УДК 621.396.96

Ю.А. КОПЫЛОВ[1], В.И. КОНОВАЛОВ[2]

[1]Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова Национальной Академии наук Украины, Украина
[2]Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка, Украина

ОБРАБОТКА ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

При обработке сигналов, результатов экспериментов, компьютерном моделировании и т.д. часто приходится иметь дело с массивами чисел представленных в виде матриц, т.е. с двумерными массивами. Над данными, которые представлены в таких матрицах, часто приходится производить такие операции как двумерные прямые и обратные преобразования Фурье (например, сигнала, зависящего от времени и пространственной координаты), преобразования Гильберта, задержки сигнала по одной или сразу по обеим координатам, в том числе и на значения меньшие, чем дискрет отсчетов сигнала по этим координатам представленных в матрице, а также операций дифференцирования и интегрирования. В работе показано как с помощью матричных операторов компактно и просто записываются и выполняются все упомянутые операции сразу над всей исходной двумерной матрицей данных, что может значительно упростить рутинную работу по обработке огромных массивов данных или многочисленном моделировании, например в таких популярных средах как MathCad, MatLab, MAPLE.

Ключевые слова: *матричная алгебра, матричные операторы, дискретные отсчеты, обработка информации, преобразование Фурье, циклический сдвиг.*

Введение

Любой измеренный во времени или пространстве физический процесс на конечной области определения одного или двух аргументов можно без потери информации представить в виде матрицы дискретных отсчетов следующих с частой Найквиста [1, 2]. Такая прямоугольная матрица M размером T × X состоит из T вектор-строк, содержащих X элементов и X вектор-столбцов из T элементов.

Операции обработки информации, представленной в виде двухмерной решетчатой функции прямоугольной матрицы, целесообразно свести к матричной алгебре. Почти все практически важные математические операции над такими матрицами можно реализовать по правилам матричной алгебры.

Метод конечных разностей, широко применяемый в дискретной математике [3], часто приводит к уменьшению размерности преобразованных матриц, а значит – к потере информации.

Ниже рассмотрим преимущества и возможности алгебры матричных операторов в сравнении с методами конечных разностей.

Предложенная ниже методика, основанная на матричных преобразованиях, позволит избежать информационных потерь и других недостатков метода конечных разностей.

1. Матричная форма преобразования Фурье

Пусть какая либо информация представлена прямоугольной матрицей M размером T × X. Если каждую строку отождествить с временными отсчетами t, а столбцы – с пространственными x, то элемент матрицы M можно обозначить, как $M_{t,x}$. Дискретные аргументы t и x на конечном интервале задаются как

$$t = 0..T - 1, \qquad x = 0..X - 1,$$

где T – число строк в матрице M, а X – число столбцов в матрице M.

Дискретные аргументы t и x принимают целочисленные значения от 0 до T – 1 и от 0 до X – 1 соответственно. t – соответствует номеру строки (номеру временного отсчета) для данной пространственной координаты x, а x – соответствует номеру столбца (номеру пространственного отсчета) для данного временного отсчета t. Матрицу M, в которой элементы $M_{t,x}$ состоят из дискретных отсчетов исходной функции, назовем прямоотсчетной.

T и X можно отождествить с периодами параметра t [0, T – 1] и x [0, X – 1] соответственно. Введем следующие вспомогательные гармонические функции:

$$U_{t,n} = \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n\cdot t}{T}\right),\ \ V_{t,n} = \sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n\cdot t}{T}\right),\ (1)$$

$$N_{x,m} = \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot m\cdot x}{X}\right), L_{x,m} = \sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot m\cdot x}{X}\right),(2)$$

где $n = c_1..c_2$, $m = d_1..d_2$ – номера временных и пространственных гармоник ряда Фурье соответственно;

c_1, d_1 – нижние значения определены в пределах $0 \le c_1 \le c_2$, $0 \le d_1 \le d_2$;

$c_2 \le \frac{T-1}{2}$ и $d_2 \le \frac{X-1}{2}$ – числа натурального ряда;

Взаимно ортогональные функции $U_{t,n}$, $V_{t,n}$ в (1) и $N_{x,m}$, $L_{x,m}$ в (2) являются также матрицами, дают возможность определять значение одной функции при фиксированном значении другой и потребуются в процессе дальнейшего представления преобразования Фурье в матричной форме.

