

УДК 004.272.2:519.63

О.А. ДМИТРИЕВА

Донецкий национальный технический университет, Украина

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ВЫБОРОМ ШАГА НА ОСНОВЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Предложены параллельные алгоритмы моделирования динамических объектов, ориентированные на автоматический выбор оптимального размера шага и порядка в каждой точке сетки. Разработанные алгоритмы базируются на явных и неявных экстраполяционных методах и ориентированы на минимизацию вычислительной работы за единичный шаг. При использовании неявных методов экстраполяции рекурсивное оценивание коэффициента главного члена глобальной ошибки интегрирования осуществлялось параллельно с проведением итерирования системы нелинейных алгебраических уравнений. Такая организация вычислительного процесса позволила значительно сократить число дополнительных арифметических действий. Параллельная реализация ориентирована на мультиосновные машины и кластерную вычислительную систему типа MIMD.

Ключевые слова: параллельное моделирование, стадийный метод, явная и неявная экстраполяция, адаптация шага, кластерная архитектура.

Введение

Применение параллельных вычислительных систем для моделирования динамических объектов с сосредоточенными параметрами является одним из основных направлений развития современной компьютерной индустрии [1]. Наибольшая необходимость в эффективных параллельных вычислениях возникает при моделировании динамических процессов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

При решении задач этого класса использование высокопроизводительной вычислительной техники не только оправдано, но и необходимо. Об этом свидетельствует знаменитый список проблем «большой вызов» [2], в котором такие задачи занимают одно из ведущих мест.

Эффективность численных методов моделирования динамических систем может быть значительно повышена за счет автоматического изменения шага интегрирования [3]. При этом актуальными являются вопросы соотношения погрешностей результатов и времени, затрачиваемого на получение решения. Изменяя размер шага, можно на порядки увеличивать эффективность без существенной потери точности [4, 5].

Особую актуальность алгоритмы изменения шага интегрирования приобретают при численном решении жестких дифференциальных уравнений, поскольку, с одной стороны, необходимо обеспечить длину шага, достаточно малую для достижения

требуемой точности в пограничном слое, а, с другой стороны, нужно гарантировать достаточно большую длину шага во избежание бесполезной вычислительной работы на участках медленного изменения искомой функции [6 – 8].

В настоящее время к наиболее перспективным алгоритмам управления шагом относят экстраполяционные методы [4, 5], которые позволяют не только управлять локальной ошибкой, но и существенно сократить время интегрирования за счет изменения порядка метода и размера шага, т.е. они способны учитывать особенности поведения решения задачи в автоматическом режиме. [3 – 5, 9 – 11].

1. Генерация параллельных схем

Рассмотрим решение задачи Коши

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Введем на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ произвольную неравномерную сетку

$$\omega_n = \{t_{n+1} = t_n + \tau_n, n = 0, 1, \dots, N-1, t_N = t_0 + T\}$$

Задавшись базовой длиной шага τ_n , выберем монотонно возрастающую последовательность натуральных чисел

$$k_1 < k_2 < \dots < k_m \quad (2)$$

и определим соответствующие длины шагов

$$\tau_n^1 > \tau_n^2 > \dots > \tau_n^m,$$

где $\tau_n^i = \frac{\tau_n}{k_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Выберем s стадийный численный метод порядка p :

$$x_{n+1} = x_n + \tau_n \sum_{i=1}^s b_i q_i,$$

$$q_i = f(t_n + c_i \tau_n, g_i),$$

$$g_i = x_n + \tau_n \sum_{j=1}^s a_{ij} q_j, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

и, выполняя n_i шагов длины τ_n^i , вычислим приближенное решение задачи Коши (1), которое обозначим через

$$u_{\tau_n^i}(t_n + \tau_n) = u_{i,1}.$$

Поскольку используется численный метод порядка p , то разложение в ряд глобальной погрешности имеет вид:

$$u_{\tau_n^i}(t_n + \tau_n) - x(t_n + \tau_n) = a_1(\tau_n^i)^p + a_2(\tau_n^i)^{p+1} + \dots + a_m(\tau_n^i)^{p+m-1} + O((\tau_n^i)^{p+m}),$$

где $x(t_n + \tau_n) = x(t_{n+1})$ – значение точного решения в узле $t_n + \tau_n$.

