

УДК 519.718

В.А. РОМАНКЕВИЧ, Т.Г. САПСАЙ, А.А. ЕФРЕМОВА

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

GL-МОДЕЛЬ КОМБИНИРОВАННЫХ 3-OUT-OF-N:F, 3_{ic}-OUT-OF-N:G СИСТЕМ

В настоящее время системы k-out-of-n находят широкое применение. Для расчета надежности таких систем предложено немало алгоритмов, однако большинство из них ориентированы на системы, элементы которых имеют одинаковую вероятность отказа. GL-модели являются в этом смысле более универсальными: расчет надежности системы выполняется путем проведения статистических экспериментов с моделью и может быть выполнен для системы с различными надежностными характеристиками ее компонентов. В статье представлен алгоритм построения GL-модели для расчета надежности комбинированных 3-out-of-n:F, 3_{ic}-out-of-n:G систем. Доказывается адекватность модели поведению системы в потоке отказов. Вводится понятие инверсно-последовательной k_{ic}-out-of-n системы.

Ключевые слова: Отказоустойчивые многопроцессорные системы, графо-логические модели, надёжность.

Введение

Сфера применения k-out-of-n систем весьма обширна (промышленные и телекоммуникационные объекты, информационно-вычислительные комплексы и т.д.). Нередко к их надежности выдвигаются повышенные требования.

Для расчета надежности таких систем предложено немало алгоритмов [1, 2], однако большинство из них ориентированы на системы, элементы которых имеют одинаковую вероятность отказа. В случае различной надежности компонентов сложность расчета значительно повышается. Кроме того, такие алгоритмы нередко используются для моделирования систем, которые не являются, строго говоря, k-out-of-n системами. С ростом различий между используемым алгоритмом и реальной системой погрешность результата увеличивается [3].

В связи с этим интерес представляют графо-логические модели (далее GL-модели), которые являются более универсальными [4, 5]. Расчет надежности системы выполняется путем проведения статистических экспериментов с GL-моделью, и его сложность в большей мере зависит от сложности GL-модели и в меньшей – от надежностных характеристик компонентов системы.

Существенным преимуществом GL-моделей является также сравнительная простота их преобразования при необходимости отображения трансформации базовых систем в небазовые [4].

В данной работе представлена GL-модель для расчета надежности комбинированных 3-out-of-n:F и инверсно-последовательных 3_{ic}-out-of-n:G систем.

1. Основные определения

Система, состоящая из n компонентов и являющаяся работоспособной в случае, если не менее

k ее компонентов функционируют надлежащим образом, называется k-out-of-n:G («is Good»).

Система, которая состоит из n компонентов и которая выходит из строя в случае, если не менее k ее компонентов отказали, называется k-out-of-n:F («Fails»).

Исходя из данных определений, можно сделать вывод, что системы k-out-of-n:G и (n-k+1)-out-of-n:F являются эквивалентными, поэтому нередко такие системы обобщенно называют k-out-of-n.

Графо-логическая модель (далее GL-модель) системы, состоящей из n процессоров, представляет собой неориентированный граф G, каждому ребру которого соответствует булева функция. Аргументами рёберных функций являются индикаторные переменные x_i ($i = 1, \dots, n$), равные 1 (i-й элемент системы работоспособен) или 0 (i-й элемент системы вышел из строя). Ребро удаляется из графа GL-модели, если соответствующая ему рёберная функция принимает значение 0. Связность графа моделирует работоспособность системы.

Последовательная система k_c-out-of-n представляет собой упорядоченную последовательность компонентов, которая работает (отказывает) тогда и только тогда, когда работоспособны (отказали) не менее чем k ее последовательных компонентов [2]. В зависимости от того, замкнута ли цепочка компонентов, последовательные системы делят на линейные и циклические.

Инверсно-последовательная система соединяет в себе одновременно свойства последовательных k_c-out-of-n:G и k_c-out-of-n:F систем. Инверсно-последовательная система k_{ic}-out-of-n:G – это упорядоченная последовательность компонентов, которая работает тогда и только тогда, когда отказали не более, чем k ее последовательных компонентов. Инверсно-последовательная система является разно-

$$2k_i + 2k_j + 1 = nm_1 + nm_2,$$

где $m_1 \in \{0, 1\}$; $m_2 = 1 - m_1$.

$$\text{Тогда } 2(k_i + k_j) + 1 = n; \quad k_i + k_j = \frac{n-1}{2}.$$

Последнее равенство всегда имеет решение для заданных значений k_i и k_j .