Наибольшие значения параметров n и m выбраны в соответствии с теоремой отсчетов Котельникова (максимальное значение частоты в информационной матрице M в 2 раза меньше количества отсчетов по времени или по пространству). С помощью вспомогательных функций (1) и (2), информационную матрицу M можем разложить в ряд Фурье, как по временной, так и по пространственной координате следующим образом.

$$A = \frac{2}{T}\cdot U^T\cdot M,\ A^0 = \frac{1}{T}\cdot\left(U^{\langle 0\rangle}\right)^T\cdot M,$$

$$B = \frac{2}{T}\cdot V^T\cdot M \qquad (3)$$

где A – матрица коэффициентов Фурье действительной части спектра;

A^0 – матрица коэффициентов Фурье для нулевых гармоник действительной части спектра (так производится переопределение матрицы A только в части 0-го коэффициента);

B – матрица коэффициентов Фурье мнимой части спектра;

$(\cdot)^{\langle 0\rangle}$ – оператор верхнего индекса для извлечения в данном случае нулевого столбца из матрицы;

$(\cdot)^T$ – оператор транспонирования матрицы.

Выражения (3) для коэффициентов Фурье во временной области, полученные *с помощью матричных операторов,* являются достаточно простыми и полностью эквивалентны следующим более привычным записям дискретного преобразования Фурье

$$A_{n,x} = \frac{2}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1} U_{t,n}\cdot M_{t,x},\ \ A_{0,x} = \frac{1}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1} U_{t,0}\cdot M_{t,x},$$

$$B_{n,x} = \frac{2}{T}\cdot\sum_{t=0}^{T-1} V_{t,n}\cdot M_{t,x} \qquad (4)$$

Выражения для коэффициентов Фурье в области пространственных координат *с помощью матричных операторов* будут выглядеть следующим образом

$$C = \frac{2}{X}\cdot M\cdot N,\ C^0 = \frac{1}{X}\cdot M\cdot N^{\langle 0\rangle},\ D = \frac{2}{X}\cdot M\cdot L,\ (5)$$

где C, D – матрицы коэффициентов Фурье действительной и мнимой части спектра соответственно;

C^0 – матрица коэффициентов Фурье для нулевых гармоник действительной части спектра (так производится переопределение матрицы C только в части 0-го коэффициента).

Обратим внимание, что умножение на информационную матрицу M вспомогательных матриц N и L производится справа и без транспонирования.

Выражения (5) также как и (4) эквивалентны следующим дискретным преобразованиям Фурье

$$C_{t,m} = \frac{2}{X}\cdot\sum_{x=0}^{X-1} M_{t,x}\cdot N_{x,m},$$

$$C_{t,0} = \frac{1}{X}\cdot\sum_{x=0}^{X-1} M_{t,x}\cdot N_{x,0},$$

$$D_{t,m} = \frac{2}{X}\cdot\sum_{x=0}^{X-1} M_{t,x}\cdot L_{x,m} \qquad (6)$$

Амплитудный спектр временной функции может быть вычислен с помощью хорошо известного выражения

$$c^t{}_{n,x} = \sqrt{\left(A_{n,x}\right)^2 + \left(B_{n,x}\right)^2},$$

а пространственной функции – с помощью выражения

$$c^x{}_{m,t} = \sqrt{\left(C_{m,t}\right)^2 + \left(B_{m,t}\right)^2}$$

Напомним, что в выражениях для c^t и c^x, t и x – это не показатели степени, а индекс, указывающий, что выражения относятся ко временной или пространственной области соответственно.

При помощи прямого преобразования Фурье любая аналитическая функция, определенная на конечном интервале может быть представлена рядом Фурье.

Таким образом, наша информационная матрица M может быть представлена во временной области по заданному спектру с помощью матриц A и B рядом Фурье, записанном в матричном виде следующим образом

$$M = U \cdot A + V \cdot B \tag{7}$$

Для пространственных координат будет аналогичное матричное выражение, но уже при заданном пространственном спектре с помощью матриц C и D

$$M = C \cdot N^T + D \cdot L^T \tag{8}$$

Матричные выражения прямого преобразования Фурье (7) и (8) эквивалентны следующим дискретным Фурье преобразованиям для временной и пространственной области соответственно

$$M_{t,x} = \sum_{n=c_1}^{c_2} \left(U_{t,n} \cdot A_{n,x} + V_{t,n} \cdot B_{n,x} \right),$$

$$M_{t,x} = \sum_{m=d_1}^{d_2} \left(C_{t,m} \cdot N_{m,x} + D_{t,m} \cdot L_{m,x} \right) \tag{9}$$

Напомним, что матрицы коэффициентов Фурье $A_{n,x}$ и $C_{t,m}$ переопределены в (3) и (5) для 0-вых коэффициентов.