Проведя вычисления $u_{i,1}$ для ряда последовательных значений $i = 1, 2, \dots, m+1$, получим систему уравнений

$$x_{n+1}^* + a_1(\tau_n^i)^p + a_2(\tau_n^i)^{p+1} + \dots + a_m(\tau_n^i)^{p+m-1} = u_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, m+1$$

с неизвестными x_{n+1}^* , a_1 , a_2, \dots, a_m .

Решив полученную систему уравнений, матрица которой невырождена, найдем уточненное значение x_{n+1}^* приближенного решения уравнения (1), погрешность которого имеет порядок $O((\tau_n^i)^{p+m})$, т. е.

$$x_{n+1}^* - x(t_n + \tau_n) = O((\tau_n^i)^{p+m}).$$

Упростим получение приближенного решения задачи (1). Построим по вычисленным стадийным методом значениям $u_{i,1}$, $i = 1, 2, \dots, m+1$ интерполяционный многочлен вида

$$L(\tau_n) = a_0 + a_1 \tau_n + a_2 \tau_n^2 + \dots + a_{m-1} \tau_n^{m-1}, \quad (3)$$

для которого $L(\tau_n^i) = u_{i,1}$ и $L(0) = a_0$ есть уточненное значение x_{n+1}^* приближенного решения задачи (1), а погрешность имеет порядок $O((\tau_n)^m)$. Таким образом, для нахождения уточненного значения x_{n+1}^* надо вычислить значение интерполяционного многочлена (3) при $\tau_n = 0$. Вначале построим многочлен по двум точкам $(\tau_n^1, u_{1,1})$ и $(\tau_n^2, u_{2,1})$

$$L_{12}(\tau_n) = \frac{1}{\tau_n^2 - \tau_n^1} \begin{bmatrix} u_{1,1} & \tau_n^1 - \tau_n \\ u_{2,1} & \tau_n^2 - \tau_n \end{bmatrix}$$

и найдем значение $L_{12}(0)$, обозначив его через $u_{2,2}$

$$L_{12}(0) = u_{2,2} = u_{2,1} + \frac{u_{2,1} - u_{1,1}}{\tau_n^1 / \tau_n^2 - 1},$$

которое дает уточнение приближенного решения с порядком $O((\tau_n)^2)$. Аналогично

$$L_{i,i+1}(\tau_n) = \frac{1}{\tau_n^{i+1} - \tau_n^i} \begin{bmatrix} u_{i,1} & \tau_n^i - \tau_n \\ u_{i+1,1} & \tau_n^{i+1} - \tau_n \end{bmatrix}$$

и получим при $\tau_n = 0$

$$L_{i,i+1}(0) = u_{i+1,2} = u_{i+1,1} + \frac{u_{i+1,1} - u_{i,1}}{\tau_n^i / \tau_n^{i+1} - 1}.$$

Затем по схеме Эйткена построим многочлен по трем точкам $(\tau_n^1, u_{1,1})$, $(\tau_n^2, u_{2,1})$, $(\tau_n^3, u_{3,1})$:

$$L_{123}(\tau_n) = \frac{1}{\tau_n^3 - \tau_n^1} \begin{bmatrix} L_{12}(\tau_n) & \tau_n^1 - \tau_n \\ L_{23}(\tau_n) & \tau_n^3 - \tau_n \end{bmatrix}$$

и при $\tau_n = 0$

$$L_{123}(0) = u_{3,3} = u_{3,2} + \frac{u_{3,2} - u_{2,2}}{\tau_n^1 / \tau_n^3 - 1}.$$

Продолжая так рассуждать и далее, придем к рекуррентной формуле последовательных уточнений приближенного решения

$$u_{i,1+1} = u_{i,1} + \frac{u_{i,1} - u_{i-1,1}}{\tau_n^{i-1} / \tau_n^i - 1},$$

$$i = 2, 3, \dots, m,$$

$$l = 1, 2, \dots, i-1.$$

При проведении экстраполяции в качестве наиболее экономичных использовались последовательности Ромберга, Булирша гармоническая. Такие последовательности при интегрировании задачи (1) позволяют повторно использовать значения функции для меньших τ_n^i .

2. Оптимизация вычислительной работы

Практически все известные в настоящее время численные методы с автоматическим выбором шага интегрирования основаны на вычислении главного члена локальной ошибки и последующем выборе такого размера для очередного шага, который является максимальным для заданного предела локальной ошибки [5]. Решение первой задачи, т.е. нахождение главного члена локальной погрешности, в нашем случае может быть легко осуществлено с помощью оценки ошибки

$$\Delta_i = \|u_{i,i} - u_{i,i-1}\|, \quad (4)$$

которая получается после каждого экстраполяционного подхода. Кроме того, само число таких подходов может регламентироваться получаемыми значениями (4) и варьироваться от шага к шагу.

