УДК 621.03

Ю.Н. СОКОЛОВ, А.Ю. СОКОЛОВ, В.М. ИЛЮШКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ПРИРОДЫ И ОБЩЕСТВА. Часть 2. МОДЕЛЬ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА «ХИЩНИК – ЖЕРТВА» В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

Рассмотрены технологии математического и компьютерного моделирования экономического состояния производства в условиях конкуренции и процесса выравнивания цен. Показано, что для решения задач экономики можно использовать уравнения Лотки – Вольтерра и Холлинга – Тэннера, применяемые для модели «хищник – жертва». Предложены и исследованы схемы имитационного моделирования средствами MATLAB/Simulink (версия 7.6.0 (R2008a)). Приведены результаты моделирования экономических систем при различных параметрах модели. Анализ результатов выполнен с помощью временных функций и фазовых траекторий.

Ключевые слова: *уравнения Лотки – Вольтерра, модель Холлинга – Тэннера, синергетика, физическая экономика, аттрактор.*

Введение

Современная экономика относится к открытым динамическим системам. Она отличается своей непредсказуемостью в результате того, что ее «элементарной частицей» является такое высокоразвитое и сложно предсказуемое существо как человек. Понятие «открытая система» обозначает систему которая обменивается веществом и энергией с внешним, по отношению к системе миром, в отличие от закрытой системы, в которую и из которой ни вещество ни энергия не могут войти или выйти.

Прогнозированием и моделированием экономических процессов интенсивно занимается физическая экономика [1] и синергетика[1] [2].

Характерным для экономики является цикличность протекающих в ней процессов. По длительности периода циклические колебания могут быть определены как краткосрочные – около 3-5 лет; среднесрочные – около 7-11 лет; долгосрочные – 20-60 лет; вековые – 100-200 лет; тысячелетние – 1000 и более лет. Кроме того, могут быть выделены сезонные колебания, которые сами по себе не несут кризисных явлений в экономике; также велика степень вероятности наличия в будущем "супер-колебаний" с более продолжительными периодами [3].

Основными параметрами цикличности являются период, характеризующий повторяемость формирующих ее элементов и измеряемый единицами длины при ее пространственном проявлении и единицами времени при временном ее проявлении, а также амплитуда и фаза. Амплитуда служит интегральной мерой числа различных состояний экономической системы или мерой ее определенных социально-экономических параметров. Фаза характеризует пространственную или временную отдаленность текущего этапа развития циклического процесса от начала его возникновения и измеряется в долях главного параметра цикличности – периода.

На сегодняшний день существует множество подходов к причинам и описанию экономических циклов. Большинство моделей отличаются своеобразной сложностью моделирования, иногда необоснованностью, стохастичностью и неадекватностью предположений.

В последние десятилетия в экологии, экономике и других областях для имитационного моделирования и прогнозирования циклов широко применяется простейшая экологическая модель типа «хищник-жертва» [4], которая позволяет комплексно оценить динамику экономических процессов, выйти на равновесные уровни исследуемых конкурирующих систем и теоретически спрогнозировать и

[1] Синергетика (от греч. – «совместно» и «действующий») – междисциплинарное направление научных исследований, задачей которого является изучение природных явлений и процессов на основе принципов самоорганизации систем, наука, занимающаяся изучением процессов самоорганизации и возникновения, поддержания, устойчивости и распада структур самой различной природы. Основное понятие синергетики – определение структуры как состояния, возникающего в результате поведения многоэлементной или многофакторной среды, не демонстрирующей стремления к усреднению термодинамического типа.

управлять поведением основных параметров модели. Модель Лотки – Вольтерра хорошо иллюстрирует смену состояний эколого-экономической системы при изменении ее управляющих параметров. Ввиду сложности и нелинейности таких моделей могут быть использованы различные современные компьютерные пакеты. В данной статье, как и в работе [4], используется модели Лотки – Вольтерра и пакет MATLAB/Simulink для исследования динамического изменения капитала в условиях конкуренции и для решения задачи выравнивания цен.

