УДК 004.89

Ю.Н. СОКОЛОВ, О.И. МОРОЗОВА

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ОБУЧЕНИЯ

В статье рассматривается формулировка и решение задачи синтеза системы оптимального управления процессом обучении, которая состоит в разработке алгоритма управления, минимизирующего квадратичную ошибку с учетом ограничений на состояние и управление. Предполагается, что процесс обучения описывается конечно-разностным уравнением, отражающим степень знания и коэффициенты забывания и остаточных знаний. Для реализации оптимального закона оптимального управления использован принцип модального управления. Предложена схема компьютерного моделирования оптимальной системы, подтверждающая существенное преимущество оптимальной системы над неоптимальной.

Ключевые слова: *синтез, оптимальное управление, вектор управления, обучение, коэффициент забывания, коэффициент остаточных знаний, интенсивность обучения.*

Введение

Организацию процесса обучения (комплекс организационно-методических мероприятий, включая объект обучения (или управления)) будем называть *системой*, а систему управления (организации), обеспечивающую наилучшее в определенном смысле качество процесса обучения при заданных условиях и ограничениях, назовем *оптимальной*. Качество таких систем можно оценить некоторым критерием оптимальности J, учитывающим текущий уровень знаний $x(k)$ (состояние) и затраты (усилия или управление) на обучение $u(k)$ в течение некоторого конечного промежутка времени $\overline{0, N}$.

Известно конечно-разностное уравнение процесса обучения, в общем случае векторное нелинейное. Заданы ограничения на управление и состояние системы.

Требуется найти вектор управления (алгоритм управления или организации обучения), который переводит объект управления из начального состояния в конечное, удерживает в этом конечном состоянии или изменяет его в соответствии с входным сигналом, обеспечивая при этом экстремальное значение критерия оптимальности. Синтез считается законченным, если алгоритм управления найден как функция вектора переменных состояния объекта управления при известных ограничениях на составляющие вектора управления и переменные состояния.

Задача синтеза оптимальной системы состоит в разработке системы или алгоритма управления, минимизирующих некоторый критерий оптимальности с учетом ограничений на управление и состояние.

1. Постановка задачи синтеза

Пусть процесс обучения какой-либо дисциплине описывается обыкновенным линейным разностным уравнением первого порядка:

$$x(k+1) = (1-a)x(k) + u(k), \tag{1}$$

где $x \in [0,1]$ – степень знания элементов дисциплины, $a \in [0,1]$ – коэффициент забывания (обычно $a = 0,2 \ldots 0,5$), $u \in [0,1]$ – управление, причем $u(k) = b + \bar{u}(k)$, где $b \in [0,1]$ – коэффициент остаточных знаний, а $\bar{u} \in [0,1]$ – интенсивность обучения, $k \in [0, N]$ – текущий момент времени обучения.

Выполним некоторые преобразования уравнения (1) и получим уравнение в отклонениях

$$x^*(k) = x(k) - q, \tag{2}$$

где q – желаемый уровень знаний.

Естественно предположить, что в пределе $q = 1$ и при $k \to \infty$ $x^* \to 0$. Однако, в силу естественных ограничений способностей человека, такое требование никогда не может быть достигнуто. Оптимальное управление (или организация обучения) может обеспечить лишь наилучшее в некотором смысле приближение к желаемому уровню.

Подставив из (2) $x(k) = x^*(k) + q$ в (1), получим:

$$x^*(k+1) = (1-a)x^*(k) - aq + u(k),$$

или

$$x^*(k+1) = (1-a)x^*(k) + u^*(k), \tag{3}$$

где $u^*(k)$ – оптимальное управление, которое принимает вид:

$$u^*(k) = u(k) - aq, \quad (4)$$

или

$$u^*(k) = [\overline{u}(k) + b] - aq. \quad (5)$$

Из уравнения (5) легко найти требуемую интенсивность обучения, удовлетворяющую оптимальному управлению, а именно:

$$\overline{u}(k) = u^*(k) + (aq - b), \quad b \le a. \quad (6)$$

Потребуем, чтобы управление доставляло минимум квадратичной ошибке при минимуме интенсивности обучения. Тогда математически критерий оптимальности можно записать так:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} [x^{*2}(k) + u^{*2}(k)]. \quad (7)$$

Представим критерий оптимальности в общем виде:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), x(k+1), u(k)], \quad (8)$$

где $F[x(k), x(k+1), u(k)]$ – дифференцируемая скалярная функция.

