

УДК 621.03

Ю.Н. СОКОЛОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА

Рассмотрена технология математического и компьютерного моделирования оптимальной системы угловой ориентации спутника. Предполагается, что угловое движение спутника происходит в одной плоскости и подчинено второму закону Ньютона. В качестве критерия оптимальности принят критерий минимума времени переходного процесса. Закон оптимального управления получен с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Предложена функциональная схема его реализации. Разработаны компьютерные программы исследования процесса ориентации и схема имитационного моделирования оптимальной системы средствами MATLAB/Simulink (версия 7.6.0 (R2008a)). Анализ результатов проведен с помощью временных функций (угол и угловая скорость вращения спутника) и фазовых траекторий.

Ключевые слова: оптимальное управление, критерий оптимальности, принцип максимума, гамильтониан, ориентация спутника, компьютерное моделирование, фазовые траектории.

Введение

Одной из важнейших проблем, которую приходится решать для подавляющего большинства искусственных спутников, является создание гарантоспособных (надежных и безопасных) систем управления, т. е. спутник, как объект космической техники, относится к классу критических объектов [1].

Для обеспечения необходимого углового положения спутнику придается угловое движение относительно заданных ориентиров поворотом вокруг центра масс. При наблюдении различных участков звездного неба или поверхности Земли требуется систематическое изменение углового положения спутника или, наоборот, заданная ось спутника должна быть направлена постоянно в одну и ту же точку небесной сферы. Тем самым многообразие научных и прикладных задач, решаемых спутниками, порождает различные требования к устройству, именуемому *системой ориентации*, которое и обеспечивает его заданное угловое движение.

В зависимости от того, какова природа управляющего воздействия на угловое движение спутника, каковы способы его реализации и какие требуются при этом устройства, различают активные, пассивные и комбинированные системы ориентации [2].

Если для создания управляющих воздействий требуется расход рабочего тела или энергии, запасенных на борту, а для формирования этих воздействий требуются блок логики, датчики ориентации и исполнительные органы, то такая система носит название *активной системы ориентации*. С ее помощью мож-

но реализовывать достаточно произвольные и быстрые угловые развороты. *Пассивные системы ориентации*, использующие взаимодействие с внешними полями естественного происхождения, не потребляют рабочее тело и энергию, запасенные на борту спутника. Быть может, только в начальный момент времени потребуются их кратковременный расход для приведения системы ориентации в рабочее положение, например, выдвинуть штанги, повернуть часть спутника, разарретировать магниты. *Комбинированные системы ориентации* включают в себя как активные, так и пассивные элементы. Активные элементы в этом случае используют либо для первоначального приведения спутника в рабочее положение, либо берут такие элементы, которые не требуют большого расхода энергии и сложной системы управления, включая датчики ориентации, например вращающиеся маховики, требующие возобновляемую от солнечных батарей электроэнергию только для поддержания постоянной скорости вращения, или электромагниты, используемые время от времени для обеспечения постоянной скорости вращения спутника вокруг оси симметрии.

На практике наибольшее распространение получили активные системы ориентации. Они имеют более широкие возможности по сравнению с пассивными, обеспечивая высокую точность ориентации и высокое быстродействие системы. Если определяющим в проекте является выполнение требований к угловому движению спутника, а не его стоимость, то используются именно активные системы.

В настоящее время значительное внимание уделяется оптимальному управлению, получившему свое

развитие в виде общей теории, основанной на сочетании вариационных методов, теории автоматического управления и применении ЭВМ. Ввиду сложности таких задач возникает необходимость в разработке компьютерных программ и способов структурной реализации алгоритмов оптимального управления.

В данной работе на основе математической модели углового движения спутника сформулирована и решена задача синтеза оптимального по быстродействию управления. Детально раскрыта технология компьютерного исследования, которая, надеемся, поможет инженеру приобрести навыки, необходимые для расчетов и проектирования оптимальных систем. В качестве метода решения используется принцип максимума Л. С. Понтрягина [3 – 5].

1. Математическая модель углового движения спутника с активной системой ориентации

Угловое движение спутника схематично показано на рис. 1.