Основываясь на концепции минимизации вычислительной работы за единичный шаг, в качестве меры вычислительной работы возьмем отношение числа операций к длине шага [3]

$$W_n = \frac{A_{m_n}}{\tau_n},$$

где $A_n = A_{m_{n-1}} + k_n$,

$$A_1 = k_1 + 1.$$

Оптимальный порядок экстраполяционного метода в данной точке численного интегрирования должен минимизировать вычислительную работу на шаге, под которой будем понимать число вычислений правой части задачи (1). Предполагается, что такой алгоритм будет находить приближенное решение для фиксированного допуска на локальную ошибку за минимальное время. Управление размером шага основано на том же принципе, что и во вложенных методах [12], когда оптимальный шаг выбирается как максимальный, обеспечивающий с учетом гарантийных факторов локальную точность.

3. Параллельные алгоритмы управления шагом на экстраполяционных схемах

Выбор первоначального шага осуществляется из следующих соображений. Предположим, что величина шага зависит от задаваемой точности ε , правых частей интегрируемых функций $f(t, x(t))$, порядка стадийного метода интегрирования p , начальных условий и границ интервала $t_0, t_N = t_0 + T$. В работе за основу принят следующий алгоритм выбора начального шага [3].

Вычисляются правые части (1) $f(t_0, x(t_0))$ в начальной точке. Принимая во внимание границы временного интервала, точность использованного метода и норму оценки правых частей, вводится параметр

$$\text{par} = \left(\frac{1}{\max(|t_0|, |t_N|)} \right)^{p+1} + \|f\|^{p+1}.$$

Начальное приближение к оценке шага производится как

$$\tau_0^1 = \left(\frac{\varepsilon}{\text{par}} \right)^{1/(p+1)}$$

Если начальные условия приводят к нулевым компонентам $f(t_0, x(t_0))$, имеет смысл уточнить первичное полученное значение τ_0^1 . Выполняется один шаг стадийным методом с длиной шага τ_0^1 и определяются $f(t_0 + \tau_0^1, x(t_0 + \tau_0^1))$. Параметр par пересчитывается с корректировкой нормы

$f(t_0 + \tau_0^1, x(t_0 + \tau_0^1))$, на основе чего определяется еще одно значение шага τ_0^2 . Начальный шаг определяется как $\tau_0 = \min(\tau_0^1, \tau_0^2)$.

Первичные экстраполяционные таблицы, значения в которых получены параллельно s -стадийным методом с шагами $\tau_n^1, \tau_n^2, \dots, \tau_n^i$

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ u_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i,1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

для вычисленных i строк, преобразуются к виду

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i,1} & u_{i,2} & \dots & u_{i,i} \end{pmatrix}$$

где $u_{i,i}$ соответствует уточнению приближенного решения с наивысшим порядком i . Количество таких таблиц совпадает с размерностью системы, и значения в этих таблицах могут быть получены параллельно без обменов на стадиях, если число процессоров в системе не меньше, чем количество требуемых экстраполяционных просчетов i .

Для выбора оптимального порядка необходимо иметь возможность оценить вычислительную работу, затрачиваемую на вычисление $u_{i,i}$. Она может измеряться количеством вычислений правой части уравнения. Большое число вычислений функции может быть компенсировано большей длиной шага τ_n .

Расчет значений для новой точки x_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$ начинается с параллельного формирования начального приближения к решению с помощью s -стадийного метода порядка p . При этом начальный шаг уже сформирован. Параллельный счет без обменов запускается на $m+1$ процессоре для последовательности значений k_1, k_2, \dots, k_{m+1} . Понятно, что с увеличением числа разбиений интервала увеличивается и время поиска решения, но для формирования первичной экстраполяционной таблицы достаточно дождаться получения результатов от процессоров, которые выполнили просчеты с шагами $\tau_n^1, \tau_n^2, \dots, \tau_n^{m-1}$, два оставшихся процессора, которые формируют решение с шагами τ_n^m, τ_n^{m+1} будут продолжать работу до получения результатов.

