УДК 519.718

В.В. ГРОЛЬ, В.А. РОМАНКЕВИЧ, А.П. ФЕСЕНЮК

Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫХ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМ

Предлагается методика оценки погрешности расчета надежности отказоустойчивых многопроцессорных систем, основанного на выполнении статистических экспериментов с соответствующими моделями. Полученные соотношения устанавливают зависимость между погрешностью, доверительной вероятностью и количеством экспериментов, и дают возможность вычислить эти характеристики после проведения экспериментов, а также предназначены для выработки рекомендаций по проведению этих экспериментов.

Ключевые слова: *надежность, отказоустойчивые многопроцессорные системы, погрешность, дисперсия, математическое ожидание, моделирование.*

1. Введение

Отказоустойчивые многопроцессорные системы (ОМС) находят широкое применение в технике, в частности, для управления сложными объектами, и расчет надежности таких систем на сегодняшний день представляется очень важной и актуальной задачей [1-3]. Авторы многих работ предлагают методы, основанные на использовании формул для точного либо приближенного расчета надежности. Однако, как правило, эти методы предполагают, что появление отказовых ситуаций подчиняется некоторому закону, что, вообще говоря, является частным случаем. Недостатком такого подхода можно также считать необходимость составления формул заново при внесении изменений в структуру системы. Отметим, что составление формул для каждой ОМС нового типа – достаточно сложная научная задача.

В работах [4, 5] предлагается метод расчета надежности ОМС, основанный на проведении статистических экспериментов с определенного вида моделями, отражающими реакцию ОМС на появление отказов. Он имеет следующие преимущества: позволяет сократить объем вычислений; может быть применен для ОМС любого типа.

Исходными данными для расчета являются количество процессоров, степень отказоустойчивости и вероятности отказов процессоров за определенный промежуток времени. Кроме того, для выполнения статистических экспериментов необходима модель поведения системы в потоке отказов, которая отражает эту самую степень отказоустойчивости. Иными словами, речь идет не только об ОМС, для которых справедливо: отказ системы имеет место тогда и только тогда, когда кратность отказов ее компонентов превышает некоторую фиксированную величину. Наиболее подходящей и перспективной для этих целей является так называемая GL-модель [6,7]. Для имитации потока отказов используется специальный генератор, формирующий векторы состояния компонентов системы (компоненты системы и сама ОМС могут находиться лишь в двух состояниях: исправен, отказ). Вероятность отказа исследуемой системы может быть получена как сумма вероятностей появления таких отказовых ситуаций, которые приводят к отказу системы в целом.

Точное значение вероятности отказа системы может быть получено только при переборе всех возможных векторов состояния системы. Однако связанный с этим огромный объем вычислений вынуждает разработчиков сокращать продолжительность эксперимента. Настоящая работа посвящена оценке погрешности, возникающей вследствие сокращения числа экспериментов при статистических расчетах.

2. Обозначения

n – количество процессоров ОМС.

$i = 1,...,n$ – индекс модуля системы.

$x_i = \{0, \quad 1\}$ – состояние процессора системы: 1 – процессор исправен, 0 – отказ.

$p(x_i)$ – вероятность отказа процессора.

N – количество различных векторов состояния системы.

$j = 1,...,N$ – индекс вектора состояния системы.

$\delta_j = \langle x_1,...,x_n \rangle$ – вектор состояния системы.

$p(\delta_j)$ – вероятность того, что система находится в состоянии δ_j.

$\alpha(\delta_j) = \{0,\ 1\}$ –индикаторная функция отказа системы: 1– отказ, 0 – система исправна.

N_0 – количество экспериментов.

3. Методика оценки погрешности

Согласно [4], вероятность отказа системы определяется как

$$Q = \sum_{j=1}^{N} \alpha(\delta_j) \cdot p(\delta_j),$$

где $p(\delta_j) = \prod_{i=1}^{n} \left(p(x_i)(1-x_i) + (1-p(x_i))x_i \right)$.