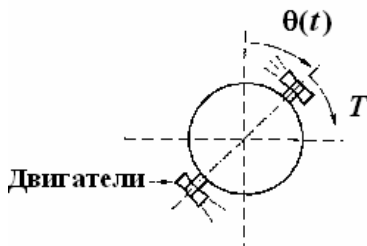


Рис. 1. Угловое движение спутника

При построении математической модели углового движения, будем полагать, что трение отсутствует, спутник жесткий и вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Вращающий момент, прикладываемый к спутнику, создается газоструйными двигателями. Например, если включены два двигателя, как показано на рис. 1, то это приведет к увеличению угла θ . Если же включена другая пара двигателей, то угол θ имеет тенденцию к уменьшению. Предполагается, что момент $T(t)$, создаваемый двигателями, является входным сигналом, а угол $\theta(t)$ – выходным. Тогда на основании второго закона Ньютона можно записать дифференциальное уравнение для вращательного движения спутника

$$J\ddot{\theta} = T, \text{ или } \ddot{\theta} = u, \quad (1)$$

где $u = T/J$, J – момент инерции спутника.

Это достаточно точная модель жесткого спутника, и она часто используется во многих примерах в силу ее простоты. Однако если к спутнику прикреплены солнечные панели, то допущение о его жесткости уже не действует (одни части спутника могут пе-

ремещаться относительно других частей), и модель получается более сложной.

В качестве переменных состояния выберем угловое положение спутника $x_1(t) = \theta(t)$ и его угловую скорость $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$. Тогда уравнения состояния спутника можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0), \\ \dot{x}_2 &= u(t), & x_2(0). \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что двигатели развивают постоянный момент, т. е. $u(t) = \pm U$. На рис. 1 включению двигателей соответствует увеличение угла θ , поэтому $u(t) = +U$. Для пары других двигателей $u(t) = -U$.

2. Синтез оптимальной системы угловой ориентации спутника

Будем считать, что угловое движение спутника описывается уравнениями (2), а управление ограничено по величине соотношением

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для всех } t. \quad (3)$$

Это ограничение следует из физических ограничений на величину приложенного к спутнику момента, который может давать реальные исполнительные устройства.

С помощью принципа максимума определим допустимое управление, переводящее объект (2) из любого начального состояния (x_{1H}, x_{2H}) в начало координат $(x_{1K} = 0, x_{2K} = 0)$ за минимально возможное время при ограничении (3).

Составим гамильтониан H по уравнению

$$H = \sum_{\alpha=1}^n \Psi_{\alpha} f_{\alpha}(x, u), \quad (4)$$

где вспомогательные переменные Ψ_{α} связаны с гамильтонианом и переменными состояния уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_i}; \\ \frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

В рассматриваемой задаче $n = 2$, $f_1(x, u) = x_2$, $f_2(x, u) = u$ – правые части уравнений (2). Скалярное произведение векторов Ψ_{α} и f_{α} в уравнении (4) дает результат:

$$H = \Psi_1 x_2 + \Psi_2 u. \quad (6)$$

Оптимальное управление, т. е. управление, максимизирующее гамильтониан H , как следует из уравнения (6), будет

$$u(t) = \text{sign} \Psi_2(t) = \pm 1. \quad (7)$$

Вспомогательные переменные удовлетворяют второму уравнению системы (5), подставляя в которое H из (6) и дифференцируя по x_1 и x_2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Оптимальную управляющую последовательность $u(t)$ определим таким образом. Пусть $c_1 = \Psi_1(0)$ и $c_2 = \Psi_2(0)$ – начальные значения вспомогательных переменных. Тогда, интегрируя уравнения (8), находим

$$\Psi_1(t) = c_1 = \text{const}, \quad (9)$$

$$\Psi_2(t) = c_2 - \int c_1 dt = c_2 - c_1 t. \quad (10)$$

Из соотношения (10) ясно, что $\psi_2(t)$ есть линейная функция времени. Её положение на плоскости зависит от соотношений начальных условий c_1 и c_2 . Подставив (10) в (7) находим, что оптимальным управлением является

$$u(t) = \text{sign}(c_2 - c_1 t). \quad (11)$$

Траектории движения изображающей точки (x_1, x_2) на фазовой плоскости можно построить, решив уравнение (2) при начальных условиях $x_1(0), x_2(0)$ и исключив из найденного решения время t .