В сформированной первичной экстраполяционной таблице проверяется сходимость решения в строке $m-1$. Если $\|u_{m-1, m-2} - u_{m-1, m-1}\| \leq \varepsilon$, то результат формируется на основе уже полученных

значений $u_{m-1,m-1}$, и результаты вычислений с шагами τ_n^m и τ_n^{m+1} не потребуются. Рассчитывается новое значение шага τ_{new} и новый размер экстраполяционной таблицы m_{new} .

Если $\|u_{m-1,m-2} - u_{m-1,m-1}\| > \varepsilon$, выполняется проверка на возможную сходимость в строке $m+1$. Если локальная ошибка превышает асимптотическую оценку

$$\|u_{m-1,m-2} - u_{m-1,m-1}\| > (k_{m+1}k_m/k_1^2)^2 \varepsilon, \quad (5)$$

текущий шаг τ_{n+1} отбрасывается, и значение τ_{n+1} пересчитывается заново. Если соотношение (5) не выполнилось, используется следующая, m -ая строка экстраполяционной таблицы, которая сформирована на основании уже имеющихся значений и просчета, выполненного с шагом τ_n^m . Если для рассчитанных значений $\|u_{m,m-1} - u_{m,m}\| \leq \varepsilon$, то результат формируется на основе значений $u_{m,m}$. Рассчитывается новое значение шага τ_{new} и новый размер экстраполяционной таблицы m_{new} . Если локальная ошибка превышает асимптотическую оценку

$$\|u_{m,m-1} - u_{m,m}\| > (k_{m+1}/k_1)^2 \varepsilon,$$

осуществляется еще одна попытка повысить порядок экстраполяции с сохранением текущего шага. Решение x_{n+1} формируется с текущим шагом τ_{n+1} на основе значений $u_{m+1,m+1}$, если $\|u_{m+1,m} - u_{m+1,m+1}\| \leq \varepsilon$, в противном случае происходит сокращение текущего шага и процесс повторяется с меньшим значением τ_{n+1} . После отбрасывания шага порядок экстраполяции не увеличивается.

4. Параллельная реализация на основе стадийных схем

Для экспериментов на мультиосновных машинах использовался программный интерфейс Math

Link среды параллельных вычислений в Mathematica Wolfram Research, обеспечивающий возможность параллельного поиска решений как на локальной машине, так и в сетевом масштабе. Также параллельная реализация осуществлялась на кластере NeClus MIMD-архитектуры с распределенной памятью. Кластер состоит из 93-х вычислительных узлов, узла управления (Front Node), системы коммутации в составе двух гигабитных Ethernet коммутаторов (Switch HP Procurve).

В качестве тестовой выбрана задача из [3]

$$x_1' = 2t \sqrt{x_2} * x_4, \quad (6)$$

$$x_2' = 10t * e^{5(x_3-1)} * x_4,$$

$$x_3' = 2t * x_4, \quad x_4' = -2t * \ln x_4$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 1$$

и с известными точными решениями

$$x_1(t) = e^{\sin(t^2)}, \quad x_2(t) = e^{5\sin(t^2)},$$

$$x_3(t) = \sin(t^2) + 1, \quad x_4(t) = \cos(t^2).$$

Поиск решения проводился на интервале $[0, 2,5]$.

Точные решения использованы для вычисления глобальных ошибок численных решений задачи (6). Рассматривались реализации на основе стадийных методов, в качестве (2) использовалась гармоническая последовательность, а также последовательности Ромберга и Булирша. Результаты параллельного экстраполирования с использованием явных стадийных схем приведены в табл. 1. На графиках (рис. 1 – 4) показано поведение численного решения и распределения глобальных погрешностей при использовании неявных схем. Разделение компонент x_1, x_3, x_4 и x_2 выполнено из-за принципиально разного масштаба решения. Данные вычислительного эксперимента говорят о том, что автоматическое управление длиной шага и порядком параллельного экстраполяционного алгоритма, построенного на стадийных методах, действительно работает на практике и позволяет решать задачу (1) за очень короткое время и с приемлемой точностью.

