

УДК 004.932

С.Г.АНТОЩУК, А.А.НИКОЛЕНКО

Одесский национальный политехнический университет, Украина

ИНТЕГРАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПО МАСШТАБАМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрены свойства интегрального распределения энергии по масштабам непрерывного вейвлет-преобразования квазипериодических сигналов (ИРЭМ). Проведен анализ ИРЭМ для базисных функций Гаусса и Хаара. Показано, что ИРЭМ для модели строки объекта и модели строки символьной последовательности имеет характерные особенности, которые могут быть использованы при выборе рационального значения масштабного уровня для локализации в области вейвлет-преобразования отдельных объектов либо группы объектов (например, символьной информации) на изображении. Разработанная методика выбора масштабного уровня представляет интерес для специалистов, занимающихся обработкой сигналов и изображений в прикладных системах самого широкого применения.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование, интегральное распределение энергии по масштабам, выбор масштабного уровня.

Введение

При анализе сигналов и изображений хорошо себя зарекомендовало непрерывное вейвлет-преобразование (НВП). Особенностью НВП является возможность учитывать локальные пространственно-частотные свойства объектов на изображении. Благодаря данной особенности НВП с симметричными нечетными базисными функциями находит широкое применение при контурном анализе и локализации объектов на изображении.

НВП для решения задачи локализации и выделения контуров объектов обладает рядом важных свойств [1]:

- благодаря частотно-избирательным свойствам НВП позволяет регулировать детальность объектов;
- помехоустойчивость метода локализации возрастает с увеличением масштабного уровня НВП;
- при увеличении масштабного уровня преобразования расширяется пространственная локализация объектов.

Однако, несмотря на множество публикаций, посвященных вейвлет-анализу сигналов и изображений, не существует формализованного подхода к подбору требуемого масштабного уровня преобразования для локализации объектов на изображении. Поэтому представляется актуальной и целесообразной решение задачи обоснованного выбора требуемого масштабного уровня преобразования. В данной статье для ее решения предлагается использовать свойства интегрального распределения энергии по масштабам НВП сигнала.

1. Непрерывное вейвлет-преобразование при локализации сигналов

Для локализации объектов на изображении, как правило, применяют построчную (либо постолбцовую) обработку, что позволяет обрабатывать функцию интенсивности в строке (столбце) как одномерный сигнал.

Для расширения пространственной локализации и подчеркивания перепадов интенсивности могут применяться действительные вейвлеты, заданные в виде симметричных нечетных функций $\psi(t) = -\psi(t)$, имеющие компактный или эффективный носитель, в частности, вейвлеты Гаусса, Хаара, гиперболическое вейвлет-преобразование (ГВП) и т.д. [1, 2]. Эти базисные вейвлет-функции (ВФ) удовлетворяют ряду необходимых условий: локализации, допустимости, осцилляции (знакопеременности), ограниченности

Следует отметить, что несимметричные ВФ не используются для подчеркивания перепадов интенсивности изображения, т.к. смещают центр перепада интенсивности. В тоже время, симметричные ВФ обладают свойством сохранять неизменным положение центра перепада при его подчеркивании. Благодаря этому качеству они находят применение при локализации объектов, основанной на методах обнаружения перепадов интенсивности на изображении.

НВП с действительной ВФ определяется выражением [1]

$$WF(x, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) dt, \quad (1)$$

где $f(t)$ — преобразуемая (анализируемая) функция; $\psi(t,s) = \psi\left(\frac{t-x}{s}\right)$ — базисная функция (вейвлет) с единичной нормой для всех масштабов s ; x — параметр сдвига.

2. Интегральное распределение энергии по масштабам вейвлет-преобразования

Найдем функцию интегрального распределения энергии по масштабным уровням НВП квазипериодических сигналов $f(t)$ [3]

$$E_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |WF(x,s)|^2 dx, \quad (2)$$

где $WF(x,s)$ — НВП сигнала.