Вернемся к доказательству утверждения 3. Пусть отказали модули с номерами i_1, i_2, i_3 . Рассмотрим различные варианты взаимоположения номеров отказавших модулей.

1) Пусть

$$\begin{cases} x_{i_2} \in T_{i_1} \\ x_{i_3} \in T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i_1} \notin T_{i_2}, x_{i_1} \notin T_{i_3} \\ x_{i_2} \in T_{i_1}, x_{i_2} \in T_{i_3} \\ x_{i_3} \in T_{i_1}, x_{i_3} \notin T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{i_1} = 0; \\ h_{i_2} = 1; \\ h_{i_3} = 0. \end{cases}$$

2) Пусть $x_{i_2} \notin T_{i_1}; x_{i_3} \notin T_{i_1}$.

а) $i_2 = (i_1 + 1) \bmod n$:

$$\begin{cases} x_{i_2} \notin T_{i_1} \\ x_{i_3} \notin T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i_1} \notin T_{i_2}, x_{i_1} \in T_{i_3} \\ x_{i_2} \notin T_{i_1}, x_{i_2} \notin T_{i_3} \\ x_{i_3} \notin T_{i_1}, x_{i_3} \in T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{i_1} = 1; \\ h_{i_2} = 0; \\ h_{i_3} = 0. \end{cases}$$

Граф теряет связность, так как две реберные функции принимают значение 0.

б) $i_2 \neq (i_1 + 1) \bmod n$:

$$\begin{cases} x_{i_2} \notin T_{i_1} \\ x_{i_3} \notin T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i_1} \in T_{i_2}, x_{i_1} \in / \notin T_{i_3} \\ x_{i_2} \notin T_{i_1}, x_{i_2} \in T_{i_3} \\ x_{i_3} \notin T_{i_1}, x_{i_3} \notin T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{i_2} = 1; \\ h_{i_3} = 0; \\ h_{i_3} = 0. \end{cases}$$

3) Пусть $x_{i_2} \notin T_{i_1}; x_{i_3} \notin T_{i_1}$:

а) $i_2 = (i_1 + 1) \bmod n$:

$$\begin{cases} x_{i_2} \notin T_{i_1} \\ x_{i_3} \notin T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i_1} \notin T_{i_2}, x_{i_1} \in T_{i_3} \\ x_{i_2} \notin T_{i_1}, x_{i_2} \notin T_{i_3} \\ x_{i_3} \notin T_{i_1}, x_{i_3} \in T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{i_1} = 1; \\ h_{i_2} = 0; \\ h_{i_3} = 0. \end{cases}$$

б) $i_2 \neq (i_1 + 1) \bmod n$

$$\begin{cases} x_{i_2} \notin T_{i_1} \\ x_{i_3} \in T_{i_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i_3} \in T_{i_1}; \\ x_{i_2} \in T_{i_3}; \\ x_{i_3} \in T_{i_2}. \end{cases}$$

В последнем случае значение 0 принимают либо 2, либо 3 функции, одна из которых всегда h_{i_1} , т.е. граф модели теряет связность.

Очевидно, что при отказе более 3 модулей с любым взаимоположением граф модели МНЧ теряет связность.

Рассмотренные в утверждениях 1-3 случаи представляют все возможные варианты распределе-

ния отказов в системе ШЧ, что доказывает адекватность модели.

Для получения модели линейной комбинированной 3-out-of-n:F, 3_{ic}-out-of-n:G системы с нечетным количеством модулей достаточно преобразовать формулу первой реберной функции к следующему виду:

$$T_1 = (x_2 \vee x_n) \prod_{k=1, \frac{n-3}{2}}^{n-3} x_{(1+2k) \bmod n + 1}.$$