Требуется найти оптимальное управление $u^*(k) = u(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, минимизирующее критерий оптимальности (7) и удовлетворяющее уравнению (3).

2. Выбор метода и последовательность решения задачи синтеза

Для решения задачи синтеза оптимальной системы, могут быть использованы методы вариационного исчисления, принцип максимума Л.С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана, градиентные методы и др. [1-5].

Каждый из них может дать решение в замкнутой форме. Для дискретных систем методы вариационного исчисления и принцип максимума дают одинаковые результаты. Они имеют и аналогичные трудности применения, связанные с определением неопределенных множителей Лагранжа в первом методе и вспомогательных функций сопряженной системы уравнений – во втором. Неудобство применения метода динамического программирования связано с необходимостью поиска оптимального управления в обратном времени.

Поэтому для решения задачи оптимального управления процессом обучения воспользуемся методом вариационного исчисления [6-7].

Задача синтеза решается следующим образом.

1. Согласно принципу вариации задача нахождения минимума функции при наличии ограничений в виде равенств (уравнение (6)) решается путем добавления ограничения на эту функцию. С этой целью введем множитель Лагранжа $\lambda(k+1)$. Тогда критерий (8) преобразуется к расширенному критерию:

$$J_c = \sum_{k=0}^{N} F_c\,[x(k),\ u(k)], \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} &F_c\,[x(k), u(k)] = \\ &= \frac{1}{2}[x^2(k) + u^2(k)] + \lambda(k+1)[x(k+1) - \\ &-(1-a)x(k) - u(k)] = F_c(k). \end{aligned} \quad (10)$$

В результате разложения (см. [6-7]) функции F_c в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми членами разложения будем иметь:

$$\begin{aligned} &F_c^*\,[x^*(k), x^*(k+1), \lambda^*(k+1), u^*(k)] = \\ &= \frac{1}{2}[x^{*2}(k) + u^{*2}(k)] + \lambda^*(k+1)[x^*(k+1) - \\ &-(1-a)x^*(k) - u^*(k)] = F_c^*(k); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &F_c^*\,[x^*(k-1), x^*(k), \lambda^*(k), u^*(k-1)] = \\ &= \frac{1}{2}[x^{*2}(k-1) + u^{*2}(k-1)] + \lambda^*(k)[x^*(k) - \\ &-(1-a)x^*(k-1) - u^*(k-1)] = F_c^*(k-1). \end{aligned} \quad (12)$$

2. Определяем дискретное уравнение Эйлера – Лагранжа для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_c^*(k)}{\partial x^*(k)} + \frac{\partial F_c^*(k-1)}{\partial x^*(k)} = \\ &= \frac{1}{2}2x^*(k) - (1-a)\lambda^*(k+1) + \lambda^*(k) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

или

$$(1-a)\lambda^*(k+1) - \lambda^*(k) - x^*(k) = 0. \quad (14)$$

3. Получаем уравнение процесса при условиях оптимума, дифференцируя (11) по множителю Лагранжа:

$$\frac{\partial F_c^*(k)}{\partial \lambda^*(k+1)} = x^*(k+1) - (1-a)x^*(k) - u^*(k) = 0, \quad (15)$$

которое является ограничением в виде равенства.

4. Определяем оптимальное управление:

$$\frac{\partial F_c^*(k)}{\partial u^*(k)} = u^*(k) - \lambda^*(k+1) = 0. \quad (16)$$

Откуда

$$u^*(k) = \lambda^*(k+1). \quad (17)$$

После подстановки выражения (17) в (15) уравнения (14) и (15) образуют систему из двух разностных уравнений первого порядка, решение которой определяет $\lambda^*(k+1)$. Поскольку $x(0)$ и $x(N)$ заданы, в рассматриваемом случае эти значения определяют граничные условия для решения уравнений (14) и (15) и применять условие трансверсальности нет необходимости. Система из двух разностных уравнений имеет вид

$$\begin{cases}(1-a)\lambda^*(k+1)-\lambda^*(k)-x^*(k)=0,\\ x^*(k+1)-\lambda^*(k+1)-(1-a)x^*(k)=0,\end{cases} \quad (18)$$

при граничных условиях $x(0)$ и $x(N)$.