1. Моделирование системы «хищник-жертва» в экономике для конкурирующих предприятий

В результате изучения развития конкурирующих популяций оказалось, что элементарные процессы борьбы за существование подчиняются вполне определенным количественным законам. Использование математики при изучении динамики популяций имеет одно неоспоримое преимущество в сравнении с многими другими методами. Оно заключается в возможности постановки компьютерных экспериментов, т. е. в многократном "проигрывании" различных ситуаций при различных значениях входных параметров. Именно это открывает путь к поиску оптимальных решений различных экономических, социальных и экологических проблем.

Создавая математическую модель «хищник-жертва» в экономическом аспекте, в основу можно положить наблюдение, свидетельствующее о том, что получение доходов и осуществление расходов не совпадают во времени. Тогда нелинейная цикличность будет вызвана простейшими психологическими мотивами поведения людей, которые (мотивы) заключаются в принятии взвешенных управленческих решений, оценивании влияния внешних факторов и оптимальном управлении существующим состоянием системы.

При исследовании динамического изменения капитала экономической системы сохраним для удобства обозначения переменных и коэффициентов в моделях (1) и (2), рассмотренных в [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^{2}, & x(0); \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy, & y(0). \end{cases} \tag{1}$$

которые, естественно, для экономической системы будут иметь иной физический смысл.

Математическая модель экономической системы может учитывать: x – удельные доходы на единицу капитала; y – удельные расходы на единицу капитала; ax – увеличение скорости роста удельных доходов, зависящее от источника доходов; a – коэффициент «монопольности». Чем выгоднее положение подсистемы, тем больше a; bxy – снижение скорости роста удельных доходов из-за связи с дополнительными расходами. Обеспечивает отрицательную обратную связь; b – коэффициент влияния расходов на получение доходов, («проедание»), или скорость, с которой расходы снижают доходы; ex^2 – снижение скорости роста удельных доходов, связанное с «конкуренцией» за ресурсы (трудовые, природные, информационные и т. д.); e – коэффициент доступности ресурсов; cy – снижение скорости роста удельных расходов, не связанных с доходами (обеспечивается отрицательной обратной связью); $d \cdot xy$ – прирост удельных расходов в подсистемах, обеспеченных доходами; $x(0)$ – начальные удельные доходы; $y(0)$ – начальные удельные расходы; t – текущее время.

Для экономической модели уравнения (1) означают, что всевозможные технологические, политические, социально-экономические и личностные факторы, влияющие на состояние дел, объединяются в два интегральных (обобщенных) управляющих параметра: коэффициент "рождаемости" a (учитывает возможности развития субъекта, роста продукции, прибылей и т. д.) и коэффициент "смертности" c (учитывает различного рода ограничения – ресурсы, потребительский спрос, покупательная способность населения, налоги, законодательство, рэкет и т. д.).

Численным решением системы дифференциальных уравнений (1) может быть как замкнутая фазовая траектория при отсутствии конкуренции за ресурсы, так и спираль в виде аттрактора[2]. Важно заметить, что как раз спираль «разрывает» замкнутый круг Парето, когда поток ресурсов будет распределен так, что любое последующее их перераспределение уже не сможет улучшить благосостояние одного человека, не ухудшив благосостояния другого человека. Таким образом, решение системы уравнений даст возможность приблизиться к динамическому равновесию системы, преодолевая принцип Парето[3].

---

[2] Аттра́ктор (англ. attract – привлекать, притягивать) – множество точек в фазовом пространстве динамической системы, к которым стремятся траектории системы.

[3] Закон Парето, или принцип Парето, или принцип 20/80 – эмпирическое правило, введенное социологом Вильфредо Парето, в наиболее общем виде формулируется как «20 % усилий дают 80 % результата, а остальные 80% усилий – лишь 20 % результата». Может использоваться как базовый принцип для оптимизации какой-либо деятельности: правильно выбрав минимум самых важных действий, можно быстро получить значительную часть от планируемого полного результата, причём дальнейшие улучшения не всегда оправданы

Очевидно, что схема моделирования экономической системы по уравнениям (1) совершенно аналогична схеме моделирования системы «хищник – жертва», показанной на рис. 3 в [4]. Аналогична и технология компьютерного моделирования. Поэтому в этой части модель и решения рассматривать не будем. Отметим лишь, что использование предложенной модели позволяет описывать циклы, вызванные различными причинами.