Решение уравнений (2) очевидно:

$$x_2(t) = x_2(0) + ut, \quad (12)$$

$$x_1(t) = x_1(0) + x_2(0)t + \frac{ut^2}{2}. \quad (13)$$

Определив из уравнения (12)

$$t = \frac{1}{u}[x_2(t) - x_2(0)],$$

и подставив его в уравнение (13), получаем уравнение фазовых траекторий:

$$x_1(t) = \frac{1}{2u} x_2^2(t) + x_1(0) - \frac{1}{2u} x_2^2(0). \quad (14)$$

Для отрезка времени, на котором $u(t) = +1$, имеем

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + \xi_1, \quad (15)$$

где $\xi_1 = x_1(0) - \frac{1}{2} x_2^2(0)$ – постоянная.

Аналогично для отрезка времени, на котором $u = -1$, получаем

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + \xi_2, \quad (16)$$

где $\xi_2 = x_1(0) + \frac{1}{2} x_2^2(0)$ – постоянная.

Уравнение (15) и (16) есть уравнения траекторий (парабол), начинающихся из точки $[x_1(0), x_2(0)]$ на плоскости $x_1 x_2$.

Пример траекторий для нескольких начальных условий показан на рис. 2. Стрелки указывают направление движения для положительного времени.

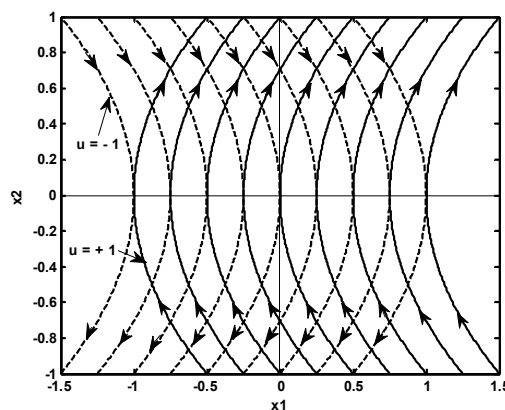


Рис. 2. Вынужденные траектории на фазовой плоскости

Графики фазовых траекторий, показанные на рис. 2, получены с помощью следующей программы MATLAB:

```
>>u=[ 1 -1];
x10=[-1.0 -0.75 -0.5 -0.25 0 0.25 0.5 0.75 1.0];
x20=0;
for i=1:2
for k=1:9
ksi=x10(k)-u(i)*x20.^2/2;
x2=[-1:0.01:1];
x1=u(i)*x2.^2/2+ksi;
plot(x1,x2,'-')
xlabel('x1')
ylabel('x2')
hold on
end
end
```

Так как управление должно быть кусочно-постоянным, то можно найти геометрическое место точек, которые могут быть переведены в $(0, 0)$ с помощью управления $u = \pm 1$.

Из рис. 2 ясно, что из множества траекторий только две проходят через начало координат (точка цели). Они показаны отдельно на рис. 3 и обозначены как γ_+ и γ_- .

Кривая γ_+ есть геометрическое место точек (x_1, x_2) , которые могут быть переведены в $(0, 0)$ с помощью управления $u = +1$:

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2}x_2^2; x_2 \leq 0 \right\}. \quad (17)$$

Кривая γ_- есть геометрическое место точек (x_1, x_2) , которые могут быть переведены в $(0, 0)$ с помощью управления $u = -1$:

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2; x_2 \geq 0 \right\}. \quad (18)$$

Объединение кривых γ_+ и γ_- дает линию переключения

$$\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2| \right\}. \quad (19)$$

Траектория (линия переключения (рис. 3)) $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ построена по уравнению (19) с помощью следующей программы:

```
>> x2 = [-1: 0.1: 1];
x1 = - 0.5*x2.*abs(x2);
plot(x1,x2,'-')
xlabel('x1')
ylabel('x2')
```