Таким образом, для объекта управления, описываемого скалярным уравнением (6), закон оптимального управления получен в виде (17):

$$u(k)=u^*(k)=\lambda^*(k+1). \quad (19)$$

Итак, для определения оптимального управления необходимо знать закон изменения во времени множителя Лагранжа $\lambda^*(k+1)$, который можно найти из решения системы разностных уравнений (18).

3. Решение задачи синтеза

3.1. Решение уравнений оптимальной системы

Решим уравнения (18) методом z-преобразования.

Введем новые обозначения: $x^*=x$, $\lambda^*=y$. Тогда уравнения (18) можно записать так:

$$\begin{cases}(1-a)y(k+1)=y(k)+x(k),\\ x(k+1)=y(k+1)+(1-a)x(k).\end{cases} \quad (20)$$

Применим к уравнениям (20) z-преобразование, используя теорему о сдвиге во временной области:

$$\begin{cases}(1-a)[zY(z)-y(0)]=Y(z)+X(z);\\ zX(z)-x(0)=zY(z)-y(0)+(1-a)X(z).\end{cases} \quad (21)$$

Начальные условия $x(0)=e(0)=1$ (в начальный момент времени ошибка максимальна), а $y(0)=\lambda^*(0)$ пока не известно.

С учетом начальных условий имеем:

$$\begin{cases}(1-a)[zY(z)-y(0)]=Y(z)+X(z);\\ zX(z)-1=zY(z)-y(0)+(1-a)X(z).\end{cases} \quad (22)$$

Решим эти уравнения относительно X и Y с помощью MATLAB [8], используя следующую программу:

```
>> syms X Y z y0 a
eq1=(1-a)*(z*Y-y0)-Y-X;
eq2=z*X-1-z*Y+y0-(1-a)*X;
[X,Y]=solve(eq1, eq2, X, Y)
X =
-(y0 + z - a*z - 1)/(a^2*z + a*z^2 - 2*a*z + a - z^2 + 3*z - 1)
Y =
 (2*y0 - 2*a*y0 - y0*z + a^2*y0 + a*y0*z - 1)/(a^2*z + a*z^2 - 2*a*z + a - z^2 + 3*z - 1)
```

Пусть для конкретности, a=0,5. Тогда, продолжив программу, будем иметь:

```
>>a=0.5;
X =-(y0 + z - a*z - 1)/(a^2*z + a*z^2 - 2*a*z + a - z^2 + 3*z - 1)
 Y = (2*y0 - 2*a*y0 - y0*z + a^2*y0 + a*y0*z - 1)/(a^2*z + a*z^2 - 2*a*z + a - z^2 + 3*z - 1)
X =
 (y0 + z/2 - 1)/(z^2/2 - (9*z)/4 + 1/2)
Y =
 ((y0*z)/2 - (5*y0)/4 + 1)/(z^2/2 - (9*z)/4 + 1/2)
```

Таким образом, решением системы уравнений (22) при a=0,5 является:

$$X^*(z)=X(z)=\frac{0,5z+\lambda^*(0)-1}{0,5z^2-2,25z+0,5}, \quad (23)$$

$$\Lambda^*(z)=Y(z)=\frac{0,5z\lambda^*(0)-1,25\lambda^*(0)+1}{0,5z^2-2,25z+0,5}. \quad (24)$$

Для получения оригиналов (обратных z-преобразований) можно воспользоваться специальными таблицами соответствия z-преобразований и оригиналов, а еще лучше, – специальной функцией MATLAB – **iztrans.** В обоих случаях формулы (23) и (24) необходимо преобразовать к виду, требуемому для применения таблиц преобразования или функции iztrans.

Прежде всего, необходимо, чтобы знаменатели всех членов разложения были линейными вида $z+p_i$, где p_i – действительный неположительный корень знаменателя выражения (23) или (24). Кроме того, для вхождения в таблицу соответствия или при обращении к функции iztrans необходимо, чтобы все члены разложения содержали в своих числителях множитель z. Тогда фактически будет получен оригинал функции $X_1(z)=zX(z)$, а не функции $X(z)$.

Однако, учитывая простую связь между ними, а именно, $X(z)=z^{-1}X_1(z)$, оригинал исходной функции может быть получен простым сдвигом расчетного оригинала на один такт, т. е. $x(k)=x_1(k-1)$.