Модель квазипериодического сигнала представим в виде [4]

$$f(t) = \sum_{i=1}^{i=N} 1\left(t - x_0 - (i-1)T - \sum_{k=2}^i \varepsilon_{Tk}\right) - \sum_{i=1}^{i=N} 1\left(t - x_0 - (i-1)T - \sum_{k=2}^i \varepsilon_{Tk} - d - \xi_i\right), \quad (3)$$

где N — количество прямоугольных импульсов последовательности; $1(t)$ — единичная функция Хевисайда; x_0 — координата первого импульса; ε_{Tk} и ξ_i — случайные изменения периода T и длительности d импульса соответственно.

Следует отметить, что такой модели при анализе изображений соответствует строка с символьной последовательностью. Модель строки, содержащей объект, представляется одним импульсом ($N=1$) с длительностью, равной протяженности объекта $d=D$.

Поскольку аналитические выкладки в пространственной области слишком громоздки, то анализ НВП $WF(x,s)$ проведем в частотной области, используя Фурье-образ $WF(\omega,s)$.

С учетом свойств преобразования Фурье выражение (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} WF(\omega,s) &= \\ &= \Phi(f(t)) \cdot \Phi(\psi(t,s)) = \hat{F}(\omega) \cdot \hat{\psi}(\omega,s), \end{aligned} \quad (4)$$

где Φ — оператор преобразования Фурье, $\hat{F}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega,s)$ — Фурье-образы $f(t)$ и $\psi(t,s)$ соответственно.

Функция ИРЭМ (2) в частотной области определяется как

$$E_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |WF(\omega,s)|^2 d\omega. \quad (5)$$

Преобразования Фурье НВП модели (3) имеет вид

$$\begin{aligned} WF(\omega,s) &= \frac{2}{\omega} e^{-j\omega\left(x_0 + \frac{d}{2}\right)} \times \\ &\times \left[\sum_{i=1}^N \sin\left(\omega \frac{d + \xi_i}{2}\right) e^{-j\omega\left[(i-1)T + \sum_{k=1}^i \varepsilon_{Tk} + \frac{\xi_i}{2}\right]} \right] \hat{\psi}(\omega,s). \end{aligned} \quad (6)$$

При подстановке (6) в (5) можно провести анализ функции ИРЭМ для сигналов с различными параметрами (N , T , d , ε_{Tk} , ξ_i). Однако выполнить такой анализ аналитически сложно. Поэтому для упрощения рассмотрим частный случай модели (3) при $\varepsilon_{Tk} = 0$, $\xi_i = 0$ (символы имеют постоянный период T и длительность d). Тогда с учетом четности подынтегрального выражения (6) получим

$$\begin{aligned} E_n(s) &= \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\omega,s)|^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega d}{2} \sin^2 \frac{N\omega T}{2}}{\omega^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} d\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Проведем расчет и анализ ИРЭМ для базисных ВФ Хаара (HAAR-вейвлет) и Гаусса (WAVE-вейвлет). Эти ВФ обладают различными фильтрующими свойствами. ВФ Гаусса имеет гладкую передаточную характеристику и наилучшие фильтрующие свойства, что приводит к «размытию» границ объектов. ВФ Хаара имеют боковые лепестки в передаточных характеристиках, что обеспечивает возможность подчеркивания более высокочастотных составляющих с меньшей интенсивностью.

Пусть вейвлет Хаара задан на участке $t \in [-0.5, 0.5]$ в виде

$$\psi(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{s}}, & -0.5 \leq t < 0; \\ +\frac{1}{\sqrt{s}}, & 0 \leq t \leq 0.5 \end{cases}, \quad (8)$$

модуль его Фурье-образа

$$|\hat{\psi}(\omega,s)| = \frac{4 \sin^2\left(\frac{\omega s}{4}\right)}{\sqrt{s\omega}}. \quad (9)$$

Следовательно, в случае базисной ВФ Хаара с учетом (7) и (9) ИРЭМ можно записать:

$$E_n(s) = \frac{64}{\pi s} \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 \frac{\omega s}{4} \sin^2 \frac{\omega d}{2} \sin^2 \frac{N\omega T}{2}}{\omega^4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} d\omega. \quad (10)$$

Интеграл, входящий в выражение (10), нельзя вычислить в общем виде. Однако, для конкретного значения $N \in R^+$ ИРЭМ можно представить

$$E_n(s) = \frac{k_0}{3}s^2 + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{3} (s - \beta_i)^3 l(s - \beta_i),$$

где k_0, k_i – коэффициенты, зависящие от N ;
 β_i – коэффициенты, зависящие от N, d, T ;
 m – количество слагаемых (в общем случае зависит от N);

$l(s)$ – единичная функция Хевисайда.