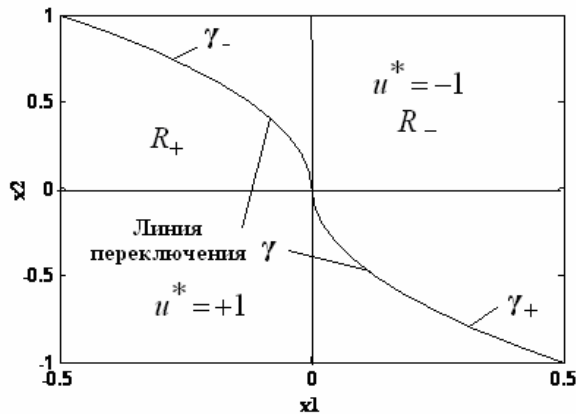


Рис. 3. Линия переключения

Цель управления состоит в том, чтобы перевести любое начальное состояние в начало координат фазовой плоскости.

Закон управления определяет величину оптимального по быстродействию управления u^* как функцию от состояния (x_1, x_2) для любого состояния на фазовой плоскости:

$$\begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup R_+; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_- \cup R_-. \end{aligned} \quad (20)$$

Покажем, каким образом реализуется закон управления (20). Можно спроектировать нелинейную систему управления с обратной связью, которая преобразует фазовые координаты x_1 и x_2 и формирует оптимальное управление u^* . Фазовые координаты (переменные состояния) $x_1(t)$ (выход) и $x_2(t)$ (скорость изменения выходной координаты) изменяются в

каждый момент времени. Согласно (19) сигнал $x_2(t)$ подается на нелинейность N , на выходе которой имеем $\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|$. Сигнал $z(t)$, определяющий линию переключения, можно записать, используя уравнение (19):

$$z(t) = -x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|. \quad (21)$$

Этот сигнал управляет реле R , которое представляет собой техническую (или программную) реализацию операции sign . Сигнал на выходе реле обеспечивает управление, оптимальное по быстродействию, так как

$$\begin{aligned} \text{если } (x_1(t), x_2(t)) \in R_-, \text{ то } z(t) > 0, \\ \text{если } (x_1(t), x_2(t)) \in R_+, \text{ то } z(t) < 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Основная трудность возникает тогда, когда состояние $(x_1(t), x_2(t))$ оказывается на линии переключения. Из уравнений (21) и (19) можно видеть, что при $(x_1(t), x_2(t)) \in \gamma$ имеем $z(t) = 0$. В этом случае выходной сигнал идеального реле должен быть равен нулю. Однако так как реле является физическим элементом с малой (но не равной нулю) зоной нечувствительности, оно переключается не в точности на кривой γ , а несколько позже. Поэтому, когда действительно произойдет переключение реле, состояние системы уже не будет находиться на кривой γ и сигнал на входе реле не будет равен нулю. Физические свойства применяемых технических средств устраняют неопределенность функции $\text{sign}\{0\}$, поэтому реальные системы оказываются "почти" оптимальными ("квазиоптимальными"). Структурная схема оптимальной по быстродействию системы управления угловым движением спутника показана на рис. 4.

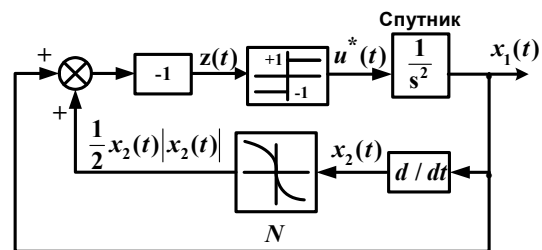


Рис. 4. Структурная схема оптимальной системы управления угловым движением спутника

3. Моделирование оптимальной системы угловой ориентации спутника

Рассмотрим, как можно реализовать нелинейность N . Заметим, что связь между входом и выходом N совпадает с линией переключения γ . Можно сконструировать N , используя устройство умножения и генератор модуля (чтобы получить сигнал

$x_2(t)|x_2(t)|$) или кусочно-линейную аппроксимацию на диодах.

