УДК 681.518.54;004.3.001.4

В.А. ТВЕРДОХЛЕБОВ

Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ ПО МОДИФИЦИРОВАННЫМ СХЕМАМ ЯНОВА

В схемах Янова алгоритм представлен последовательностью операторов, предикатов и указателей переходов между операторами. Простейшая форма операторов допускает оценку сложности отдельных операторов. На сложность алгоритмов влияет взаиморасположение операторов с учетом подготовки данных выполнением предыдущих операторов. Для оценки этого фактора сложности предлагается разработанный метод построения спектра числовых показателей, характеризующих варианты описаний схем Янова и частей схем рекуррентными формами различных порядков. Приводится пример сравнения по сложности двух реализаций конкретного алгоритма.

Ключевые слова*: алгоритм, логические схемы Янова, сложность алгоритмов, автомат, автоматное отображение, геометрический образ автоматного отображения, рекуррентная форма, спектр показателей рекуррентных форм.*

Введение

Алгоритмы, реализуемые технической системой в соответствии с ее целевым предназначением, являются фундаментальными составляющими в математической модели системы. Материальная реализация алгоритмов в системе определяет быстродействие, надежность, энергозатраты и т.п. и связана со сложностью алгоритмов. Для одного и того же алгоритмически разрешимого класса задач существующее бесконечное множество алгоритмов (решающих класс задач) может быть упорядочено по сложности. Существует и продолжает расширяться класс вариантов понятия сложности: сложность по худшему значению показателя сложности; сложность снизу, сверху и в среднем; алгебраическая сложность; мультипликативная сложность; битовая сложность; фундаментальные асимптотические оценки сложности; оценки проблем по их принадлежности к NP и P классам и т.п. (см., например, [1-3,5]).

В статье Ю.И.Янова [7] отмечается, что, "всякий алгоритм при переработке конкретного объекта (к которому он применяется) предписывает однозначно определенную последовательность действий; … всегда найдется конечное множество предикатов, характеризующих некоторые свойства перерабатываемых объектов, такое, что для данного алгоритма зависимость порядка выполнения элементарных операций от перерабатываемых объектов будет однозначной функцией предикатов. Эта функция может быть записана при помощи конечной строчки, составленной из символов элементарных действий A_1, A_2, …, A_n (которые мы будем называть операторами), предикатов и некоторых вспомогательных символов…(с.75)". Эти простые, но как оказалось фундаментальные положения, продолжены в данной статье и развиты до представления алгоритмов числовыми структурами в форме кривых линий и фигур. В уже указанной статье Ю.И.Янова [7] поясняется роль представления структур алгоритмов схемами: "Логические схемы алгоритмов можно рассматривать как схемы схемных записей алгоритмов … из которых путем замены символов операторов и логических переменных соответственно конкретными операторами и предикатами получаются конкретные схемные записи алгоритмов (с.76)".

В данной статье рассматриваются процессы вычислений по заданному алгоритму, которые формируются в соответствии с конкретными исходными данными и которые представлены последовательностью кодов операторов.

1. Рекуррентное определение последовательностей

Пусть при преобразовании алгоритмом W исходных данных *x*, для которых алгоритм определен, формируется следующая последовательность операторов $\xi(x) = w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_k}$. Для каждого оператора w_{i_j} алгоритмом W определены правило P_{i_j} выполнения действий и общее правило *Q*, определяющее место оператора в последовательности $\xi(x)$. Предполагается, что рассматриваемые операторы из базового множества операторов достаточно простые и имеют некоторую принятую оценку сложности. Новым и основным полагается оценка сложности правила *Q*, которую построим , используя синтаксические свойства последовательности $\xi(x)$. Будем предполагать, что сложность правила*Q* определяется, во-первых, зависимостью рассматриваемого оператора от взаиморасположения некоторых предшествующих ему операторов, а, во-вторых, изменениями таких зависимостей в последовательности $\xi(x)$. Математической структурой, удовлетворяющей этим требованиям, являются рекуррентные формы, определяющие последовательность и ее части и имеющие наименьший порядок.