2.2. Системы с четным количеством модулей

Покажем, что GL-модель (M_4) циклической комбинированной 3-out-of-n:F, 3_{ic}-out-of-n:G системы с четным количеством модулей (S_4) может быть представлена циклическим неориентированным графом, каждому ребру которого приписывается функция вида:

$$h_i = x_i \vee T_{i1} T_{i2} \vee p_i, \quad (5)$$

где n – количество вершин графа G ;

$$i = 1, \dots, n;$$

$$T_{ii} = \prod_{k=1, \frac{n-1}{2}}^{n-1} (i + 2k_i); \quad (6)$$

$$T_{2i} = \prod_{s=1, \frac{i-1}{2}}^{i-1} [(i + 2(i \bmod 2) - 1 - 2s_i)]; \quad (7)$$

$$p_i = \begin{cases} 0, & \text{äëÿ } i \neq n; \\ x_1 \vee x_n \vee x_2 x_{n-1} & \text{äëÿ } i = n, \end{cases}$$

$$\left] \frac{n-i}{2} \left[\text{— целая часть дроби } \frac{n-i}{2}.$$

Несмотря на видимую громоздкость формул (6) и (7), представленная GL-модель достаточно проста.

Пример 2: реберные функции GL-модели циклической комбинированной 3-out-of-12:F, 3_{ic}-out-of-12:G системы:

$$\begin{aligned} h_1 &= x_1 \vee x_3 x_5 x_7 x_9 x_{11} & h_7 &= x_7 \vee x_9 x_{11} x_2 x_4 \\ h_2 &= x_2 \vee x_4 x_6 x_8 x_{10} x_{12} & h_8 &= x_8 \vee x_{10} x_{12} x_1 x_3 x_5 \\ h_3 &= x_3 \vee x_5 x_7 x_9 x_{11} & h_9 &= x_9 \vee x_{11} x_2 x_4 x_6 \\ h_4 &= x_4 \vee x_6 x_8 x_{10} x_{12} x_1 & h_{10} &= x_{10} \vee x_{12} x_1 x_3 x_5 \\ & & & x_7 \\ h_5 &= x_5 \vee x_7 x_9 x_{11} x_2 & h_{11} &= x_{11} \vee x_2 x_4 x_6 x_8 \\ h_6 &= x_6 \vee x_8 x_{10} x_{12} x_1 x_3 & h_{12} &= x_{12} \vee x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \\ & & & \vee x_1 \vee x_{12} \vee x_2 x_{11} \end{aligned}$$

Для обоснования адекватности модели МЧ поведению системы ШЧ в потоке отказов нам понадобятся утверждения 4-6.

Утверждение 4: при отказе любых двух модулей i и j системы ШЧ граф модели МЧ остается связным.

Доказательство: предположим обратное. Пусть при появлении двух отказов граф GL-модели теряет

связность, т.е. более чем одна реберная функция принимает значение 0:

$$\begin{cases} h_i = 0; \\ h_j = 0. \end{cases}$$

Для этого достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих трех условий:

$$1) \text{ Пусть } \begin{cases} x_i \in T_{1j} \\ x_j \in T_{1i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = j + 2k_j; \\ j = i + 2k_i. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} i &= j + 2k_j = i + 2k_i + 2k_j, \\ 2k_i + 2k_j &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку известно, что k_i, k_j — целые числа, большие 0, то равенство (8) не имеет решения.

2) Пусть

$$\begin{cases} x_i \in T_{1j} \\ x_j \in T_{2i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = j + 2k_j; \\ j = i + 2(i \bmod 2) - 1 - 2s_i. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} i &= j + 2k_j = i + 2(i \bmod 2) - 1 - 2s_i + 2k_j, \\ 2k_j + 2(i \bmod 2) - 2s_i &= 1, \\ k_j + (i \bmod 2) - s_i &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку известно, что k_j, s_i и $i \bmod 2$ — целые числа, то равенство (9) не имеет решения.

Пусть

$$\begin{cases} x_i \in T_{2j} \\ x_j \in T_{2i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = j + 2(j \bmod 2) - 1 - 2s_j; \\ j = i + 2(i \bmod 2) - 1 - 2s_i. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} i &= j + 2(j \bmod 2) - 1 - 2s_j = \\ &= i + 2(i \bmod 2) - 1 - 2s_i + \\ &+ 2(i \bmod 2) - 1 - 2s_i + 2k_j, \\ s_i + s_j + 1 &= i \bmod 2 + j \bmod 2. \end{aligned}$$

Из формул (6) и (7) следует, что, если i — четное число, то T_{1i} также содержит четные элементы, а T_{2i} — нечетные. И наоборот: если i — нечетное число, то T_{1i} также содержит нечетные элементы, а T_{2i} — четные. При этом элементы из T_{1i} больше i , а элементы из T_{2i} меньше i .