В основу математической модели динамики конкуренции можно положить, по аналогии с моделями численности популяций в биологии («хищник-жертва»), соображения баланса суммарной численности популяции. Для экономической системы это может быть объем производства, прибыль, цена акций, количество клиентов и т. д.

Если в системе конкурируют несколько "популяций" – фирм, предприятий, организаций, то уравнение динамики для каждой из них необходимо дополнить перекрестными связями – взаимным влиянием друг на друга. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих экономическую систему, например, из трех конкурирующих предприятий, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1x_2 - a_{13}x_1x_3; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - a_{22}x_2^2 - a_{21}x_2x_1 - a_{23}x_2x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = a_3x_3 - a_{33}x_3^2 - a_{31}x_3x_1 - a_{32}x_3x_2, \end{cases} \tag{2}$$

где x_i – удельные доходы i-го предприятия на единицу капитала; a_i – коэффициент «монопольности». Чем лучше положение предприятия, тем больше a_i; $a_i\boldsymbol{x_i}$ – увеличение скорости роста удельных доходов i-го предприятия, зависящее от источника доходов; a_{ii} – коэффициент доступности ресурсов; $a_{ii}x_i^2$ – снижение скорости роста удельных доходов, связанное с «конкуренцией» за ресурсы (трудовые, природные, информационные и т. д.); a_{ij} – степень подавления i-го предприятия j-м в конкурентной борьбе; $a_{ij}x_ix_j$, $(i \neq j)$ – снижение скорости роста удельных доходов предприятия из-за влияния конкурирующих предприятий. Обеспечивает отрицательную обратную связь; $i, j = 1, 2, 3$.

Безусловно, участников конкурентной борьбы может быть больше, но при этом увеличивается порядок системы, а значит, и сложность ее анализа. С другой стороны, с учетом укрупнения и монополизации субъектов экономической деятельности, реально на одной территории (районе, городе, области, регионе) в выбранном секторе рынка не может существовать более 2-5 конкурентов. Поэтому примеры ситуации, соответствующие модели (2), достаточно типичны. Анализ такой системы можно провести с помощью методов теории динамических систем. Особое место здесь занимает расположение стационарных (неподвижных) точек системы в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3). Система (2) имеет две стационарные точки, одна из которых – неустойчивая с координатами $(0, 0, 0)$. Координаты второй, устойчивой точки, вычисляются с помощью решения системы следующих линейных алгебраических уравнений, полученных из уравнений (2) при $dx_i / dt = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3. \end{cases} \tag{3}$$

Эта точка – точка пересечения трех плоскостей в фазовом пространстве. Ее положение определяет возможность устойчивого сосуществования этих трех конкурентов, при котором они все "выживают" в рамках своих возможностей.

Если какая-либо из координат стационарной точки отрицательна, значит этот "вид" (участник конкурентной борьбы) обречен на вымирание. Случай, когда все три координаты неподвижной точки отрицательны, т. е. когда все участники процесса "вымирают", означает незримое и неучтенное присутствие на рынке более мощного конкурента или конкурентов.

Если по динамике реальных данных – временных рядов экономических показателей удается рассчитать коэффициенты уравнений системы (3), то можно считать, что параметры модели установлены. В таком случае задача предсказания экономической ситуации сводится к компьютерному решению систем (2), (3) и анализу результатов прогноза.

Схема моделирования экономической системы из трех конкурирующих предприятий по уравнениям (2) показана на рис. 1.

Исследуем процессы в системе, полагая, что первое предприятие организовано лучше, т. е. $a_1 > a_2 > a_3$, а взаимное влияние конкурирующих предприятий $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32}$ и конкуренция за ресурсы $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ для них одинаковы.