Для сокращения дальнейших выкладок обозначим одно слагаемое этой суммы величиной $y_j = \alpha(\delta_j) \cdot p(\delta_j)$. Пусть $\Omega = \{y_j, j = 1,...N\}$ – множество значений величин y_j, соответствующих векторам δ_j. Понятно, что общее количество векторов $N = 2^n$. Кроме того предполагается, что все вероятностные параметры рассчитываются для одного промежутка времени t, и в дальнейшем t не учитываем.

При сокращении количества экспериментов с N до N_0 результат вычислений фактически определяется некоторым подмножеством множества Ω. Обозначим через Ω_k все подмножества мощности N_0 ($\Omega_k \subset \Omega$, $|\Omega_k| = N_0$, $k = 1,..., C_N^{N_0}$).

Расчетное значение вероятности отказа системы z_k, соответствующее подмножеству Ω_k, определяется следующим образом:

$$z_k = \frac{N}{N_0} \cdot \sum_{\forall y_j \in \Omega_k} y_j .$$

Поскольку подмножество Ω_k зависит от векторов сформированных генератором, то z_k можно считать значениями некоторой случайной величины Z. Для оценки погрешности ε расчета надежности путем проведения статистических экспериментов можно использовать неравенство Чебышева [8]

$$P\left(\left| M(Z) - z_k \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{D(Z)}{\varepsilon^2}. \qquad (1)$$

3.1. Расчет математического ожидания и дисперсии

Математическое ожидание получается сравнительно легко:

$$M(Z) = \frac{\sum_{k=1}^{C_N^{N_0}} z_k}{C_N^{N_0}} = \frac{\sum_{k=1}^{C_N^{N_0}} \left(\frac{N}{N_0} \cdot \sum_{\forall y_j \in \Omega_k} y_j \right)}{C_N^{N_0}} =$$

$$= \frac{N \cdot C_{N-1}^{N_0-1} \cdot \sum_{j=1}^{N} y_j}{N_0 \cdot C_N^{N_0}} = \sum_{j=1}^{N} y_j .$$

Перейдем к дисперсии:

$$D(Z) = \frac{1}{C_N^{N_0}} \sum_{k=1}^{C_N^{N_0}} (z_k)^2 - (M(Z))^2 =$$

$$= \frac{1}{C_N^{N_0}} \sum_{k=1}^{C_N^{N_0}} \left(\frac{N}{N_0} \cdot \sum_{\forall y_j \in \Omega_k} y_j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} y_j \right)^2 .$$

Произведем упрощения, опираясь на следующие рассуждения. Каждое конкретное значение y_j входит в $C_{N-1}^{N_0-1}$ определенных подмножеств Ω_k. А пара чисел y_s, y_r одновременно встречается в $C_{N-2}^{N_0-2}$ определенных подмножествах Ω_k. Таким образом, если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то при каждом y_j^2 возникнут коэффициенты $C_{N-1}^{N_0-1}$, а при попарных произведениях $y_s y_r$ – коэффициенты $C_{N-2}^{N_0-2}$.

$$D(Z) = \frac{1}{C_N^{N_0}} \frac{N^2}{N_0^2} \left(C_{N-1}^{N_0-1} \sum_{j=1}^{N} y_j^2 + \right.$$

$$\left. + 2 C_{N-2}^{N_0-2} \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{r=s+1}^{N} y_s y_r \right) - \left(\sum_{j=1}^{N} y_j \right)^2 .$$

После проведения сокращений, получаем:

$$D(Z) = \frac{N^2}{N_0^2} \times$$

$$\times \left(\frac{N_0}{N} \sum_{j=1}^{N} y_j^2 + 2 \frac{N_0(N_0-1)}{N(N-1)} \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{r=s+1}^{N} y_s y_r \right) -$$

$$- \left(\sum_{j=1}^{N} y_j \right)^2 = \frac{N}{N_0} \sum_{j=1}^{N} y_j^2 + 2 \frac{N(N_0-1)}{N_0(N-1)} \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{r=s+1}^{N} y_s y_r -$$

$$- \left(\sum_{j=1}^{N} y_j \right)^2 = \frac{N - N_0}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} y_j^2 +$$

$$+ 2 \frac{N N_0 - N - N N_0 + N_0}{N_0(N-1)} \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{r=s+1}^{N} y_s y_r =$$

$$=\left(\frac{N-N_0}{N_0}\right)\cdot\sum_{j=1}^{N}y_j^2-\frac{2(N-N_0)}{N_0(N-1)}\cdot\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{r=s+1}^{N}y_s y_r=$$

$$=\left(\frac{N-N_0}{N_0}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}y_j^2-\frac{2}{N-1}\cdot\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{r=s+1}^{N}y_s y_r\right). \quad (2)$$