ИРЭМ для конкретных значений N определяется следующим образом:

для $N = 1$ (модель строки с объектом):

$$E1(s) = \frac{1}{6}s^2 - \frac{1}{3s}(s-d)^3 l(s-d) + \frac{1}{6s}(s-2d)^3 l(s-2d);$$

для $N = 2$ (модель строки с символами):

$$\begin{aligned} E2(s) = & \frac{1}{3}s^2 - \frac{2}{3s}(s-d)^3 l(s-d) - \\ & - \frac{1}{3s}(s-T+d)^3 l(s-T+d) + \frac{1}{3s}(s-2d)^3 l(s-2d) + \\ & + \frac{1}{6s}(s-2T+2d)^3 l(s-2T+2d) - \\ & - \frac{1}{3s}(s-T-d)^3 l(s-T-d) + \\ & + \frac{2}{3s}(s-T)^3 l(s-T) - \frac{8}{3s}(s-2T)^3 l(s-2T) + \\ & + \frac{1}{6s}(s-2T-2d)^3 l(s-2T-2d) \end{aligned}$$

и т.д.

Расчеты показали, что при возрастании значения масштабного уровня s функция ИРЭМ НВП с базисной ВФ Хаара стремится к пределу, который определяется выражением $E_\infty(s) = N^2 d^2$, т.е. зависит от количества импульсов в последовательности и их длительности.

Проведем аналогичные расчеты ИРЭМ НВП с базисной ВФ Гаусса, которая имеет единичную норму на всех масштабах

$$\psi(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t}{s\sqrt{s}} e^{-\frac{t^2}{2s^2}},$$

и модуль Фурье-образа

$$|\hat{\psi}(\omega, s)| = \sqrt{2\pi} \omega s \sqrt{s} e^{-\frac{\omega^2 s^2}{2}}. \quad (12)$$

ИРЭМ НВП с базисной ВФ Гаусса последовательности прямоугольных импульсов (7) с учетом (12)

$$E_n(s) = \frac{4\sqrt{2}s^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\omega^2 s^2} \frac{\sin^2 \frac{\omega d}{2} \sin^2 \frac{N\omega T}{2}}{\sin^2 \frac{\omega T}{2}} d\omega. \quad (13)$$

Как и для вейвлета Хаара, интеграл в выражении (13) можно вычислить только для конкретного N . Опуская промежуточные выкладки, можно записать:

для $N = 1$ (модель строки с объектом):

$$E1(s) = \sqrt{2}s^2 \left(1 - e^{-\frac{d^2}{4s^2}} \right);$$

для $N = 2$ (модель строки с символами):

$$\begin{aligned} E2(s) = & 2\sqrt{2}s^2 \times \\ & \times \left(1 - e^{-\frac{d^2}{4s^2}} + e^{-\frac{T^2}{4s^2}} - \frac{e^{-\frac{(T+d)^2}{4s^2}} + e^{-\frac{(T-d)^2}{4s^2}}}{2} \right). \quad (14) \end{aligned}$$

Функция ИРЭМ НВП с базисной ВФ Гаусса при возрастании значения масштабного уровня s также стремится к пределу, который равен

$$E_\infty(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} N^2 d^2.$$

По полученным выражениям были рассчитаны соответствующие зависимости функций ИРЭМ НВП с базисной ВФ Гаусса и с базисной ВФ Хаара. Анализ полученных зависимостей (10) и (13) показал различный характер их поведения при $N \geq 2$.

3. Моделирование и анализ полученных результатов

Проведено компьютерное моделирование с использованием численных методов при расчете ИРЭМ (рис. 1). Моделирование проводилось для модели строки с объектом ($N = 1$) и модели строки с символами ($N = 19$).