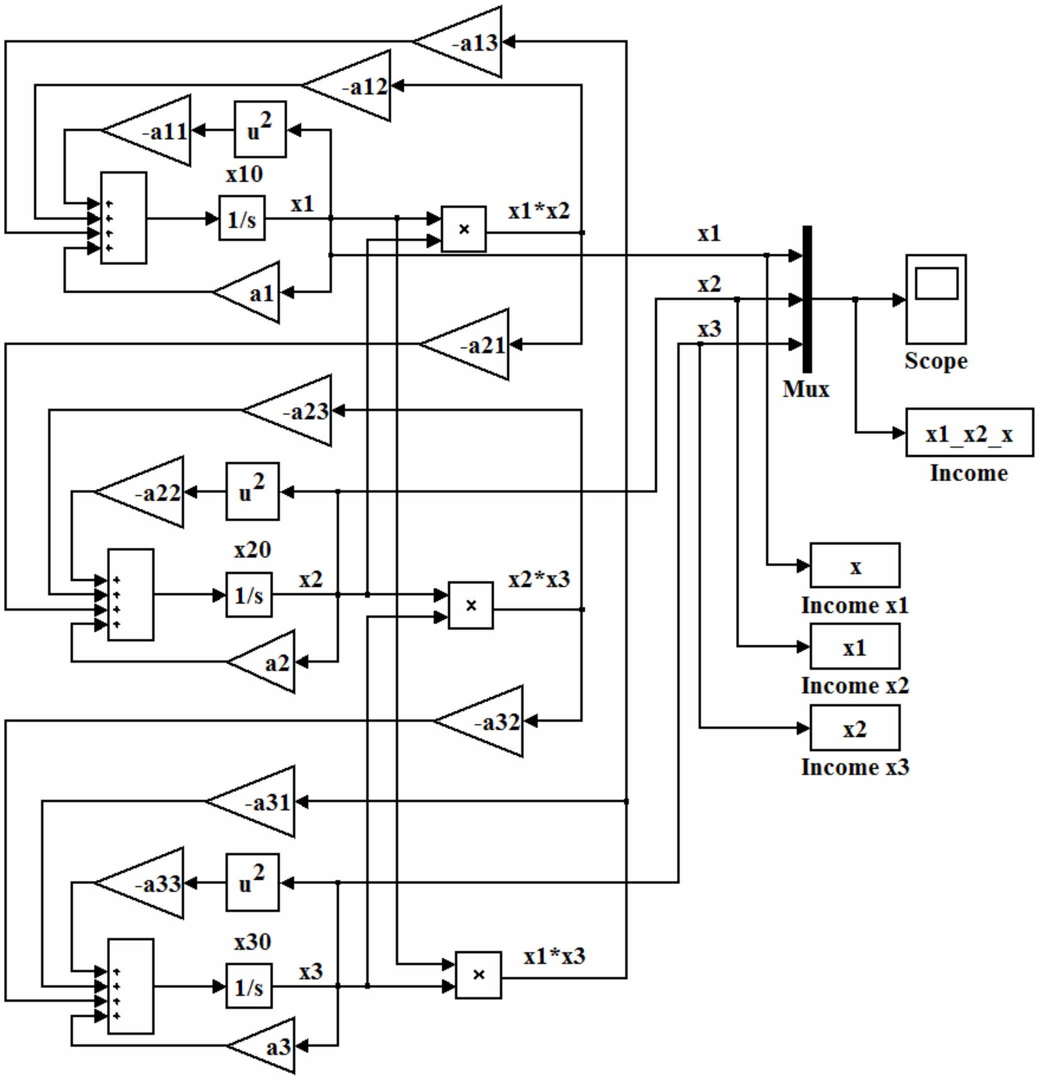


Рис. 1. Схема моделирования экономической системы
из трех конкурирующих предприятий

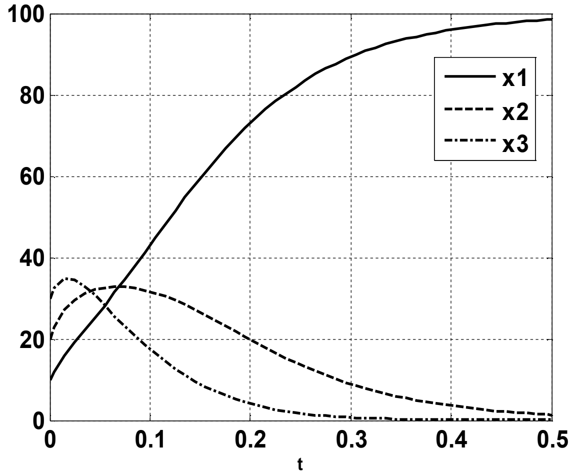
Пусть в начальный момент времени первое предприятие имело меньший доход, чем второе и третье $x_{10} < x_{20} < x_{30}$.