Итак, прямоотсчетная матрица M, элементы которой $M_{t,x}$ являются отсчётами по параметрам t и x, можно представить через спектры столбцов A и B или спектры строк C и D.

Преимущества спектрального представления дискретной информации общеизвестны, и поэтому их специально оговаривать не будем.

Нашей задачей было показать, что прямое и обратное дискретные преобразования Фурье достаточно просто и удобно реализуются при помощи матричных операций.

Ниже покажем, что и многие другие операции необходимые при обработке массивов дискретной информации представленных в виде матриц, реализуются также просто на языке матричной алгебры.

2. Операция тождественного преобразования, преобразования Гильберта и циклического сдвига по номерам столбцов и строк.

Воспользуемся матричными операторами, определенными в (1), (2) и запишем новые обобщенные операторы:

$$Q_{n,t} = \cos\left[\frac{2\pi \cdot n \cdot (t-\tau)}{T} \right],$$

$$G_{n,t} = \sin\left[\frac{2\pi \cdot n \cdot (t-\tau)}{T} \right] \tag{10}$$

$$R_{m,x} = \cos\left[\frac{2\pi \cdot m \cdot (x-\chi)}{X} \right],$$

$$W_{m,x} = \sin\left[\frac{2\pi \cdot m \cdot (x-\chi)}{X} \right] \tag{11}$$

где константы τ, χ – произвольные действительные числа, ***не обязательно целые***, заданные на интервалах [– (T – 1), (T – 1)] и [– (X – 1), (X – 1)] соответственно.

Теперь зададим следующие вспомогательные операторы как:

$$Ku = \frac{2}{T} \cdot \left[U^T \cdot U + V^T \cdot V \right],$$

$$Kv = \frac{2}{T} \cdot \left[V^T \cdot U - U^T \cdot V \right] \tag{12}$$

$$Qu = \frac{2}{X} \cdot \left[N^T \cdot N + L^T \cdot L \right],$$

$$Qv = \frac{2}{X} \cdot \left[L^T \cdot N - N^T \cdot L \right] \tag{13}$$

$$Wu = \frac{2}{T} \cdot \left[U^T \cdot Q + V^T \cdot G \right],$$

$$Wv = \frac{2}{X} \cdot \left[N^T \cdot R + L^T \cdot W \right] \tag{14}$$

Операторы, представленные выражениями (12), (13), (14) – это квадратные матрицы. Операторы Ku, Kv, Wu, имеющие размер T × T, применяются для ***тождественного преобразования, преобразования Гильберта*** и ***циклического сдвига*** по номерам столбцов и строк прямоотсчетной прямоугольной матрицы M, вектор-столбцы которой содержат T отсчетов. Преобразование матрицы M производят путем умножения на нее слева на соответствующий преобразующий оператор Ku, Kv или Wu. В результате преобразования получают новые матрицы тех же размеров, что и исходная матрица M:

$$Hu = Ku \cdot M, \quad Hv = Kv \cdot M, \quad Hw = Wu \cdot M \tag{15}$$

Матричный оператор Ku является ***собственным*** к любой прямоугольной матрице M, составленной из T строк, т.е. $Hu = \lambda_{Ku} \cdot M$, где λ_{Ku} – скалярное собственное значение матрицы M. Такое преобразование назовем ***тождественным*** левосторонним преобразованием.