Покажем подробно методику получения оригиналов по формулам (23) и (24) с использованием функций residue и iztrans. Преимуществом такого подхода является то, что в использовании таблиц прямого и обратного z-преобразований и связанных с этим дополнительных вычислений нет необходимости.

3.1.1. Получение оригинала по формуле (23)

1. Представим формулу (23) в виде суммы двух слагаемых (соответственно содержащей множитель z в числителе и без него):

$$X^*(z) = X(z) = \frac{0,5z + \lambda^*(0) - 1}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5} =$$

$$= X_1(z) + X_2(z) = \frac{0,5z}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5} + \qquad (25)$$

$$+ \frac{\lambda^*(0) - 1}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5}.$$

2. Вычисляем обратные z-преобразования слагаемых в выражениях (25) с помощью функций MATLAB **residue** и **iztrans**:

1-е слагаемое:

$$X_1(z) = \frac{0,5z}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5}.$$

Разлагаем прежде это слагаемое на сумму простейших слагаемых с помощью функции residue, используя программу:

```
>>[r p k]=residue([0.5 0], [0.5 -2.25  0.5])
r =
  1.0582
  -0.0582
p =
  4.2656
  0.2344
k =
   []
```

Следовательно,

$$X_1(z) = \frac{0,5z}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5} = \frac{1,0582}{z - 4,2656} - \frac{0,0582}{z - 0,2344}.$$

Чтобы получить обратное z-преобразование, умножим числитель каждого слагаемого этого выражения на z

$$X_{11}(z) = \frac{1,0582z}{z - 4,2656} - \frac{0,0582z}{z - 0,2344}$$

и применим функцию iztrans:

```
>>syms z k
X11=1.0582*z/(z-4.2656)- 0.0582*z/(z-0.2344);
digits(4)
x11=vpa(iztrans(X11,k))
x11 =
 1.058*4.266^k - 0.0582*0.2344^k
```

Таким образом, имеем:

$$x_{11}(k) = 1,058 \cdot 4,266^k - 0,0582 \cdot 0,2344^k.$$

Как отмечено выше, если найдено обратное z-преобразование $x_{11}(k)$ по z-преобразованию $X_{11}(z)$, то обратное z-преобразование функции $X_1(z)$ определяется следующим образом:

$$x_1(k) = Z^{-1}[X_1(\mathbf{z})] = Z^{-1}[\mathbf{z}^{-1} X_{11}(\mathbf{z})] = x_{11}(k-1).$$

Поскольку $x^*_1(k) = x_1(k) = 0$ для всех $k < 0$, то справедливо уравнение

$$x^*_1(k) = 1,058 \cdot 4,266^k - 0,0582 \cdot 0,2344)^k. \qquad (26)$$

2-е слагаемое:

$$X_2(\mathbf{z}) = \frac{\lambda^*(0) - 1}{0,5\mathbf{z}^2 - 2,25\mathbf{z} + 0,5}.$$

Все действия для определения последовательности $x^*_2(k)$ выполняются аналогично предыдущему.

Раскладывается дробь $\frac{1}{0,5\mathbf{z}^2 - 2,25\mathbf{z} + 0,5}$ на сумму простейших слагаемых с помощью функции residue и программы:

```
>>[r p k]=residue([1], [0.5 -2.25  0.5])
r =
  0.4961
  -0.4961
p =
  4.2656
  0.2344
k =
   []
```

Следовательно, с учетом числителя имеем:

$$X_2(z) = \frac{[\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961}{z - 4,2656} - \frac{[\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961}{z - 0,2344}.$$

$$X_{22}(z) = \frac{[\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961 \cdot z}{z - 4,2656} - \frac{[\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961 \cdot z}{z - 0,2344} =$$

$$= [\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961 \cdot \left(\frac{z}{z - 4,2656} - \frac{z}{z - 0,2344} \right).$$

Чтобы получить обратное z-преобразование, умножим числитель каждого слагаемого этого выражения на z и, опуская константу $[\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961$, применим функцию iztrans:

```
>>syms z k
X22=z/(z-4.2656)- z/(z-0.2344);
```

```
digits(4)
x22=vpa(iztrans(X22,k))
x22 =
 4.266^k - 1.0*0.2344^k
```

Таким образом, с учетом константы имеем:

$$x_{22}(k) = [\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961 \cdot (4,266^k - 0,2344^k).$$

По аналогии с предыдущим имеем:

$$x_2^*(k) = [\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961 \cdot (4,266^k - 0,2344^k). \quad (27)$$

Суммируя полученные решения (26) и (27), находим:

$$x^*(k) = x_1^*(k) + x_2^*(k) = 1,058 \cdot 4,266^k - -0,0582 \cdot 0,2344^k + +[\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961 \cdot (4,266^k - 0,2344^k). \quad (28)$$

3.1.2. Получение оригинала по формуле (24)

Преобразования для формулы (24) выполняются аналогично. Легко заметить, что эта формула по своей структуре подобна формуле (23).