Следовательно, i — четное число, то j — нечетное, и наоборот. Т.е.

$$\begin{aligned} i \bmod 2 + j \bmod 2 &= 1; \\ s_i + s_j + 1 &= 1; \\ s_i + s_j &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку известно, что s_i, s_j — целые числа, большие 0, то равенство (10) не имеет решения. Ни одно из равенств (8), (9), (10) не имеет решения,

следовательно, предположение, высказанное в начале доказательства, неверно, а утверждение 4 справедливо. Приведенное доказательство является достаточным для любого значения p_i .

Утверждение 5: при отказе любых трех последовательных модулей системы СЧ граф модели МЧ остается связным.

Доказательство: пусть отказали последовательные модули с номерами i_1, i_2, i_3 , где

$$\begin{aligned} i_2 &= i_1 \bmod n + 1; \\ i_3 &= i_1 \bmod n + 2. \end{aligned}$$

Из формул (6) и (7) следует, что для всех комбинаций (i_1, i_2, i_3) , кроме $(n-1, n, 1)$ и $(n, 1, 2)$, справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} x_{i_1} \notin T_{1i_2}, x_{i_1} \notin T_{2i_2}, x_{i_1} \notin T_{1i_3}, x_{i_1} \notin T_{2i_3}; \\ x_{i_2} \notin T_{1i_1}, x_{i_2} \notin T_{2i_1}, x_{i_2} \notin T_{1i_3}, x_{i_2} \notin T_{2i_3}; \\ x_{i_3} \in T_{1i_1}, x_{i_3} \notin T_{2i_1}, x_{i_3} \notin T_{1i_2}, x_{i_3} \notin T_{2i_2}. \end{cases}$$

т.е., значение 0 принимает только одна функция h_{i_1} и граф модели остается связным.

В случае одновременного отказа модулей $(n-1, n, 1)$:

$$\begin{cases} x_{i_1} \notin T_{1i_2}, x_{i_1} \notin T_{2i_2}, x_{i_1} \in T_{1i_3}, x_{i_1} \notin T_{2i_3}; \\ x_{i_2} \notin T_{1i_1}, x_{i_2} \notin T_{2i_1}, x_{i_2} \notin T_{1i_3}, x_{i_2} \notin T_{2i_3}; \\ x_{i_3} \notin T_{1i_1}, x_{i_3} \notin T_{2i_1}, x_{i_3} \in T_{1i_2}, x_{i_3} \notin T_{2i_2}. \end{cases}$$

т.е., значение 0 принимает только функция h_{i_3} , а функция h_{i_2} равна 1 за счет компоненты p_{i_2} , и граф модели остается связным.

Аналогично, в случае одновременного отказа модулей $(n, 1, 2)$:

$$\begin{cases} x_{i_1} \notin T_{1i_2}, x_{i_1} \notin T_{2i_2}, x_{i_1} \in T_{1i_3}, x_{i_1} \notin T_{2i_3}; \\ x_{i_2} \notin T_{1i_1}, x_{i_2} \in T_{2i_1}, x_{i_2} \notin T_{1i_3}, x_{i_2} \notin T_{2i_3}; \\ x_{i_3} \notin T_{1i_1}, x_{i_3} \notin T_{2i_1}, x_{i_3} \notin T_{1i_2}, x_{i_3} \notin T_{2i_2}, \end{cases}$$

т.е., значение 0 принимает только функция h_{i_2} , а функция h_{i_1} равна 1 за счет компоненты p_{i_2} , и граф модели остается связным.

Утверждение 6: при отказе любых трех последовательных модулей системы СЧ граф модели МЧ теряет связность.

Доказательство: ход доказательства аналогичен доказательству утверждения 3. Очевидно, что при отказе более 3 модулей с любым взаимоположением граф модели МЧ теряет связность.