Зададим для примера (в меню свойств модели (Model Properties)) следующие числовые значения параметров системы и начальных условий:
a1=100; a2=90; a3=80; a11=1; a22=1; a33=1;
a12=1; a13=1; a21=1; a23=1; a31=1; a32=1;
x10=10; x20=20; x30=30;

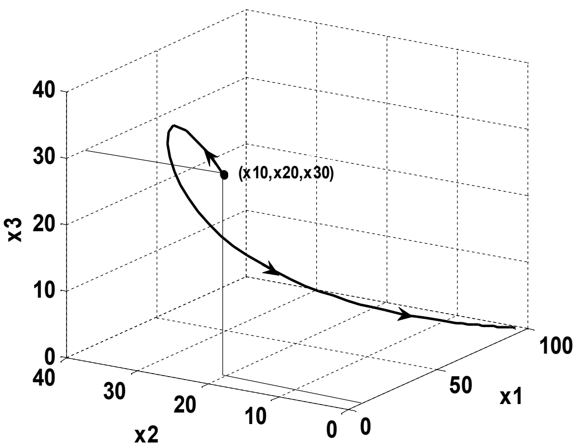
Для регистрации доходов трех предприятий во времени (в одном окне, так как результат наблюдается в виде вектора, сформированного мультиплексором Mux) в схеме используются блок Scope и один блок To Workspace с именами: Income, а для регистрации фазовой траектории в трехмерном пространстве используются три блока To Workspace с именами: Incom x1, Income x2 и Income x3 (доходы). Параметры этих блоков Save format: Structure With Time устанавливаются в соответствующих окнах, открываемых двойным щелчком мыши по блокам. Далее в левой вкладке Model callbacks окна Model Properties выбираем StopFcn, а затем в правой вкладке (Simulation stop function) вводим команды построения графиков:

```
figure(1)
plot(x1_x2_x3.time, x1_x2_x3.signals.values)
grid on
figure(2)
plot3(x1.signals.values,
x2.signals.values,x3.signals.values)
grid on
xlabel('x1'), ylabel('x2'), zlabel('x3')
```

Результаты моделирования представлены на рис. 2. Первый график figure(1) изображает изменение доходов трех предприятий за период 0,5 года (реакция системы на начальные условия), второй figure(2) – фазовую траекторию и проекции начальной точки на плоскости.



figure(1)



figure(2)

Рис. 2. Результаты моделирования экономической системы

Анализ полученных результатов показывает, что первое предприятие за тот же период увеличит доход в 10 раз за счет большего коэффициента «монопольности», в то время как второе и третье предприятия, не выдержав конкуренции, обанкротятся за счет менее выгодного положения по сравнению с первым, несмотря даже на то, что их начальный доход в 2 – 3 раза выше.

Рассмотрим случай работы предприятий, когда они организованы одинаково успешно, т. е. имеют одинаковые коэффициенты монопольности $a_1 = a_2 = a_3$ при прочих равных условиях. Введем в меню свойств модели, например, следующие одинаковые значения этих коэффициентов: a1=100; a2=100; a3=100 и повторим моделирование. Результат моделирования представлены на рис. 3.

Из рис. 3 следует, что через некоторое время все предприятия будут получать стабильные повышенные доходы.

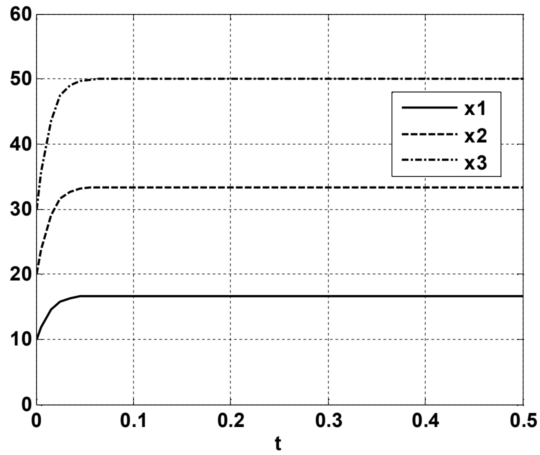


Рис. 3. Процессы в системе при $a_1 = a_2 = a_3$

Наконец, рассмотрим случай, когда третье предприятие организовано так, что может лучше противостоять своим двум конкурентам. Это выражается в том, что коэффициенты a_{31} и a_{32} третьего уравнения системы (2) меньше соответствующих коэффициентов первых двух уравнений. Пусть, к примеру,

a1=100; a2=90; a3=80;
a11=1; a22=1; a33=1;
a12=1; a13=1; a21=1; a23=1; a31=0.5; a32=0.5;
x10=10; x20=20; x30=30;

Результат моделирования представлен на рис. 4.