Отличие лишь в коэффициентах числителей обоих слагаемых:

$$\Lambda^*(z) = Y(z) = \frac{0,5z\lambda^*(0) - 1,25\lambda^*(0) + 1}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5} = = Y_1(z) + Y_2(z) = = \frac{0,5z\lambda^*(0)}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5} - \frac{1,25\lambda^*(0) - 1}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5}.$$

1-е слагаемое:

$$Y_1(z) = \frac{0,5z\lambda^*(0)}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5}.$$

Разложим прежде это выражение на сумму простейших слагаемых (без учета константы) с помощью функции residue, используя программу:

```
>>[r p k]=residue([0.5 0], [0.5 -2.25  0.5])
r =
  1.0582
  -0.0582
p =
  4.2656
  0.2344
k =
   []
```

$$Y_1(z) = \frac{0,5z}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5} = \frac{1,0582}{z - 4,2656} - \frac{0,0582}{z - 0,2344}.$$

Чтобы получить обратное z-преобразование, умножим числитель каждого слагаемого этого выражения на z

$$Y_{11}(z) = \frac{1,0582z}{z - 4,2656} - \frac{0,0582z}{z - 0,2344}$$

и применим функцию iztrans (без учета константы):

```
>>syms z k
Y11=z/(z-4.2656)- z/(z-0.2344);
digits(4)
y11=vpa(iztrans(Y11,k))
y11 =
 4.266^k - 1.0*0.2344^k
```

Таким образом, имеем:

$$y_{11}(k) = \lambda^*(0) \cdot (1,058 \cdot 4,266^k - 0,0582 \cdot 0,2344^k).$$

Если найдено обратное z-преобразование $y_{11}(k)$ по z-преобразованию $Y_{11}(z)$, то обратное z-преобразование функции $Y_1(z)$ определяется следующим образом:

$$y_1(k) = Z^{-1}[Y_1(\mathbf{z})] = Z^{-1}[\mathbf{z}^{-1} Y_{11}(\mathbf{z})] = y_{11}(k-1).$$

Поскольку $y_1^*(k) = y_1(k) = 0$ для всех $k < 0$, то справедливо уравнение

$$y_1^*(k) = \lambda^*(0) \cdot (1,058 \cdot 4,266^k - 0,0582 \cdot 0,2344^k).$$

2-е слагаемое:

$$Y_2(z) = -\frac{1,25\lambda^*(0) - 1}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5}.$$

Чтобы получить обратное z-преобразование, разложим

$$\frac{1}{0,5z^2 - 2,25z + 0,5},$$

на сумму простейших слагаемых с помощью функции residue, используя программу:

```
>>[r p k]=residue([1], [0.5 -2.25  0.5])
r =
  0.4961
  -0.4961

p =
  4.2656
  0.2344
k =
   []
```

$$Y_2(z) = -\frac{[1,25\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961}{z - 4,2656} + \frac{[1,25\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961}{z - 0,2344}.$$

$$Y_{22}(z) = -\frac{[1,25\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961 \cdot z}{z - 4,2656} + + \frac{[1,25\lambda^*(0) - 1] \cdot 0,4961 \cdot z}{z - 0,2344} =$$

$$= -[1,25\lambda^*(0)-1]\cdot 0,4961\cdot\left(\frac{z}{z-4,2656}-\frac{z}{z-0,2344}\right).$$

Применим функцию iztrans:

```
>>syms z k
Y22=z/(z-4.2656)- z/(z-0.2344);
digits(4)
y22=vpa(iztrans(Y22,k))
y22 =
 4.266^k - 1.0*0.2344^k
```

