, так и для построения вейвлет-функций, обладающих хорошими аппроксимационными свойствами [6, 7].

Вместо нахождения максимальной (наихудшей) погрешности определения внутренних параметров при заданных параметрах управления может быть целесообразно находить среднюю погрешность, т.е. погрешность в какой-нибудь интегральной метрике.

Полученную в процессе вычисления информацию о зависимости погрешности вычисления внутренних параметров от их значения можно использовать для апостериорной оценки погрешности полученных значений.

Заключение

Предложены методы определения таких параметров управления иерархической многоуровневой системой, которые обеспечивают наименьшую погрешность определения неизвестных внутренних параметров целевой функции нижнего уровня при их определении по результатам эксперимента.

Литература

1. *Новосельцев В.И. Теоретические основы системного анализа / В.И. Новосельцев. – М.: Майор, 2006. – 591 с.*
2. *Месарович М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Мако Такахара. – М.: Мир, 1973. – 344 с.*
3. *Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 487 с.*
4. *Волкова В.Н. Теория систем и системный анализ в управлении организациями / В.Н. Волкова, А.А. Емельянов. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 846 с.*
5. *Сорока К.О. Основи теорії систем і системного аналізу / К.О. Сорока. – Х.: Тимченко, 2005. – 286 с.*
6. *Рвачев В.Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В.Л. Рвачев, В.А. Рвачев. – К.: Наукова думка, 1979. – 196 с.*
7. *Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений / В.А. Рвачев // Успехи математических наук. – 1990. – № 1(271). – С. 77-103.*
8. *Рвачев В.А. Методы определения оптимальных параметров управления иерархической многоуровневой системой / В.А. Рвачев // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 4 (31). – С. 47-50.*
9. *Buhmann M.D. Radial Basis Functions / M.D. Buhmann. – Cambridge: CUP. – 2004. – 299 p.*

Поступила в редакцию 2.12.2009

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. 405 А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

ОПТИМАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЦІЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ ІЄРАРХІЧНОЇ БАГАТОРІВНЕВОЇ СИСТЕМИ

В.О. Рвачов

Запропоновані методи оптимального вибору параметрів керування для отримання найбільш точної оцінки параметрів цільових функцій (ідентифікації) підсистем нижнього рівня ієрархічної багаторівневої системи за спостереженнями з експериментів наближених значень координат точок максимуму цих цільових функцій, що базуються на застосуванні техніки диференціального числення для функцій багатьох змінних , зокрема метода Ньютона, теорії неявних функцій та ермітовій багатовимірній інтерполяції за допомогою атомарних функцій.

Ключові слова: ієрархічна багаторівнева система, ідентифікація, цільова функція, оптимальна оцінка, метод Ньютона, ермітова інтерполяція, атомарна функція.

OPTIMAL DETERMINATION OF TARGET FUNCTIONS OF A HIERARCHIC MULTILEVEL SYSTEM

V.O. Rvachov

Methods of optimal choice of the control parameters for retrieval of the most accurate estimates of the unknown parameters of the target functions (identification) of subsystems of lower level of an hierarchic multilevel systems from the experimentally observed approximate values of the coordinates of the maximum points of the target functions tare proposed which are based on the application of the technique of the differential calculus for functions of many variables in particular of the Newton method, implicit functions theory and of the multidimensional Hermite interpolation with the help of the atomic functions.

Key words: hierarchic multilevel system , identification, target function, optimal estimate, Newton method, Hermite interpolation, atomic function.

Рвачев Владимир Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: rvachov@gmail.com.