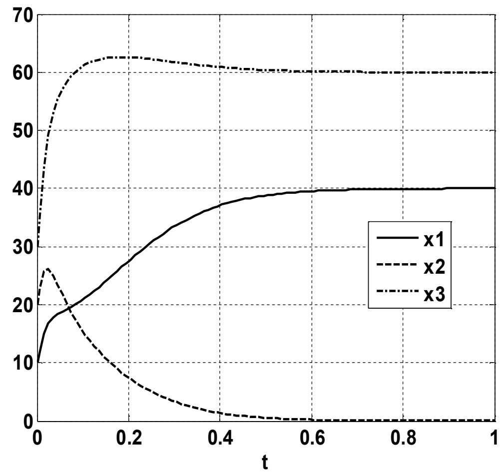


Рис. 4. Процессы в системе при $a_1 > a_2 > a_3$ и $a_{31} = a_{32} < a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23}$

Из рис. 4 видно, что теперь «выживут» первое и третье предприятия. Первое – за счет большего коэффициента «монопольности» a_1, третье – благодаря умению противостоять конкуренции с двумя первыми. Второе предприятие обанкротится, не выдержав конкуренции.

2. Модель выравнивания цен Холлинга – Тэннера

Модель выравнивания цен[4] (Price) по уровню актива[5] (Assets) интересна тем, что в ней можно наблюдать гармонические колебания решений возле стационарного состояния. Предположим, что изменение уровня актива q пропорционально разности между предложением s и спросом d, т. е. $\frac{dq}{dt} = k(s - d),\ \ k > 0$. Предположим далее, что изменение цены p пропорционально отклонению актива q от некоторого фиксированного уровня q_1 так, что $\frac{dp}{dt} = -m(q - q_1),\ \ m > 0$.

Таким образом, модель выравнивания цен по уровню актива имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = k[s(p) - d(p)], & q(0); \\ \frac{dp}{dt} = -m(q - q_1), & p(0), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$s(p) = ap + s_0,\ \ d(p) = cp + d_0. \tag{5}$$

Схема моделирования системы по уравнениям (4) и (5) представлена на рис. 5.

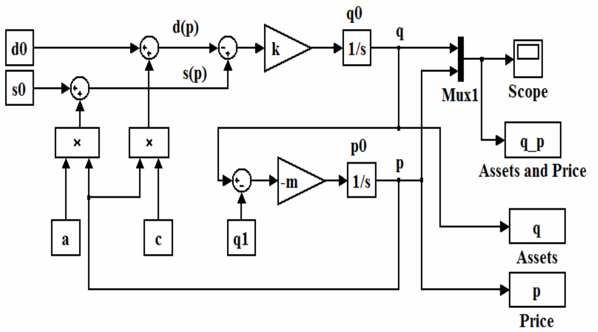


Рис. 5. Схема моделирования системы выравнивания цен

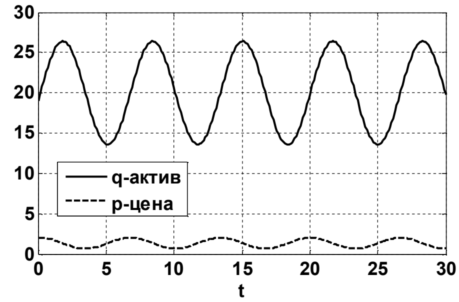
На рис. 6 приведены график решения при $k = 0{,}3;\ m = 0{,}1;\ a = 20;\ q_1 = 20;\ d_0 = 50;\ c = -10$ и начальном состоянии $q(0) = 19,\ \ p(0) = 2$.

Исходные данные и команды для регистрации вводятся в меню свойств модели, как и в предыдущем случае, т. е.:

```
k=0.3; m=0.1; a=20; q1=20; s0=10; d0=50; c=-10;
q0=19; p0=2;

figure(1)
plot(q_p.time, q_p.signals.values)
grid on
xlabel('t')
```

График figure(1) изображает процессы изменения активов предприятия и цены.



figure(1)

Рис. 6. Результаты моделирования системы выравнивания цен Холлинга – Тэннера

Из графика видно, что цена и актив колеблются возле стационарного состояния.