С учетом числителей будем иметь:

$$y_1^*(k) = \lambda^*(0)\cdot(1,058\cdot 4,266^k - 0,0582\cdot 0,2344^k).$$

$$y_2^*(k) = -[1,25\lambda^*(0)-1]\cdot 0,4961\cdot(4,266^k - 0,2344^k).$$

Суммируя эти составляющие, получаем:

$$\lambda^*(k) = y^*(k) = y_1^*(k) + y_2^*(k) =$$

$$= \lambda^*(0)\cdot(1,058\cdot 4,266^k - 0,0582\cdot 0,2344^k) - \quad (29)$$

$$-[1,25\lambda^*(0)-1]\cdot 0,4961\cdot(4,266^k - 0,2344^k).$$

3.2. Определение начальных условий

Пусть для конкретности $k = N = 10$ и конечная ошибка $x(10) = 0$.

Начальное значение $\lambda^*(0)$ может быть найдено подстановкой $x(10) = 0$ и $k = 10$ в уравнение (28):

$$0 = 1,058\cdot 4,266^{10} - 0,0582\cdot 0,2344^{10} +$$

$$+[\lambda^*(0)-1]\cdot 0,4961\cdot(4,266^{10} - 0,2344^{10}).$$

Очевидно, что при $k = 10$ слагаемые в формуле (28), содержащие множители $0,2344^{10} = 5\cdot 10^{-7}$, пренебрежимо малы и их можно не учитывать. Поэтому получаем

$$0 = 1,058\cdot 4,266^{10} + [\lambda^*(0)-1]\cdot 0,4961\cdot 4,266^{10}.$$

Сократив на общий множитель $4,266^{10}$, имеем

$$0 = 1,058 + [\lambda^*(0)-1]\cdot 0,4961.$$

Откуда $\lambda^*(0) = -2,1326 + 1 = -1,1326.$

Подставляя это значение в (28), находим оптимальную траекторию

$$x^*(k) = 0,2344^k. \quad (30)$$

Заметим, что два слагаемые с большими множителями, равными $4,266^{10} = 2\cdot 10^6$, после подстановки $\lambda^*(0) = -1,1326$ в уравнение (28) взаимно уничтожаются.

3.3. Определение закона оптимального управления

Как показано выше, оптимальное управление описывается соотношением (17)

$$u^*(k) = \lambda^*(k+1), \quad (31)$$

где $\lambda^*(k+1)$ удовлетворяет уравнению (29), справедливому для любого k, в том числе и для k+1.

Подставляя в (29)

$$\lambda^*(0) = -1,1326,$$

получаем после несложных арифметических преобразований:

$$\lambda^*(k) = y^*(k) = -1,1325\cdot 0,2344^k.$$

Заменяя k на k+1, имеем

$$\lambda^*(k+1) = -1,1325\cdot 0,2344^{k+1} =$$

$$= -1,1325\cdot 0,2344\cdot 0,2344^k = -0,2655\cdot 0,2344^k.$$

Учитывая уравнение оптимальной траектории (30), окончательно получаем закон управления системой обучения в замкнутой форме:

$$u^*(k) = \lambda^*(k+1) = -0,2655\cdot\underbrace{0,2344^k}_{x^*(k)} = -0,2655\cdot x^*(k),$$

или

$$u^*(k) = -Kx^*(k), \text{ т.е. } K = 0,2655. \quad (32)$$

Таким образом, поставленная задача синтеза оптимального управления решена.

4. Компьютерное моделирование системы оптимального управления обучением

Схема компьютерного моделирования оптимальной системы в MATLAB/Simulink (рис. 1) строится по уравнениям (3) и (32) с учетом (2).

Параметры модели (InitFcn):

```
a=0.5;
b=0.1;
x0=1;
q=1;
K=0.2655;
```

Функции вывода результатов (StopFcn):

```
figure(1)
stem(xk.time,xk.signals.values)
xlabel('k'), ylabel('x')
grid on
figure(2)
stem(uk.time,uk.signals.values)
xlabel('k'), ylabel('u')
grid on
```