Полученное соотношение (2) позволяет определить дисперсию результатов расчета надежности ОМС на основе статистических экспериментов, что дает возможность оценить погрешность расчета с помощью (1).

3.2. Оценка погрешности до проведения экспериментов

На ранних этапах проектирования разработчик системы должен иметь возможность оценить, пусть приближенно, необходимое количество экспериментов, которое понадобится впоследствии для осуществления расчета надежности в приемлемое время. Важной задачей также является выработка рекомендаций для проведения экспериментов (например, определение количества экспериментов обеспечивающего заданную точность, или точности, которой можно достичь, имея ограничения по времени вычислений). Поскольку значения $\alpha(\delta_j)$ неизвестны до проведения эксперимента, то невозможно точно рассчитать необходимое количество экспериментов.

Для получения оценочного значения количества экспериментов или погрешности расчета необходимо определить верхнюю границу дисперсии $D(Z)$. Исходя из соотношения (2), в качестве грубой верхней оценки дисперсии можно выбрать следующую величину:

$$D(Z)<\left(\frac{N-N_0}{N_0}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}p^2(\delta_j)\right). \quad (3)$$

Можно получить и более точную оценку.

Пусть A – количество векторов, на которых система отказывает (можно записать $A=\sum_{j==1}^{N}\alpha(\delta_j)$). Предположим также, что векторы δ_j проиндексированы по убыванию величин $p(\delta_j)$. Если в соотношении (2) слагаемые со знаком плюс заменить большими, а слагаемые со знаком минус заменить меньшими по абсолютной величине значениями, то полученный результат будет больше дисперсии. Следовательно, справедлива оценка:

$$D(Z)\le D_A,$$

$$D_A=\left(\frac{N-N_0}{N_0}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{A}p^2(\delta_j)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{N-1}\cdot\sum_{s=N-A+1}^{N-1}\sum_{r=s+1}^{N}p(\delta_s)p(\delta_r)\right). \quad (4)$$

Соотношение (4) может применяться, если величина A определена заранее. Если же число A неизвестно, то можно (огрубляя расчеты) определить, при каком значении A величина D_A принимает наибольшее значение. Из соотношения (4) получаем:

$$D_A-D_{A-1}=\left(\frac{N-N_0}{N_0}\right)\cdot\left(p^2(\delta_A)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{N-1}p(\delta_{N-A+1})\cdot\sum_{r=N-A}^{N}p(\delta_r)\right);$$

$$D_A>D_{A-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(\delta_A)>\frac{2}{N-1}p(\delta_{N-A+1})\cdot\sum_{r=N-A}^{N}p(\delta_r) \quad (5)$$

Таким образом, соотношение (5) позволяет получить оценку дисперсии (более точную, чем в соотношении (3)) даже в том случае, если количество векторов, приводящих к отказу системы, неизвестно заранее. Отметим, что, хотя соотношения (3), (4), (5) выглядят достаточно громоздкими, практически время для их обработки оказывается приемлемым, поскольку при этом эксперименты с моделью не проводятся.

Заключение

В статье предлагается методика оценки погрешности, возникающей вследствие сокращения количества экспериментов при применении статистического метода расчета надежности ОМС. Соотношения (1) и (2) устанавливают зависимость между погрешностью, доверительной вероятностью и количеством экспериментов, и дают возможность вычислить эти характеристики после проведения экспериментов. Соотношения (3), (4) и (5) предназначены для выработки рекомендаций по проведению экспериментов.