Прежде всего, заметим, что, поскольку при моделировании сигнал на входе реле $z(t)$ после окончания процесса управления не равен в точности нулю, возникает неопределенность функции $\text{sign}\{0\}$, вследствие чего наблюдается «дребезг контактов» этого реле. Исключить такой нежелательный эффект можно различными способами. Например, использовать управляемый переключатель (Switch) с малым порогом переключения, на управляющий (средний) вход которого подается модуль входного сигнала с выхода блока Abs1. На первый вход (верхний) поступает сигнал $z(t)$, а на второй (нижний) – нуль с выхода блока Constant.

Если уровень входного сигнала превышает пороговое значение, то на выход переключателя Switch поступает сигнал с верхнего входа, если наоборот, – с нижнего, т. е. нуль.

Схема моделирования оптимальной системы управления показана на рис. 5. В этой схеме использован блок Switch с порогом переключения, равным 10^{-6} , на управляющий (средний) вход которого подается модуль $|z(t)|$ с выхода блока Abs1. На первый вход (верхний) поступает сигнал $z(t)$, а на второй (нижний) – нуль с выхода блока Constant. Если уровень сигнала $z(t)$ превышает пороговое значение, то на выход переключателя поступает сигнал с верхнего входа, т. е. $z(t)$, если наоборот – с нижнего, т. е. нуль.

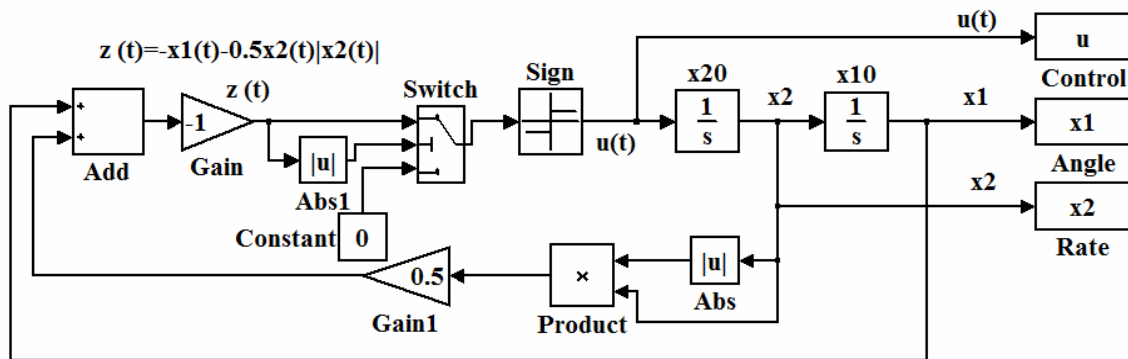


Рис. 5. Схема моделирования оптимального управления спутником

На рис. 6 в качестве примера приведены соответствующие процессы во времени, полученные при заданных начальных условиях $x_1(0) = 0,5$ рад и $x_2(0) = 0,5$ рад/с (из области R_+ , показанной на рис. 3). Оптимальное управление состоит из двух интервалов: $u = -1$ и $u = +1$, что для системы второго порядка соответствует теореме об n интервалах А.А. Фельдбаума [6].

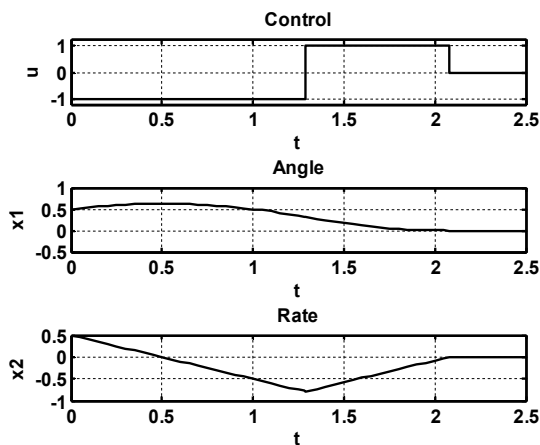


Рис. 6. Результаты моделирования системы оптимального управления спутником

Начальные условия и команды вывода результатов моделирования заданы в окне свойств модели (Model Properties). Окно свойств модели открывается в такой последовательности:

File → Model Properties → Callbacks.