Матричный оператор Kv преобразует спектры прямоугольной матрице M, составленной из T строк, в соответствии с известным ***преобразованием Гильберта***. Если матрица M может быть представлена рядом Фурье (9), то в результате преобразования Гильберта получим матрицу M^*, которая может быть записана следующим рядом:

$$M^*_{t,x} = \sum_{n=1}^{c_2} \left(A_{n,x} \cdot V_{n,t} + B_{n,x} \cdot U_{n,t} \right) \tag{16}$$

Матрице M соответствует действительный спектр A и мнимый – B, а матрице M^* наоборот, действительному – соответствует спектр B, а мнимому – A. Можем записать

$$Hv = \lambda_{Kv} \cdot M^{*t},$$

где λ_{Kv} – собственное значение сопряженной матрицы M^* (константа). Верхний индекс $(\cdot)^t$ для матрицы M^* – обозначает, что преобразования производятся во временной области.

Для области пространственных координат будет применен индекс $(\cdot)^x$

Матричный оператор Wu – оператор циклического сдвига. В отличие от дискретного циклического сдвига, применяемого при использовании метода конечных разностей, параметр τ – *не обязательно целое число*. Это свойство матричных операторов является важным преимуществом перед программными, которые используют при методе конечных разностей и которые реализуют только целочисленные циклические сдвиги.

Для преобразования матрицы M по параметру x применяют операторы Qu, Qv и Wv. Но в отличие от преобразований (15), при преобразовании матрицы M по столбцам ее умножают на преобразующие операторы справа.

$$Zu = M\cdot Qu, \quad Zv = M\cdot Qv, \quad Zw = M\cdot W^{\chi} \qquad (17)$$

По аналогии с (15) можем записать

$$Zu = \lambda_{Qu} \cdot M,$$

т.е. оператор Zu реализует ***собственное преобразование*** матрицы M в области пространственных координат x; λ_{Qu} – собственное значение матрицы M (константа).

$$Zv = \lambda_{Qv} \cdot M^{*x},$$

где λ_{Qv} – собственное значение матрицы M^{*x}.

По аналогии с (15) оператор Qv реализует преобразование Гильберта по строкам, в результате такого преобразования Гильберта получим матрицу M^*, которая может быть записана следующим рядом:

$$M^*_{t,x} = \sum_{m=1}^{d_2}\left(C_{t,m}\cdot V_{x,m} + D_{t,m}\cdot U_{x,m}\right)$$

Также как и оператор Wu в (15), оператор Wv осуществляет циклический сдвиг по строкам на величину равную χ.

3. Операторы дифференцирования и интегрирования.

Введем вспомогательные операторы дифференцирования и интегрирования.

Оператор дифференцирования по параметру t, т.е. по строкам, запишем как

$$D^t = -\frac{2}{T}\left(U\cdot\frac{d}{dx}U + V\cdot\frac{d}{dx}V\right) \qquad (18)$$

Аналогично, оператор дифференцирования по параметру *x*, т.е. по столбцам, запишется как

$$D^x = -\frac{2}{X}\left(N\cdot\frac{d}{dt}N + L\cdot\frac{d}{dt}L\right) \qquad (19)$$

Оператор интегрирования по параметру t, т.е. по строкам, запишем следующим образом

$$I^t = -\frac{2}{T}\cdot\left(U\cdot\int Udt + V\cdot\int Vdt\right) \qquad (20)$$

А оператор интегрирования по параметру *x*, т.е. по столбцам, как

$$I^x = -\frac{2}{X}\cdot\left(N\cdot\int Ndx + L\cdot\int Ldx\right) \qquad (21)$$

Используя введенные операторы, операция дифференцирования матрицы M по строкам запишется в следующем простом виде

$$\frac{d}{dt}M = D^t\cdot M\cdot\lambda_{D^t} \qquad (22)$$

где λ_{D^t} – скалярное собственное число матрицы D^t.

Выражение для дифференцирования матрицы M по столбцам запишется следующим образом

$$\frac{d}{dx}M = M\cdot D^x\cdot\lambda_{D^x}, \qquad (23)$$

где λ_{D^x} – скалярное собственное число матрицы D^x.

Чтобы проинтегрировать матрицу M по строкам можно воспользоваться выражением

$$\int Mdt = I^t\cdot M\cdot\lambda_{I^t} \qquad (24)$$

где λ_{I^t} – скалярное собственное число матрицы I^t. А для интегрирования матрицы M по столбцам – выражением

$$\int Mdx = M\cdot I^x\cdot\lambda_{I^x}, \qquad (25)$$

где λ_{I^x} – скалярное собственное число матрицы I^x.