Заключение

Использование модели «хищник-жертва» для описания развития экономических систем позволяет не только определять равновесные уровни в перспективе, но и, манипулируя управляющими коэффициентами, переводить систему из одного состояния динамического равновесия в другое.

Предложенную модель можно применять в антикризисном управлении, при изучении популистских и спекулятивных экономик, а также при инновационном моделировании.

Реалистичные коэффициенты модели могут быть найдены специалистами-экономистами по результатам анализа и обработки статистических данных.

Литература

1. *Мельник Л.Г. Экономика развития / Л.Г. Мельник. – Сумы.: ИТД Университетская книга, 2006. – 662 с.*

2. *Баранцев Р.Г. Синергетика в современном естествознании / Р.Г. Баранцев. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144 с.*

---

[4] Выравнивание цен – покупка и продажа с целью сбалансирования существующей рыночной позиции.

[5] Актив – собственность предприятия, имеющая денежную стоимость и отражаемая в активе баланса. Активы предприятия – деньги, счета дебиторов, оборотные фонды, основной капитал и нематериальные активы.

3. Гусаров Ю.В. Управление: динамика неравновесности / Ю.В. Гусаров. – М.: Экономика, 2004. – 382 с.

4. Соколов Ю.Н. Компьютерные технологии в задачах природы и общества. Ч1. Уравнения Лотки – Вольтерра. Компьютерное моделирование взаимодействия видов в природе / Ю.Н. Соколов, А.Ю. Соколов, В.М. Илюшко // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 2 (43). – С. 55-64.

Поступила в редакцию 28.05.2010

Рецензент: д-р техн. наук., проф., зав. кафедрой информационных управляющих систем О.Е. Федорович, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЗАДАЧАХ ПРИРОДИ І СУСПІЛЬСТВА. Частина 2. МОДЕЛЬ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА «ХИЖАК-ЖЕРТВА» В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІКИ

Ю.М. Соколов, О.Ю. Соколов, В.М. Ілюшко

Розглянуто технології математичного і комп'ютерного моделювання економічного стану виробництва в умовах конкуренції і процесу вирівнювання цін. Показано, що для розв'язання задач економіки можна використовувати рівняння Лотки – Вольтерра і Холлінга – Теннера, які використовуються для моделі «хижак-жертва». Запропоновано і досліджено схеми імітаційного моделювання засобами MATLAB/Simulink (версія 7.6.0 (R2008a)). Наведено результати моделювання економічних систем при різних параметрах моделі. Аналіз результатів виконано за допомогою часових функцій і фазових траєкторій.

Ключові слова: рівняння Лотки – Вольтерра, Модель Холлінга – Теннера, синергетика, фізична економіка, атрактор.

COMPUTER TECHNOLOGIES IN PROBLEMS OF NATURE AND SOCIETY. Part 2. MODEL LOTKA – VOLTERRA «PREDATOR-PREY» IN ECONOMICS PROBLEMS

Y.N. Sokolov, A.Y. Sokolov, V.M. Iliushko

Mathematical and computer modeling technologies of economics state of production under business environment and process of price alignment are considered. It is shown that to solve the economics problems it is possible to use Lotka – Volterra and Holling – Tenner equations which are used for «predator-prey» model. The diagrams of simulation by means of MATLAB/Simulink (version 7.6.0 (R2008a)) are proposed and researched. The results of simulation of economics systems under variety model parameters are given. Analyses of results is accomplished using time responses and phase trajectories.

Key words: Lotka – Volterra equation, Holling – Tenner model, synergetic, physical economics, attractor.

Соколов Юрий Николаевич – канд. техн. наук, профессор, профессор кафедры производства радиоэлектронных систем летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина, e-mail: sokolovkhai@gmail.com.

Соколов Александр Юрьевич – доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой информатики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина, e-mail: asokolov@xai.edu.ua.

Илюшко Виктор Михайлович – доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой производства радиоэлектронных систем летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина, e-mail: rtsla@ai.kharkov.com.