

УДК 004.272.2:519.63

О.А. ДМИТРИЕВА

Донецкий национальный технический университет, Украина

**РАЗРАБОТКА МНОГОШАГОВЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОЛЛОКАЦИОННЫХ БЛОЧНЫХ МЕТОДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА**

В работе рассматриваются вопросы численной реализации задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем в параллельных компьютерных средах. Разработаны блочные коллокационные методы, которые позволяют находить решение одновременно во всех расчетных точках блока, что обеспечивает сокращение времени получения решения даже при последовательной реализации. С целью выравнивания порядка аппроксимации во всех расчетных точках блока в разностные схемы введены дополнительные производные высших порядков. Коллокационные методы строятся на интерполяционных многочленах Эрмита, степени которых совпадают с количеством точек коллокации. Для разработанных методов определены условия устойчивости, порядки точности и доказана сходимость по начальным данным и по правой части. Показано, что порядок аппроксимации введенных методов значительно превышает классические варианты и одинаков во всех расчетных точках блока.

**Ключевые слова:** задача Коши, точки коллокации, параллельный метод, старшие производные, устойчивость, сходимость.

**Введение**

Одним из важнейших классов современных практических задач являются жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые возникают в задачах химической кинетики, радиотехники, электроники, при дискретизации задач теплопроводности и диффузии методом прямых и т.д. Как правило, размер и сложность таких задач приводят к неприемлемости аппарата аналитических вычислений и вызывают значительные трудности при численной реализации [1]. Даже распространенные на сегодняшний день программы расчетов с автоматическим выбором шага на тестах с известным точным решением показывают, что реальная точность расчета может отличаться от декларируемой в десятки, сотни и даже тысячи раз, а при расчетах на длительные времена численное решение вообще может не иметь ничего общего с точным [2]. Еще одним серьезным препятствием при решении таких задач является изначально последовательный характер методов, используемых для численной реализации. Однако большая размерность моделей динамических объектов уже давно несовместима с последовательной реализацией и требует создания новых численных методов, ориентированных на использование в параллельных компьютерных системах с хорошими показателями параллелизма [3].

Для повышения точности результатов интегрирования при численном решении задачи Коши

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

в последнее время широко применяются последовательные коллокационные стадийные методы [4 – 7], в которых используются явные и неявные варианты введения точек коллокаций на шаге. Коллоцирование вводят и в многошаговые параллельные блочные методы, которые носят чисто неявный характер, при этом коллокационный многочлен строится по всем расчетным точкам блока [8 – 10]. Однако проблематичным остается определение оптимальных порядков введенных производных, которые бы обеспечивали одинаковый порядок аппроксимации во всех точках блока [11, 12]. В отличие от классических методов с ведением точек коллокации на шаге, где определяющим является порядок аппроксимации в точке  $t_n + \tau$ , в блочных методах все рассчитанные точки формируют решение, и необходимо обеспечить требуемую точность во всех узлах коллокации  $t_n + j\tau$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Использование в расчетных схемах только правых частей (1) не обеспечивает одинаковый порядок, и точность определяется по худшему результату [12, 13]. Попытки выравнивания порядка предпринимались в работах [6, 7] за счет введения в разностные схемы дополнительных производных в расчетных точках. Данная статья является продолжением проведенных в [12, 14] исследований. Для обеспечения более высокой скорости сходимости и автоматического управления шагом интегрирования предлагаются параллельные

коллокационные блочные расчетные схемы, построенные на полиномах Эрмита, в которых в расчетных точках блока вводятся производные высоких порядков. Разностные схемы обладают повышенным порядком аппроксимации, позволяющим обеспечить заданную точность решения на интервале с большим шагом интегрирования, а, следовательно, сокращение времени получения решения даже при последовательной реализации.

### 1. Генерация параллельных разностных схем многошагового метода

При построении многошаговых коллокационных методов численного решения задачи Коши

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

точки коллокации, вводятся не на шаге, а в блоке (рис. 1), по шаблону для многошаговых (рис. 2) многоточечных методов.

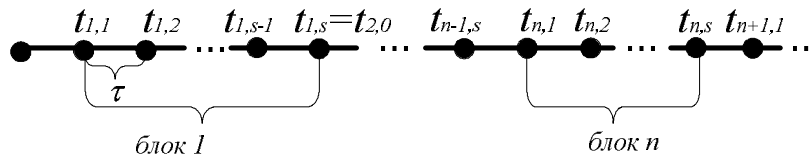


Рис. 1. Схема разделения на блоки s-точечного блочного метода

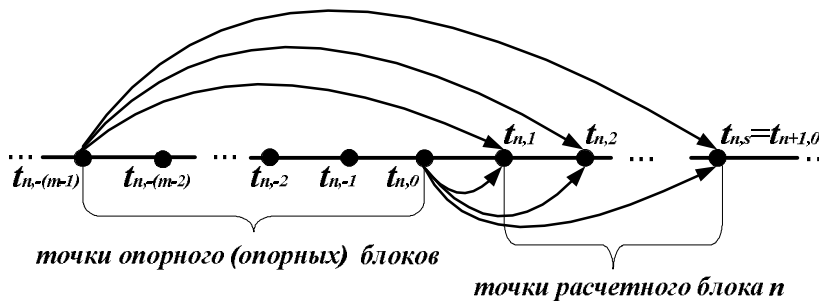


Рис. 2. Схема использования опорных и расчетных значений m-шагового s-точечного коллокационного блочного метода