Таблица 1

Результаты параллельного экстраполирования на явных методах с минимизацией вычислительной работы на единичном шаге

Допуск на локальную ошибку	Глобальная ошибка	Число принятых шагов	Число отброшенных шагов	Максимальный порядок экстраполяции	Время работы алгоритма, с*10 ⁻³
10 ⁻²	10 ⁻²	22	4	4	0,0624
10 ⁻³	4*10 ⁻⁴	27	5	7	0,078
10 ⁻⁴	1,5*10 ⁻⁵	59	4	8	0,1248
10 ⁻⁵	3,7*10 ⁻⁶	62	3	8	0,1908
10 ⁻⁶	1,4*10 ⁻⁷	71	5	10	0,3166
10 ⁻⁷	2,2*10 ⁻⁸	87	6	12	0,5732
10 ⁻⁸	3,1*10 ⁻⁹	96	6	14	0,6941

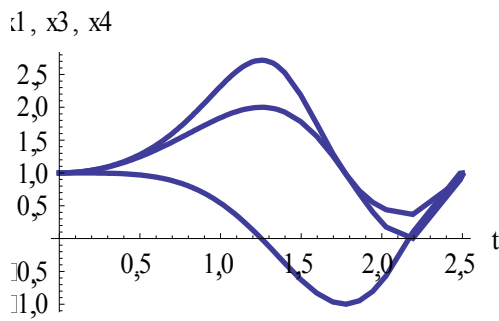


Рис. 1. Численное решение задачи (6)

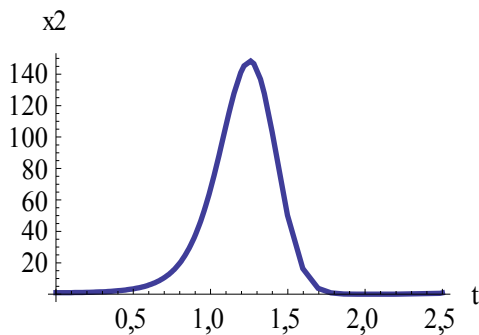


Рис. 2. Адаптация шага интегрирования

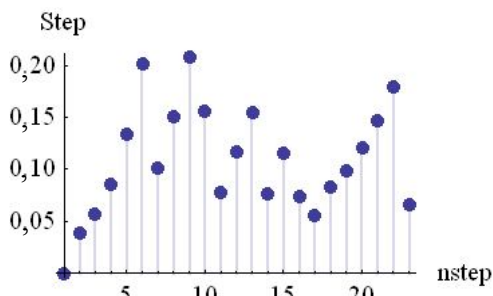
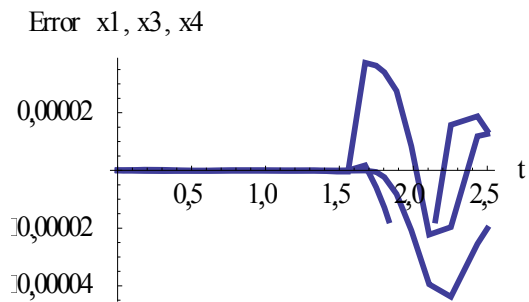


Рис. 3. Изменение порядка экстраполяции



Error x2

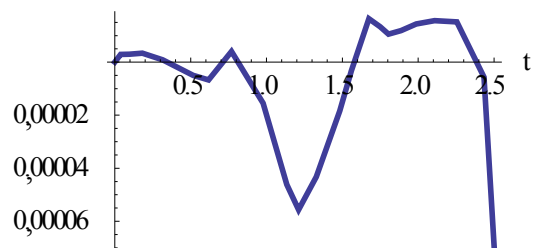


Рис. 4. Распределение глобальных ошибок при численном решении задачи (6) с точностью 10^{-4}

Выводы

В работе рассмотрены вопросы параллельного моделирования динамических объектов, которые описываются жесткими системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Повышение эффективности достигается как за счет автоматического управления шагом интегрирования, так и за счет использования явных и неявных стадийных экстраполяционных схем переменного порядка.

В качестве критерия выбора численной схемы используются неравенства для контроля точности и устойчивости. При решении жестких задач это позволяет на каждом шаге выбирать оптимальную с точки зрения вычислительных затрат численную схему.

Параллельное управление шагом на основе явных экстраполяционных методов проводилось, основываясь на концепции минимизации вычислительной работы за единичный шаг.

Литература

1. Moulitsas, I. *Architecture Aware Partitioning Algorithms [Text]* / I. Moulitsas, G. Karypis // *Algorithms and Architectures for Parallel Processing: Proceedings of 8th International Conference, ICA3PP 2008, Cyprus, — Berlin: Springer Verlag. — 2008. — V. 5022/2008, — P. 42 – 53.*
2. *Grand Challenges: High performance computing and communications [Text] – A report by the Committee on Physical, Mathematical and Engineering Science, NSF/CISE, Washington, DC 20550. — 2001*
3. Хайрер, Э. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи [Текст]* / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир. – 1999. – 685 с.
4. Куликов, Г.Ю. *Об автоматическом управлении размером шага и порядком в явных одношаговых экстраполяционных методах [Текст]* / Г.Ю. Куликов, Е.Ю. Хрусталева // *Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т.48, № 8. — С. 1392 – 1405.*

5. Куликов, Г.Ю. Об автоматическом управлении размером шага и порядком в неявных одношаговых экстраполяционных методах [Текст] / Г.Ю. Куликов, Е.Ю. Хрусталева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т.48, № 9. – С. 1580 – 1606.