Последовательность $\xi(x)$ (точнее, структура последовательности) определяется рекуррентной формой порядка *m* $z_t = F(z_{t-m}, z_{t-m+1}, \dots, z_{t-1})$, если для любого $t, m < t \le k$, $w_{i_t} = F(w_{i_{t-m}}, w_{i_{t-m+1}}, \dots, w_{i_{t-1}})$. В дальнейшем будем предполагать, что последовательность определяется рекуррентной формой наименьшего порядка.

2. Спектр показателей описания последовательностей рекуррентными формами

Спектр Ω (ξ) для последовательности ξ имеет 5 уровней: $\Omega(\xi) = (\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$, на которых числовыми значениями представлены порядки рекуррентных форм, длины отрезков последовательности, определяемые отдельными рекуррентными формами и количества смен рекуррентных форм (см.[4]). По определению $\Omega_0(\xi) = m_0(\xi)$, где $m_0(\xi)$ - наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей всю последовательность ξ. На уровне $\Omega_1(\xi)$ спектра $\Omega(\xi)$ расположено m_0 чисел ($m_0 \in N^+$), определяющих для порядков от 1 до m_0 размеры наибольших определяемых начальных отрезков последовательности ξ. Уровень $\Omega_2(\xi)$ содержит m_0 чисел, показывающих, сколько раз для рассматриваемого порядка рекуррентных форм потребовалось заменять рекуррентные формы при определении последовательности ξ. На уровне $\Omega_3(\xi)$ каждое число смен рекуррентных форм, показанное на уровне $\Omega_2(\xi)$, заменено длинами отрезков последовательности ξ, определяемых отдельными рекуррентными формами.

С использованием введенных обозначений спектр $\Omega(\xi)$ имеет структуру:

$$\Omega_0(\bar{\xi}) = \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle ;$$

$$\Omega_1(\bar{\xi}) = \left\langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \dots, d^{\alpha}(\bar{\xi}) \right\rangle ;$$

$$\Omega_2(\bar{\xi}) = \left\langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \dots, r^{\alpha}(\bar{\xi}) \right\rangle ;$$

$\Omega_3(\bar{\xi}) = \left\langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^{\alpha}(\bar{\xi}) \right\rangle$, где $\alpha = m_0(\bar{\xi})$ и $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \left\langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \dots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \right\rangle$ (n_j – номер последнего отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j); $\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$, где Θ – оператор замены в $\Omega_3(\bar{\xi})$ величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков. Четвёртый уровень $\Omega_4(\bar{\xi})$ спектра $\Omega(\bar{\xi})$ к характеристике последовательности $\bar{\xi}$ по количеству изменений правил, определяющих взаиморасположение элементов в последовательности, и величинам областей действия правил, представленной на уровнях $\Omega_1(\bar{\xi})$ - $\Omega_3(\bar{\xi})$, добавляет оценки сложности самих правил. В достаточно общем случае можно вводить веса правил (рекуррентных форм) и веса конкретных реализаций правил, используемых при определении конкретных отрезков.

3. Оценка сложности реализаций алгоритма для различных исходных данных

Рассмотрим на примере сравнение по сложности двух реализаций алгоритма А, решающего следующий класс задач: Задана последовательность ξ чисел из множества чисел $\{0,1,2,\dots,9\}$, $\xi \in \{0,1,2,\dots,9\}^*$. Требуется: 1) определить наименьший элемент последовательности ξ, который имеет нечётное число вхождений в последовательность ξ и заменить все вхождения этого элемента на 0, а если число вхождений всех элементов чётное число, то заменить каждое вхождение в ξ нечётного числа r на число r-1.

Выделим из этого класса две конкретных задачи, определяемые следующими исходными данными: задана последовательность *u=<3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3>* (первые 25 знаков в представлении иррационального числа π) и последовательность *v= < 2 7 1 8 2 8 1 8 2 8 4 5 9 0 4 5 2 3 5 3 6 0 2 8 7 >* (первые 25 знаков в представлении иррационального числа e). Для этих последовательностей определим последовательности выполняемых по алгоритму W операторов $\xi(u)$ и $\xi(v)$, полагая, что в последовательностях операторы представлены индексом класса операторов. Выберем 5 классов операторов :

- операторы вида "C : = D", индекс "*a*" , номера операторов 1-11, 33, 37, 41-42 (см.рис.1);
- операторы вида "C : = D+*h*", индекс "*b*" , номера операторов 12,23-32, 34,38,43,46;
- операторы вида "C > D", индекс "*c*" , номера операторов 13, 35, 39, 44;

- операторы вида "C = D", индекс "*d*", номера операторов 14-22,40;

- операторы проверки на нечетность, индекс "*e*", номера операторов 36,45.