В левой вкладке (Model callbacks) открывшегося окна выбираем InitFcn, а затем в правой вкладке (Model initialization function) вводим начальные условия: $x_{10}=0.5$; $x_{20}=0.5$;

Далее в левой вкладке Model callbacks окна Model Properties выбираем StopFcn, а затем в правой вкладке (Simulation stop function) вводим команды построения графиков оптимального управления (Control), угла (Angle), угловой скорости (Rate) и графика фазовых траекторий (Phase Trajectory):

```
figure(1)
subplot(3,1,1);
plot(u.time,u.signals.values)
xlabel('t'), ylabel(' u'), title('Control')
grid on
subplot(3,1,2);
plot(x1.time,x1.signals.values)
xlabel('t'), ylabel(' x1'), title('Angle')
grid on
```

```
subplot(3,1,3);
plot(x2.time,x2.signals.values)
hold on
xlabel('t'), ylabel('x2'), title('Rate')
grid on
figure(2)
plot(x1.signals.values,x2.signals.values)
xlabel('x1'), ylabel('x2'), title('Phase Trajectory')
grid on
```

В результате открывается окно с графиком искомой траектории (рис. 7).

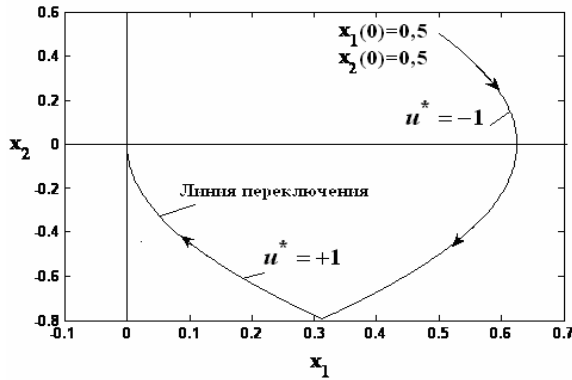


Рис. 7. Фазовая траектория

На рис. 8 показано семейство фазовых траекторий при различных начальных условиях (пара векторов x_{10} и x_{20}), полученных с помощью схемы моделирования с регистраторами To Workspace и следующей программой:

```
x10=[0.5; 0.2; -0.5; -0.3; -0.2; -0.1];
x20=[0.5; -0.3; -0.5; 0.2; -0.8; 0.9];
figure(3)
plot(x1.signals.values,x2.signals.values)
xlabel('x1'), ylabel('x2'), title('Phase Trajectory')
grid on
```

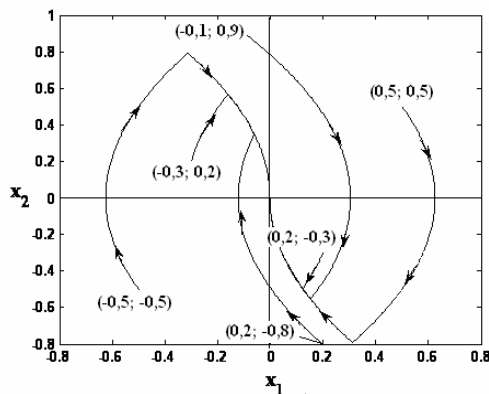


Рис. 8. Семейство фазовых траекторий

Как видно из рис. 7, все фазовые траектории стремятся к началу координат независимо от начальных условий.

Заключение

Результаты исследования показали, что компьютерное моделирование процесса управления угловым движением спутника в среде MATLAB/Simulink является эффективным и удобным средством решения задачи оптимального управления. Можно рекомендовать общую процедуру ее решения, состоящую из следующих основных этапов:

1) определение оптимального управления, т. е. управления, максимизирующего гамильтониан H ;

2) составление уравнений для вспомогательных переменных Ψ при неизвестных начальных значениях $\Psi(0)$;

3) определение управляющей последовательности $u(t)$, представляющей возможное оптимальное управление;

4) построение траекторий движения на фазовой плоскости для $u = +1$ и $u = -1$;

5) определение линии переключения;

6) нахождение закона управления, являющегося решением поставленной задачи;

7) составление структурной схемы реализации полученного закона управления;

8) построение схемы имитационного моделирования в MATLAB/Simulink, проигрывание модели и анализ результатов.