Чтобы реализовать смешанное двойное дифференцирование по t и по x, т.е. и по строкам и по столбцам, можно воспользоваться следующим матричным выражением

$$\frac{d^2}{dt\cdot dx}M = D^t\cdot M\cdot D^x\cdot\lambda_{D^t}\cdot\lambda_{D^x}, \qquad (26)$$

А чтобы реализовать смешанное двойное интегрирование по t и по x, т.е. и по строкам и по столбцам, – выражением

$$\int\int Mdtdx = I^t\cdot M\cdot I^x\cdot\lambda_{I^t}\cdot\lambda_{I^x} \qquad (27)$$

Заключение

В работе показано, что с помощью матричной алгебры можно значительно упростить записи при обработке двухмерных массивов данных.

Были получены выражения для наиболее употребительных операциях, используемых в практике экспериментатора – прямых и обратных преобразований Фурье, операций тождественного преобразования, преобразования Гильберта, задержки сигнала на произвольное значение, операций дифференцирования и интегрирования.

Литература

1. Коновалов В.М. Расширение полосы рабочих частот цифровых линий задержки / В.М. Коновалов, В.Е. Щербаков, В.И. Коновалов // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2006. - № 5 (17). – С. 205-210.

2. Lukin K.A. Reception of Noise Radar Returns by the relay type correlation receiver // K.A. Lukin, A.A. Mogyla // Proc. of the 1 International Workshop on the Noise Radar Technology, Yalta, Ukraine. – 2002. – P. 256-263.

3. Радиотехнические цепи и сигналы / Под редакцией К.А. Самойло. - М.: Радио и связь, 1982.

Поступила в редакцию 10.02.2009

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедры прикладной математики, информатики и математического моделирования Г.М. Губреев, Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка, Полтава, Украина.

ОБРОБКА ДИСКРЕТНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Ю.О. Копилов, В.І. Коновалов

При обробці сигналів, результатів експериментів, комп'ютерному моделюванні і т.д. часто доводиться мати справу з масивами чисел представлених у вигляді матриць, тобто з двовимірними масивами. Над даними, які представлені в таких матрицях, часто доводиться проводити такі операції як двомірні прямі та зворотні перетворення Фур'є (наприклад, сигналу, залежного від часу та просторової координати), перетворення Гілберта, затримки сигналу по одній або відразу по обох координатах, у тому числі і на значення менші, ніж дискрет відліків сигналу по цих координатах представлених в матриці, а також операцій диференціювання та інтегрування. У роботі показано як за допомогою матричних операторів компактно та просто записуються і виконуються всі згадані операції відразу над всією початковою двовимірною матрицею даних, що може значно спростити рутинну роботу по обробці величезних масивів даних або численного моделювання, наприклад в таких популярних середовищах як MathCad, MatLab, MAPLE.

Ключові слова: матрична алгебра, матричні оператори, дискретні відліки, обробка інформації, перетворювання Фур'є, циклічне зрушення.

PROCESSING OF DISCRETE INFORMATION BY MATRIX OPERATORS

Ju.A. Kopylov, V.I. Konovalov

At signal processing, results of experiments, computer simulation etc. it is often necessary to deal with arrays of numbers presented as matrices, i.e. with two-dimensional arrays. Over data which are presented in such matrixes, it is often necessary to make such operations as 2-D direct and reverse transformations of Fourier (for example, signal, time-dependent and the space co-ordinate), transformations of Hilbert, delays of signal on one or at once on both co-ordinates, including on values less, than increment counting out of signal on these co-ordinates presented in a matrix, and also operations of differentiation and integration. In this article is shown, as by matrix operators compact and simply written down and executed all mentioned operations at once over all initial 2-D array of data that can simplify considerably routine operation after processing of huge data arrays or numerous simulation, for example in such popular medium as MathCad, MatLab, MAPLE.

Key words: matrix algebra, matrix operators, discrete reading, information processing, Fourier transformation, cyclic shift.

Копылов Юрий Александрович – мл. научный сотрудник отдела радиофизической интроскопии Института радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова национальной Академии наук Украины, Харьков, Украина.

Коновалов Владимир Иванович – кандидат физ. мат. наук, доцент, доцент кафедры автоматики и электропривода Полтавского национального технического университета им. Юрия Кондратюка, Полтава, Украина, e-mail: konovalof@gmail.com; konovalov@ire.kharkov.ua.