Результаты моделирования показали, что для строки изображения, содержащей однородный объект, с ростом масштабного уровня s НВП (как с базисной ВФ Гаусса, так и с базисной ВФ Хаара) наблюдается увеличение эффекта подчеркивания границ (рис. 1, а, б).

Это соответствует росту ИРЭМ (кривая 1) с увеличением масштабного уровня s (рис. 1, д, е), т.е. эта функция ИРЭМ для однородного объекта имеет монотонно возрастающий характер и стремится к пределу, пропорционально зависящему от длительности импульса d .

Анализ НВП строки символов показывает, что на низких масштабных уровнях подчеркиваются перепады интенсивности на границах отдельных символов, а на высоких – перепады на границе всей надписи в строке (рис. 1, в, г).

Полученная зависимость ИРЭМ для модели строки символов имеет экстремальный характер (рис. 1, д, е) – кривая 2.

Максимальному значению ИРЭМ (рис. 1, ж, з) соответствует масштабный уровень s_1 , обеспечивающий наилучшее подчеркивание отдельных символов надписи, минимальному значению – мас-

штабный уровень s_2 НВП, после которого строка символов воспринимается как однородный объект, что соответствует положению границ надписи.

Следует отметить, что вид НВП периодической последовательности с базисной ВФ Гаусса и с базисной ВФ Хаара отличаются (рис. 1, в, г).