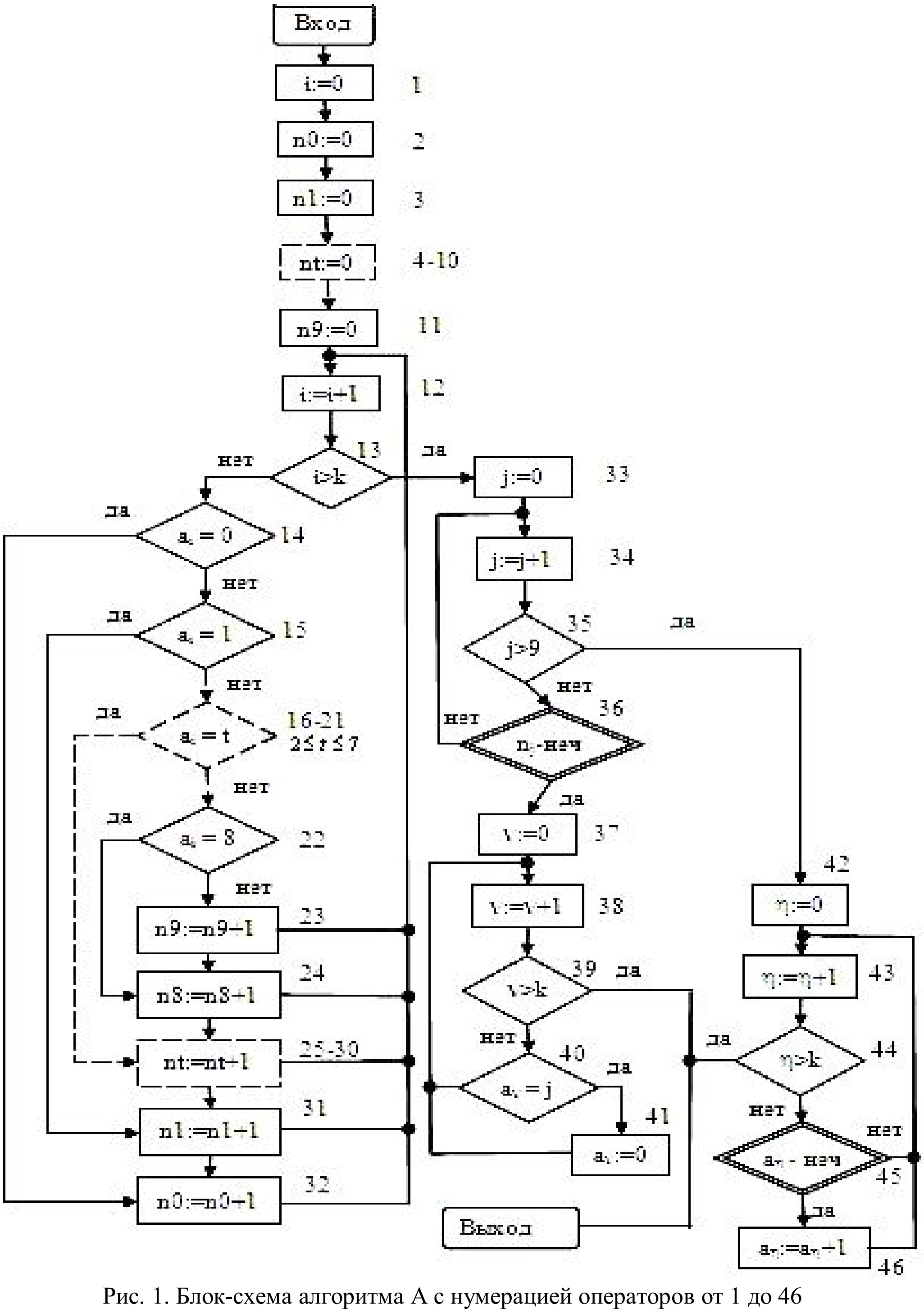

Рис. 1. Блок-схема алгоритма А с нумерацией операторов от 1 до 46

В соответствии с блок-схемой алгоритма W, изображенной на рис. 1, для исходных данных u и v получаем следующие последовательности классов операторов, которыми реализованы вычисления:

$$\xi(u) = a^{11}bcd^4(b^2cd^2)^2d^3(b^2cd^2)^2 d^4b^2cd^9\, b^3cd^3\, b^2cd^7\, b^2cd^6\, (b^2cd^4)^2d^2(b^2cd^9)^2\, b^3cd^8\, b^2cd^9\, b^3cd^4(b^2cd^3)^2d\, b^2cd^9(b^2cd^5)^2d^2(b^2cd^3)^2d^4b^2cd^5\, b^2cd^4bca(bce)^2abc(dbc)^6abc(dbc)^8dabc(dbc)^4dabc(dbc)^3;$$

$$\xi(v) = a^{11}bcd^3b^2cd^8(b^2cd^2)^2d^7(b^2cd^3)^2d^6\, (b^2cd^2)^2d^7(b^2cd^3)^2\, d^6(b^2cd^5)^2\, d^2\, b^2cd^9\, b^3cd(b^2cd^5)^2\, d\, (b^2cd^3)^2\, d\, b^2cd^6(b^2cd^4)^2d^3(b^2cd)^2d^2\, b^2cd^9\, b^2cd^8bca\, (bce)^2abcda\, (bcd)^4abc\, (dbc)^3dabc(dbc)^7dabc(dbc)^5\, dabc(dbc)^2.$$

В связи с ограниченным объемом статьи покажем только уровни $\Omega_0(\xi(u))$, $\Omega_0(\xi(v))$, $\Omega_1(\xi(u))$, $\Omega_1(\xi(v))$ спектров $\Omega(\xi(u))$ и $\Omega(\xi(v))$.

Получаем: $\Omega_0(\xi(u)) = 38$, $\Omega_0(\xi(v)) = 49$.

Уровни $\Omega_1(\xi(u))$ и $\Omega_1(\xi(v))$ представлены на рис.2 в форме графиков.

Числовые показатели уровней $\Omega_0(\xi(u)) = 38$ и $\Omega_0(\xi(v)) = 49$ характеризуют процесс преобразования последовательности v, представленный последовательностью операторов $\xi(v)$ как более сложной по сравнению с преобразованием последовательности *u*.

В графиках, изображенных на рис. 2 , представлено, что правило управления процессом выбора операторов для преобразования последовательности *u* (за исключением начальных длин от 43 до 67) является более простым, чем правило при преобразовании последовательности *v*.

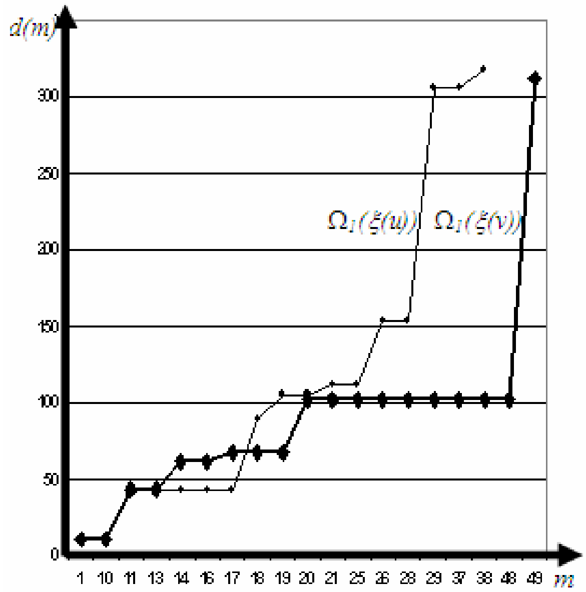

Рис. 2. Графики зависимостей длин (ось ординат) начальных отрезков последовательностей $\xi(u)$ и $\xi(v)$ от роста порядка m (ось абсцисс) рекуррентных форм, определяющих отрезки

Числовые показатели этих и остальных уровней спектра могут быть систематизированы и формально представлены функцией, по значениям которой определяется сложность схем алгоритмов.