Литература

1. Boland P.J. An O(k² log(n)) Algorithm for Computing the Reliability of Consecutive-k-out-of-n: F Systems. / P.J. Boland and F.J. Samaniego // IEEE Trans. Reliability. – Mar. 2004. – Vol. 53. – P. 3-6.

2. Reliability of Two-Stage Weighted-k-out-of-n Systems With Components in Common / V. Stopjakova, P. Malosek, M. Matej, V. Nagy, M. Margala // IEEE Trans. Reliability. – Sep. 2005. – Vol. 54. – P. 431-440.

3. Recursive Formulas for the Reliability of Multi-State Consecutive-k-out-of-n:G Systems / H. Yamamoto, M.J. Zuo, T. Akiba, Z. Tian // IEEE Trans. Reliability. – Mar. 2006. – Vol. 55. – P. 98-104.

4. Об одном подходе к расчету надежности отказоустойчивых многопроцессорных систем / А.М. Романкевич, В.В. Гроль, Л.Ф. Карачун, М.Н. Орлова, В.А. Романкевич // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2002. – 119. – С. 54-58.

5. Об одной особенности тестирования моделей отказоустойчивых многопроцессорных систем при расчете их надежности / В.В. Гроль, М.Н. Орлова, В.А. Романкевич, Рабах Ал Шбул // Вісник Технологічного університету Поділля. – 2003. – № 3. – Т.2. – С. 40-42.

6. Романкевич А.М. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем / А.М. Романкевич, Л.Ф. Карачун, В.А. Романкевич // Электронное моделирование. – 2001. – Т. 23, № 1. – С. 102-111.

7. Романкевич А.М. Анализ отказоустойчивых многомодульных систем со сложным распределением

8. отказов на основе циклических GL-моделей / А.М. Романкевич, В.В. Иванов, В.А Романкевич. // Электронное моделирование. –2004. – Т.26. – №5. – С. 67-81.

9. Гнеденко Б.В. Элементарное введение в теорию вероятностей. / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. – М.:Наука, 1970. – 168 с.

Поступила в редакцию 30.01.2009

Рецензент: д-р. техн. наук, проф., проф. кафедры специализированных компьютерных систем В.Г. Зайцев, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина.

ПРО ОЦІНКУ ПОХИБКИ РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ ВІДМОВОСТІЙКИХ БАГАТОПРОЦЕСОРНИХ СИСТЕМ.

В.В. Гроль, В.О. Романкевич, А.П. Фесенюк

Запропоновано методику оцінки похибки розрахунку надійності відмовостійких багатопроцесорних систем, що заснований на виконанні статистичних експериментів із відповідними моделями. Отримані співвідношення встановлюють залежність між погрішністю, довірчою вірогідністю і кількістю експериментів, і дають можливість обчислити ці характеристики після проведення експериментів, а також призначені для вироблення рекомендацій по проведенню цих експериментів.

Ключові слова: надійність, відмовостійкі багатопроцесорні системи, похибка, дисперсія, математичне очікування, моделювання.

ABOUT THE ESTIMATION OF ERROR OF THE FAULT-TOLERANT SYSTEMS RELIABILITY COMPUTATION

V.V. Grol, V.A. Romankevich, A.P. Feseniuk

The method for the estimation of error of the fault-tolerant systems reliability computation by implementation of the statistical experiments with the proper system models is proposed. The got correlations set dependence between an error, confiding probability and amount of experiments, and enable to calculate these descriptions after conducting of experiments, and also intended for making recommendations on implementation of these experiments were found.

Keywords: reliability, fault-tolerant multiprocessor systems , error, dispersion, mathematical expectation, modeling.

Гроль Владимир Васильевич – д-р техн. наук, ст. научн. сотр., проф. кафедры специализированных компьютерных систем, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина, e-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua.

Романкевич Виталий Алексеевич– канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры специализированных компьютерных систем, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина, e-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua.

Фесенюк Андрей Петрович – аспирант кафедры специализированных компьютерных систем, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина, e-mail: andrew_fesenyuk@ukr.net.