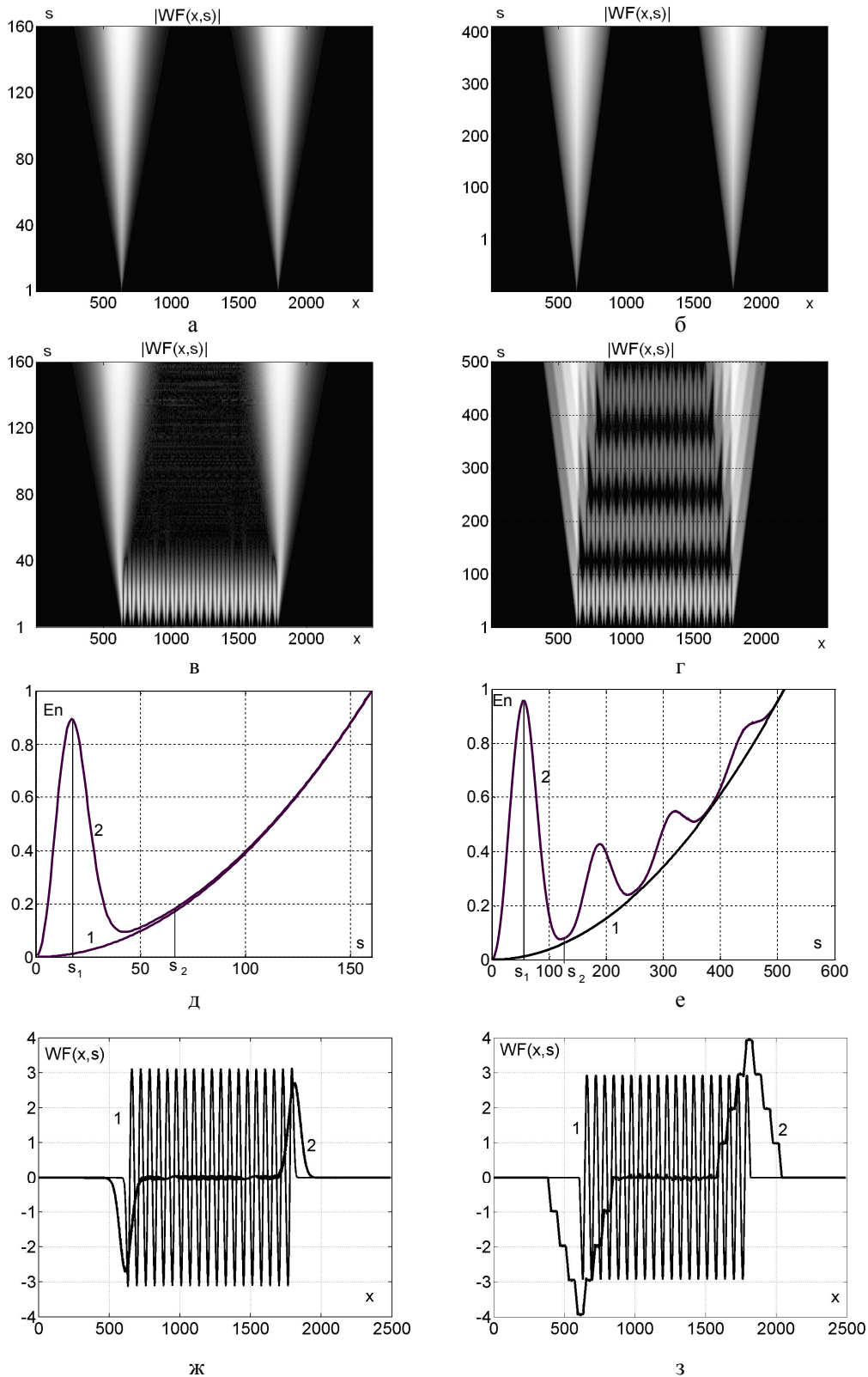


Рис. 1. Результаты моделирования:

НВП для модели строки с объектом (одиночным импульсом) а – с ВФ Гаусса, б – с ВФ Хаара;

НВП для модели строки с символами: в – с ВФ Гаусса, г – с ВФ Хаара;

зависимости ИРЭМ для моделей строки с объектом (1) и с символами (2): д – с ВФ Гаусса, е – с ВФ Хаара;

коэффициенты ВП с разными масштабными уровнями $s_1(1) \ll s_2(2)$: ж – с ВФ Гаусса, з – с ВФ Хаара

Поскольку функция Гаусса имеет гладкую передаточную характеристику, то с ростом масштабного уровня НВП наблюдается увеличение эффекта подчеркивания внешних границ последовательности. ИРЭМ имеет две экстремальные точки – кривая 2 (рис. 1, д, е). Значение масштабного уровня, соответствующее локальному максимуму, характеризуется резонансом (совпадением периодов) ВФ и последовательности импульсов и позволяет зафиксировать необходимый масштабный уровень (s_1) для обнаружения отдельных элементов данной последовательности. При достаточно большом масштабном уровне НВП s_2 (превышающем значение, соответствующее последнему локальному минимуму) квазипериодическая последовательность воспринимается как однородный объект, отдельные импульсы последовательности становятся неразличимы.

В базисных функциях Хаара имеются боковые лепестки в передаточных характеристиках, что обеспечивает возможность подчеркивания более высокочастотных составляющих с меньшей интенсивностью. НВП носит пульсирующий характер (рис. 1, б). Функция ИРЭМ имеет дополнительно несколько перегибов или менее ярко выраженных экстремумов. Все последующие максимумы повторяются через интервал, равный удвоенному периоду следования импульсов (рис. 1, в) – кривая 2. Следовательно, по количеству локальных экстремумов можно оценить количество импульсов в последовательности. При достаточно большом масштабном уровне s НВП (превышающем значение, соответствующее последнему локальному минимуму) квазипериодическая последовательность воспринимается так же, как и при базисной функции Гаусса, как однородный объект, отдельные импульсы последовательности становятся неразличимы. Поэтому для обнаружения границ последовательности можно использовать значение масштабного уровня, равное величине, при которой наблюдается последняя точка перегиба зависимости ИРЭМ НВП. При дальнейшем увеличении масштабного уровня НВП вид функции ИРЭМ становится монотонно возрастающим и стремится к некоторому предельному значению, определяемому типом базисной функции и количеством импульсов в квазипериодической последовательности. Исследование зависимости ИРЭМ НВП от масштабного уровня для разных базисных функций показало, что многоэкстремальный характер этой зависимости наблюдается только при наличии значительных боковых лепестков в их АЧХ (вейвлет Хаара, гиперболическое вейвлет-преобразование). Для «глад-

ких» вейвлет-функций многоэкстремальность не наблюдается.