Заключение

Существенным шагом в построении математических моделей алгоритмов явились схемы Янова. Такими схемами описываются как конкретные реализации алгоритмов (конкретные последовательности операторов и предикатов), так и схемы схем (последовательности операторов, предикатов, показателей переходов между операторами и предикатами). Однако, Ю.И.Янов и А.А.Ляпунов ограничились рассмотрением символьных структур.

В работе [4] разработан аппарат представления алгоритмов числовыми структурами. Для этого на множестве всех входных последовательностей (всех выходных последовательностей) для автомата вводится линейный порядок ω_1 (ω_2) и номера последовательностей используются как числовые координаты точек на числовой плоскости.

В результате автоматным отображениям сопоставляются числовые графики, для анализа, синтеза и распознавания которых можно использовать весь аппарат числовой непрерывной математики. В данной статье представлена оценка сложности с использованием спектра показателей рекуррентных описаний только реализаций алгоритмов, представленных в символьной форме для различных исходных данных. Числовые графики автоматных отображений, представляющих алгоритмы, позволяют проводить оценку сложности с использованием формальных критериев.

Литература

1. *Абрамов С.А. Лекции о сложности алгоритмов / С.А. Абрамов. – М.: МЦНМО, 2009. – 252 с.*

2. *Гашков С.Б. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений / С.Б. Гашков, В.Н. Чубариков. - М.: Высшая школа, 2000. – 320 с.*

3. *Николис Г. Познание сложного / Г. Николис, И. Пригожин. - М.: Мир, 1990.- 342 с.*

4. *Твердохлебов В.А. Геометрические образы законов функционирования автоматов / В.А. Твердохлебов. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. – 183 с.*

5. *Фалевич Б.Я. Теория алгоритмов / Б.Я. Фалевич. - М.: Машиностроение, 2004. - 160 с.*

6. *Янов Ю.И. Метод разрешения семантических свойств алгоритмов / Ю.И. Янов // Mathematical Problems in Computational Theorie. Banach Center Publikations. - 1988. - Vol. 21.*

7. *Янов Ю.И. О логических схемах алгоритмов / Ю.И. Янов // Проблемы кибернетики. – 1958. - Вып.1. - С. 75-127.*

Поступила в редакцию 12.02.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры автоматизации и компьютерных технологий В.А. Краснобаев, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, Украина.

ОЦІНКА СКЛАДНОСТІ АЛГОРИТМІВ ПО МОДИФІКОВАНИХ СХЕМАХ ЯНОВА

В.О. Твєрдохлебов

У схемах Янова алгоритм представлений послідовністю операторів, предикатів і покажчиків переходів між операторами. Проста форма операторів допускає оцінку складності окремих операторів. На складність алгоритмів впливає взаєморозташування операторів з урахуванням підготовки даних виконанням попередніх операторів. Для оцінки цього чинника складності пропонується розроблений метод побудови спектру числових показників, що характеризують варіанти описів схем Янова і частин схем рекурентними формами різних порядків. Наводиться приклад порівняння по складності двох реалізацій конкретного алгоритму.

Ключові слова: алгоритм, логічні схеми Янова, складність алгоритмів, автомат, автоматне відображення, геометричний образ автоматного відображення, рекурентна форма, спектр показників рекурентних форм.

ESTIMATION OF COMPLEXITY OF ALGORITHMS BY MODIFIED YANOV'S SCHEMES

V.A. Tverdokhlebov

In Yanov schemes the algorithm is presented by sequence of operators, predicates and indexes of transitions between operators. The elementary form of operators supposes an estimation of complexity of separate operators. Complexity of algorithms is influenced with interposition of operators in view of preparation of the previous operators given by performance. For an estimation of this factor of complexity is offered the developed method of construction of a spectrum of the numerical parameters describing variants of descriptions of schemes and parts of Yanov schemes by recurrent forms of various orders. The example of comparison on complexity of two realizations of concrete algorithm is brought.

Keywords: Algorithm, logic Yanov schemes, complexity of algorithms, state machine, automaton map, geometrical image of automaton map, the recurrent form, spectrum of parameters of recurrent forms.

Твердохлебов Владимир Александрович – д-р техн. наук, проф., гл. научн. сотр., Институт проблем точной механики и управления Российской Академии Наук, Саратов, Россия, e-mail: tverdokhlebovva@list.ru.