6. Butcher, J.C. Numerical methods for ordinary differential equations [Text] / J.C. Butcher. – Wiley-VCH Verlag. – 2003. – 418 p.

7. Дмитрієва, О.А. Паралельні різницеві методи розв'язання задачі Коші [Текст] / О.А. Дмитрієва. – Донецьк: ДонНТУ. – 2011. – 265 с.

8. Zanariah, A.M. Solving Large Systems of Ordinary Differential Equations with Four Point Block Method on Parallel Computer [Text] / A.M. Zanariah, M.B. Suleiman // European Journ. of Scientific Research. – 2009. – V. 29, No. 4. – P. 491 – 501.

9. Holsapple, R. Variable step-size selection methods for implicit integration schemes for ODEs [Text] / R. Holsapple, R. Iyer, D. Doman // International journal of numerical analysis and modeling. Computing and Information. – 2007. – V. 4, No. 2. – P. 210 – 240.

10. Firsova, A. Dynamic System Simulation. Robust algorithms of state estimation of dynamic lumped parameters systems [Text] / A. Firsova, O. Dmitrieva. – LAP Lambert Academic Publishing. – 2011. – 92 p.

11. Soderlind, G. Adaptive time-stepping and computational stability [Text] / G. Soderlind, L. Wang // J. Comp. and Appl. Math. – 2005. – V. 185, No. 2. – P. 244 – 260.

12. Дмитрієва, О.А. Параллельное моделирование жестких систем на основе диагонализации полной матрицы [Текст] / О.А. Дмитрієва // Искусственный интеллект. – 2011. – № 4. – С. 46 – 53.

Поступила в редакцію 12.01.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедри Л.П. Фельдман, Донецкий национальный технический университет, Донецк, Украина.

ПАРАЛЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З АВТОМАТИЧНИМ ВИБОРОМ КРОКУ НА ОСНОВІ ЕКСТРАПОЛЯЦІЙНИХ МЕТОДІВ

О.А. Дмитрієва

Запропоновано паралельні алгоритми моделювання динамічних об'єктів, орієнтовані на автоматичний вибір оптимального розміру кроку й порядку в кожній точці сітки. Розроблені алгоритми базуються на явних й неявних екстраполяційних методах і орієнтовані на мінімізацію обчислювальної роботи за одиничний крок. При використанні неявних методів екстраполяції рекурсивне оцінювання коефіцієнта головного члена глобальної помилки інтегрування здійснювалося паралельно із проведенням ітераційного процесу для системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Така організація обчислювального процесу дозволила значно скоротити число додаткових арифметичних дій. Паралельна реалізація орієнтована на мультиосновні машини і кластерну обчислювальну систему типу MIMD.

Ключові слова: паралельне моделювання, стадійний метод, явна й неявна екстраполяція, адаптація кроку, кластерна архітектура.

PARALLEL MODELLING OF DYNAMIC OBJECTS WITH THE AUTOMATIC CHOICE OF THE STEP ON THE BASIS OF EXTRAPOLATION METHODS

O.A. Dmitrieva

Parallel algorithms of modeling of the dynamic objects, oriented on an automatic choice of the optimum size of a step and an order in each point of a grid are offered. The developed algorithms are based on explicit and implicit extrapolation methods and are focused on minimization of computing work for a unit step. At use of implicit methods of extrapolation recursive estimation of factor of the main member of a global error of integration was carried out in parallel with carrying out of iteration procedure of system of the nonlinear algebraic equations. Such organization of computing process has allowed to reduce number of additional arithmetic actions considerably. Parallel realization is focused on the multibasic computing machinery and cluster the computing system of type MIMD.

Keywords: parallel modeling, a stage method, explicit and implicit extrapolation, step adaptation, cluster architecture.

Дмитрієва Ольга Анатольевна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і інформатики Донецького національного технічного університету, Донецк, Украина.