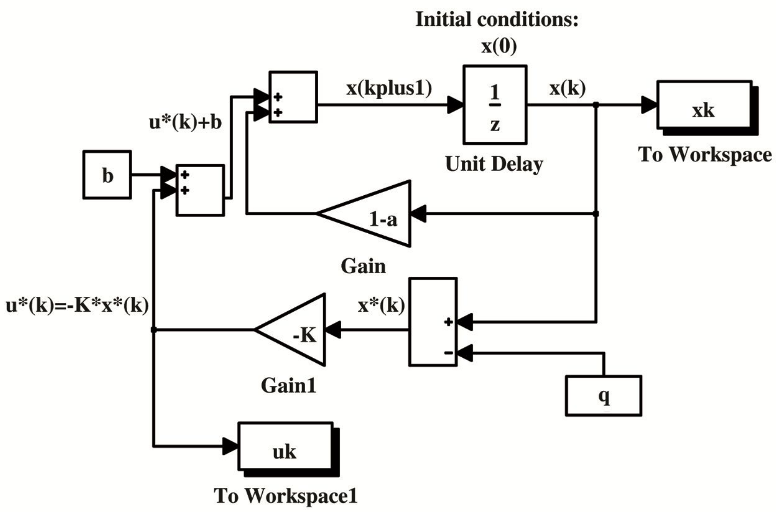

Рис. 1. Схема моделирования оптимальной системы

Результаты моделирования представлены на рис. 2 и 3.

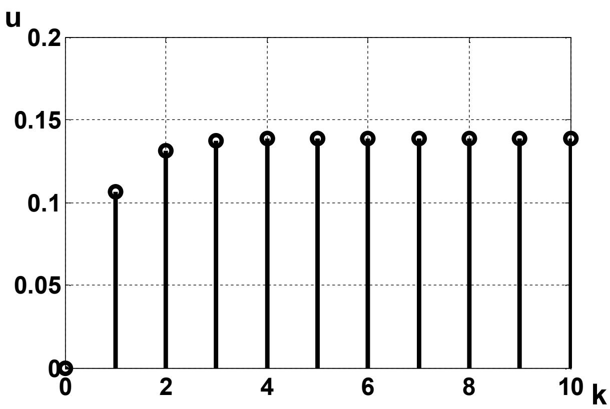

Рис. 2. Изменение интенсивности обучения (управления)

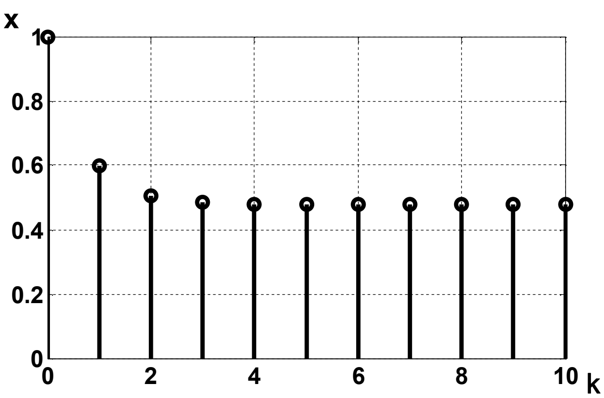

Рис. 3. Изменение степени знания (состояния) в оптимальной системе

Результаты моделирования свидетельствуют об устойчивости оптимальной системы при заданных ее параметрах,

Для сравнения найдем реакцию неоптимальной системы (без обратной связи по управлению) по схеме моделирования, показанной на рис. 4, при тех же параметрах. Результаты моделирования представлены на рис. 5.

Сравнение результатов показывают, что за счет повышения интенсивности обучения (управления) степень знания элементов дисциплины повышается с 0,2 (в исходной неоптимальной системе) до ~ 0,5 (в оптимальной системе).