Рассмотренные в утверждениях 4-6 случаи представляют все возможные варианты распределения отказов в системе СЧ, что доказывает адекватность модели. Для получения модели линейной

комбинированной 3-out-of-n:F, 3ic-out-of-n:G системы с четным количеством модулей достаточно использовать следующее значение p_i :

$$p_i = \begin{cases} 0, & \text{для } i \neq n; \\ \frac{1}{x_1 \vee x_{n-1} \vee x_n}, & \text{для } i = n. \end{cases}$$

Заключение

В данной работе предложена GL-модель системы, которая остается работоспособной при появлении любого из двукратных отказов либо отказов трех компонентов, расположенных последовательно. Важным достоинством таких GL-моделей является простота формирования рёберных функций и определения связности графа G, что приводит к сокращению времени проведения статистического эксперимента с моделью и, следовательно, повышению точности расчета надежности системы за заданный промежуток времени. Следует отметить, что представленные в работе результаты были получены в ходе исследований, связанных с преобразованием моделей базовых систем в модели небазовых путем изменения рёберных функций. Основой для описан-

ной модели послужила GL-модель базовой 3-out-of-n:F системы, предложенной в [5].

Литература

1. Gera E. Combined k -out-of- n :G, and Consecutive k_c -out-of- n :G systems / E. Gera // *IEEE Transactions on Reliability*. – 2004. – Vol. R-53. – P. 523-531.
2. Lin M. An $O(k^2 \log(n))$ algorithm for computing the reliability of consecutive- k -out-of- n :F systems / Lin M.S. // *IEEE Transactions on Reliability*. – 2004. – Vol. R-53. – P. 3-6.
3. Behr A. Two formulas for computing the reliability of incomplete k -out-of- n :G systems / Behr A., L. Caraminopoulos // *IEEE Transactions on Reliability*. – 1997. – 46. – 1997. – P. 421-429.
4. Романкевич А.М. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем / А.М. Романкевич, Л.Ф. Карачун, В.А. Романкевич // *Электронное моделирование*. – 2000. – Т. 23, № 1. – С.102-111.
5. Романкевич О.М. До питання побудови моделі поведінки багатомодульних систем / О.М. Романкевич, Л.Ф. Карачун, В.О. Романкевич // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. – 1998. – № 1. – с. 38-40.

Поступила в редакцию 30.01.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры СКС, В.Г. Зайцев, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев.

GL-МОДЕЛЬ КОМБІНОВАНИХ 3-OUT-OF-N:F, 3_{IC}-OUT-OF-N:G СИСТЕМ

В.О. Романкевич, Т.Г. Сапсай, Г.А. Єфремова

Сьогодні системи k -out-of- n мають широке застосування. Для розрахунку надійності таких систем існує немало алгоритмів, проте більшість з них орієнтовані на системи, елементи яких мають однакову ймовірність відмови. GL-моделі в цьому сенсі є більш універсальними: розрахунок надійності системи виконується шляхом проведення статистичних експериментів з моделлю та може бути виконаний для системи з різними характеристиками надійності її компонентів. В статті наведено алгоритм побудови GL-моделі для розрахунку надійності комбінованих 3-out-of- n :F, 3_{ic}-out-of- n :G систем. Доводиться адекватність моделі поведінки системи в потоці відмов. Вводиться поняття інверсно-послідовної k_{ic} -out-of- n системи.

Ключові слова: відмовостійкі багатопроцесорні системи, графо-логічні моделі, бульові функції, надійність.

GL-MODEL OF COMBINED 3-OUT-OF-N:F, 3_{IC}-OUT-OF-N:G SYSTEMS

V.A. Romankevich, T.G. Sapsay, A.A. Yefremova

Currently k -out-of- n systems are widely used. There are a lot of algorithms for such systems reliability estimation but most of them are designed for systems which all components have the same fault probability. The GL-models are more universal from this point of view: reliability is calculated by performing of statistic experiments with model and may be estimated for systems which components have different fault probability. In this article the GL-model of combined 3-out-of- n :F, 3_{ic}-out-of- n :G systems is described. It's shown that the model reflects system's behavior in faults flow sufficiently. The inversed-consecutive k_{ic} -out-of- n system notion is introduced.

Key words: fault-tolerant multiprocessor systems, graph-logical models, Boolean functions, reliability.

Романкевич Віталій Алексеевич – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри СКС Национального технічного університету України «КПИ», Київ, Україна, e-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua.

Сапсай Тат'яна Григорівна – канд. техн. наук, доцент, доц. кафедри СКС Национального технічного університету України «КПИ», Київ, НТУУ «КПИ», Україна.

Єфремова Анна Анатолівна – аспірантка Национального технічного університету України «КПИ», Київ, НТУУ «КПИ», Україна.