На основе установленной зависимости ИРЭМ предложена методика выбора масштабного уровня НВП, которая заключается в следующем:

1. Проводится НВП исходного изображения по строкам (либо столбцам).

2. Вычисляется функция ИРЭМ НВП и проводится ее анализ.

3. При наличии экстремумов в функции ИРЭМ определяются масштабы для обработки периодической последовательности:

– по положению первого максимума ИРЭМ определяется требуемый масштабный уровень НВП для подчеркивания каждого символа последовательности;

– по положению последней точки перегиба ИРЭМ определяется требуемый масштабный уровень НВП для локализации всей последовательности.

Заключение

Таким образом, для обоснованного выбора требуемого масштабного уровня преобразования при анализе сигналов и изображений целесообразно использовать ИРЭМ НВП. Его анализ позволяет получить информацию о структуре изображения (например, наличии строки символов или однородного объекта) и обеспечить выбор масштабного уровня НВП. Разработанная методика выбора масштабного уровня представляет интерес для специалистов, занимающихся обработкой сигналов и изображений в прикладных системах самого широкого применения.

Литература

1. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла. – М.: Мир, 2005. – 671 с
2. Использование вейвлет-преобразования при локализации последовательностей символов / С.Г. Антощук, А.А. Николенко, Е.В. Ткаченко, О.Ю. Бабилунга // Искусственный интеллект. – 2009. – № 4. – С. 23-29.
3. Короновский А.А. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения / А.А. Короновский, А.Е. Храмов – М.: Физматлит, 2003. – 176 с.
4. Адаптивна локалізація символічних написів на зображеннях методом вейвлет-аналізу / С.Г. Антощук, А.О. Ніколенко, О.Ю. Бабилунга, О.В. Ткаченко // Вісник Житомирського технол. ун-ту. – 2008. – № 4(47). – С. 124-130

Поступила в редакцію 11.02.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. кафедри комп'ютерних систем В.С. Ситников, Одесский национальный политехнический университет, Украина.

ІНТЕГРАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ЕНЕРГІЇ ПО МАСШТАБАМ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРИ АНАЛІЗІ ЗОБРАЖЕНЬ

С.Г. Антощук, А.О. Ніколенко

Розглянуті властивості інтегрального розподілу енергії по масштабам неперервного вейвлет-перетворення квазіперіодичних сигналів (ІРЕМ). Проведено аналіз ІРЕМ для базисних функцій Гауса та Хаара. Показано, що ІРЕМ для моделі рядка об'єкта та моделі рядка символної послідовності має характерні особливості, що можуть бути використані при виборі раціонального значення масштабного рівня для локалізації в області вейвлет-перетворення окремих об'єктів або групи об'єктів (наприклад, символної інформації) на зображенні. Розроблена методика вибору масштабного рівня становить інтерес для фахівців, що займаються обробкою сигналів та зображень у прикладних системах самого широкого застосування.

Ключові слова: вейвлет-перетворення, інтегральний розподіл енергії по масштабам, вибір масштабного рівня.

INTEGRAL ENERGY DISTRIBUTION ON WAVELET TRANSFORM SCALES AT IMAGE ANALYSIS

S.G. Antoshchuk, A.O. Nikolenko

Properties of the integral energy distribution on wavelet transform scales (IEDS) of quasi-periodical signals are considered. The IEDS for the base functions of Gausse and Haar is analyzed. It is demonstrated that that IEDS for the model of object row and model of character sequence row has characteristic features and it can be used for the choice of rational value of scale level for localization of separate objects or group of objects (for example, a character information) on image in wavelet transform field. The developed technique of choosing a scale level is of interest to professionals involved in signal and image processing in application systems most widely used.

Keywords: wavelet transforms, integral energy distribution on the scales, scale level choice.

Антощук Светлана Григорьевна – д-р техн. наук, проф., директор інститута комп'ютерних систем, зав. кафедрой информационных систем, Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина, e-mail: svetlana_onpu@mail.ru, asg@ics.opu.ua.

Ніколенко Анатолій Александрович – канд. техн. наук, доц., доц. кафедри інформаційних систем, Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина, e-mail: anatolyn@ukr.net.