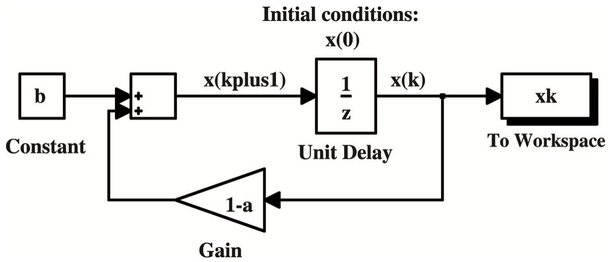

Рис. 4. Схема моделирования неоптимальной системы

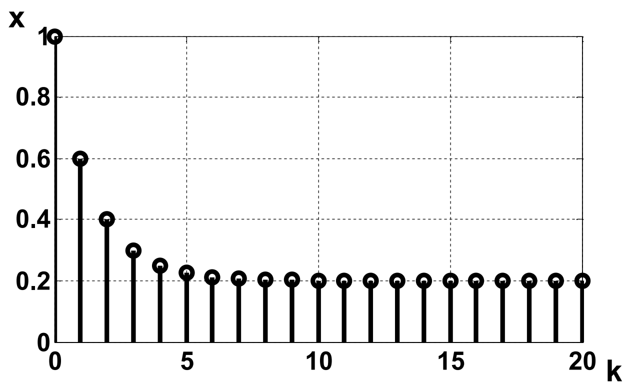

Рис. 5. Изменение степени знания в неоптимальной системе

Заключение

В данной работе сформулировано и математически описано задачу синтеза системы оптимального управления обучением. Обоснован выбор метода решения задачи синтеза.

Получено систему конечно-разностных уравнений для определения закона оптимального управления и найдено ее решение.

Синтезирован закон оптимального управления системой обучения в замкнутой форме.

Предложена схема компьютерного моделирования оптимальной системы, реализация которой подтверждает существенное преимущество оптимальной системы над неоптимальной – степень знания дисциплины повышается более чем в два раза.

Литература

1. *Куо, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления [Текст]: пер. с англ. / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.*
2. *Беллман, Р. Динамическое программирование [Текст] / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960 – 400 с.*
3. *Сейдж, Э.П. Оптимальное управление системами [Текст] / Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.*
4. *Дорф, Р. Современные системы управления [Текст] / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых Знаний, 2002. – 832 с.*
5. *Филипс, Ч. Системы управления с обратной связью [Текст] / Ч. Филипс, Р. Харбор. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.*
6. *Соколов, Ю.Н. Компьютерный анализ и проектирование систем управления [Текст]: учеб. пособие: в 6 ч. / Ю.Н. Соколов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – Ч. 3: Оптимальные системы. – 272 с.*
7. *Соколов, Ю.Н. Математические методы теории оптимальных систем [Текст]: учеб. пособие / Ю.Н. Соколов, А.Ю. Соколов, С.Ю. Соколов. – Х: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2007. – Ч. 1: Вариационное исчисление. – 109 с.*
8. *Проектирование систем управления на ЭВМ (MATLAB/Simulink /Control System) [Текст] / А.Ю. Соколов, Ю.Н. Соколов, В.М. Илюшко, М.М. Митрахович, Д.Н. Гайсенок; под ред. Ю.Н. Соколова. – Х.: Нац. аэрокосм, ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2005. – 590 с.*

Поступила в редакцию 14.11.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. авиационных приборов и измерений Н.Д. Кошевой, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

СИНТЕЗ СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСОМ НАВЧАННЯ

Ю.М. Соколов, О.І. Морозова

У статті розглядається формулювання і рішення задачі синтезу системи оптимального управління процесом навчання, яка полягає в розробці алгоритму управління, мінімізує квадратичну помилку з урахуванням обмежень на стан і керування. Передбачається, що процес навчання описується кінцево-різницевим рівнянням, що відображає ступінь знання і коефіцієнти забування і залишкових знань. Для реалізації оптимального закону оптимального управління використаний принцип модального управління. Запропоновано схему комп'ютерного моделювання оптимальної системи, що підтверджує суттєву перевагу оптимальної системи над неоптимальною.

Ключові слова: синтез, оптимальне управління, вектор управління, навчання, коефіцієнт забування, коефіцієнт залишкових знань, інтенсивність навчання, стійкість системи навчання.

THE SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL OF TRAINING PROCESS

Y.N. Sokolov, O.I. Morozova

The formulation and solution of the problem of synthesis of optimal control of training process are considered in this paper, which are developing the algorithm of control that minimizes the square error subject to the restrictions on state and control. It is assumed that the learning process is described by finite-difference equation, reflecting the degree of knowledge and forgetting rates and residual knowledge. The principle of modal control is used for implement the optimal law of optimal control. The scheme for computer simulation of the optimum system, which confirms a significant advantage over the optimal system of sub-optimal is proposed.

Key words: synthesis, optimal control, vector of control, training, the coefficient of forgetting, the coefficient of residual knowledge, the intensity of training.

Соколов Юрий Николаевич – канд. техн. наук, профессор, профессор кафедры производства радиоэлектронных систем летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: sokolovkhai@gmail.com.

Морозова Ольга Игоревна – аспирант кафедры информатики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: olmora@rambler.ru.