Рассмотренная методика применима и для решения задач оптимального управления иными объектами [7, 8].

Литература

1. Харченко В.С. Безопасность аэрокосмической техники и надежность компьютерных систем / В.С. Харченко, В.В. Скляр, О.М. Тарасюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – № 1 (9). – С.66-80.

2. Раушенбах Б.В. Лекции по динамике космического полета / Б.В. Раушенбах, М.Ю. Овчинников. – М.: МФТИ, 1997. – 188 с.

3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления / В.Г. Болтянский. – М.: Физматгиз, 1966. – 307 с.

4. Болтянский В.Г. К теории оптимальных процессов / В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Л.С. Понтрягин. – М.: «ДАН». – 1956. – Т. 110, № 1. – С. 7–10.

5. Соколов Ю.Н. Компьютерный анализ и проектирование систем управления. Ч. 3: Оптимальные системы: учеб. пособие. – В 4 ч. / Ю.Н. Соколов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 273 с.

6. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А.А. Фельдбаум. – М.: Физматгиз, 1963. – 552 с.

7. Соколов Ю.Н. Компьютерные технологии в задачах оптимального управления мягкой посадкой космических аппаратов на безатмосферные планеты / Ю.Н. Соколов // *Радиоэлектронні і комп'ютерні системи*. – 2009. – №2 (36). – С. 109-119.

8. Персональный сайт Соколова Ю.Н. [электронный ресурс]. – Режим доступа к сайту: <http://www.sokolov.5u.com>.

Поступила в редакцию 10.02.2010

Рецензент: канд. техн. наук, проф. кафедры радиоэлектронных систем летательных аппаратов М.Ф. Бабак, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ КУТОВОЇ ОРІЄНТАЦІЇ СУПУТНИКА

Ю.М. Соколов

Розглянута технологія математичного і комп'ютерного моделювання оптимальної системи куткової орієнтації супутника. Припускається, що кутівий рух супутника відбувається в одній площині і підпорядкований другому закону Ньютона. За критерій оптимальності прийнято критерій мінімуму часу перехідного процесу. Закон оптимального управління отримано за допомогою принципу максимуму Л.С. Понтрягіна. Запропонована функціональна схема його реалізації. Розроблено комп'ютерні програми дослідження процесу орієнтації і схеми імітаційного моделювання оптимальної системи засобами MATLAB/Simulink (версія 7.6.0 (R2008a)). Аналіз результатів виконано за допомогою часових функцій (кут і кутова швидкість обертання супутника) і фазових траєкторій.

Ключові слова: оптимальне управління, критерій оптимальності, принцип максимуму, гамільтоніан, орієнтація супутника, комп'ютерне моделювання, фазові траєкторії.

COMPUTER MODELLING OF THE SATELLITE ANGULAR OPTIMAL ORIENTATION SYSTEM

Y.N. Sokolov

The technology of mathematical description and computer simulation of optimal angular orientation system of the satellite is considered. It is supposed, that angular movement of the satellite occurs in one plane under Newton's second law. As criterion of optimality the criterion of a minimum of settling time is assumed. The optimal control law is derived by means of L.S. Pontriagin's maximum principle. The functional diagram of its realization is offered. Computer research programs of orientation process and the simulation model of optimal system by means of MATLAB/Simulink (version 7.6.0 (R2008a)) are developed. The analysis of results is performed by means of time responses (an angle and angular motion of the satellite) and phase trajectories.

Keywords: optimal control, criterion optimality, maximum principle, gamiltonian, satellite orientation, computer modeling, phase trajectories.

Соколов Юрий Николаевич – канд. техн. наук, профессор, профессор кафедры производства радиоэлектронных систем летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина, e-mail: sokolovkhai@gmail.com.