Для определения значений приближенных решений  $u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,s}$  в соответствующих расчетных узлах  $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,s}$  должны быть известны опорные значения  $u_{n,0}, u_{n,-1}, \dots, u_{n,-(m-1)}$  в узлах  $t_{n,0}, t_{n,-1}, \dots, t_{n,-(m-1)}$ . Кроме того, необходимо, чтобы в точках  $t_{n,j} = t_n + j\tau \in [t_n, t_{n+s}]$ ,  $j = 0, 1, \dots, s$  значения производных полинома, построенного по значениям

$$\left\{ t_{n,j}, f(t_{n,j}, u_{n,j}), f'(t_{n,j}, u_{n,j}), \dots, f^{(p_j)}(t_{n,j}, u_{n,j}) \right\}$$

совпадали бы с векторными полями дифференциального уравнения (1). В качестве многочлена с кратными узлами предполагается использование многочлена Эрмита, который может быть построен в виде рекуррентных соотношений вида [11, 14]

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \dots, \\ H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t), \quad (2)$$

общей формулы описания вида

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt} \quad (3)$$

или получен путем предельного перехода из многочленов Лагранжа и Ньютона [15].

Используя разбиение на блоки, представленное на рис. 1, можно получить общие блочные коллокационные методы с производными высоких порядков, если в качестве точек коллокации выбирать не только значения, принадлежащие расчетному блоку, но и значения из уже рассчитанного (рассчитанных) блоков. В общем виде разностные уравнения коллокационных многошаговых блочных методов имеют вид

$$u_{n,j} = u_{n,0} + \tau \sum_{i=1}^m b_{i,j} F_{n-1,i}^{(0)} + \tau \sum_{l=0}^{p_j} \sum_{i=1}^s \tau^l a_{i,j}^{(l)} F_{n,i}^{(l)}, \quad (4) \\ j=1,2,\dots,s, \quad n=1,2,\dots,N,$$

где  $F_{n,i}^{(l)}$  - l-ая производная правой части, вычисленная в точке  $t_n + i\tau$ ,  $(F_{n,i}^{(l)} = f^{(l)}(t_n + i\tau, u_{n,i}))$ ,  $p_j$  - старший порядок введенной производной правой части в точке  $t_n + j\tau$ .

Коэффициенты расчетных схем находятся из соотношений

$$a_{i,j}^{(l)} = \int_0^{i\tau} h_{j,1}(t) dt, \quad b_{i,j} = \int_{-(m-i)\tau}^0 h_{j,0}(t) dt, \quad (5) \\ i, j = 1, 2, \dots, s,$$

где  $h_{j,1}$  – соответствующие многочлены Эрмита. Получим, например, коллокационный разностный метод с дополнительно введенными первыми производными и со следующими узлами коллокации  $j = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ .

Такому выбору точек коллокации будет соответствовать следующий расчетный шаблон, приведенный на рис. 3.

Построим по введенным узлам интерполяционный многочлен Эрмита, определим расчетные коэффициенты и сформируем систему разностных уравнений

$$\begin{aligned}
 u_{n,1} = & u_{n,0} - \frac{1283\tau F_{n,-1}}{483840} + \frac{2689\tau F_{n,0}}{10080} + \frac{237\tau F_{n,1}}{640} + \\
 & + \frac{9137\tau F_{n,2}}{30240} + \frac{10229\tau F_{n,3}}{161280} - \frac{199\tau^2 F'_{n,1}}{448} - \\
 & - \frac{209\tau^2 F'_{n,2}}{1008} - \frac{43\tau^2 F'_{n,3}}{2688} ; \\
 u_{n,2} = & u_{n,0} - \frac{43\tau F_{n,-1}}{15120} + \frac{257\tau F_{n,0}}{945} + \frac{17\tau F_{n,1}}{20} + \\
 & + \frac{757\tau F_{n,2}}{945} + \frac{1207\tau F_{n,3}}{15120} - \frac{5\tau^2 F'_{n,1}}{14} - \frac{20\tau^2 F'_{n,2}}{63} - \frac{5\tau^2 F'_{n,3}}{252} ; \\
 u_{n,3} = & u_{n,0} - \frac{57\tau F_{n,-1}}{17920} + \frac{313\tau F_{n,0}}{1120} + \frac{621\tau F_{n,1}}{640} + \frac{1443\tau F_{n,2}}{1120} +
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$+ \frac{8333\tau F_{n,3}}{17920} - \frac{135\tau^2 F'_{n,1}}{448} - \frac{9\tau^2 F'_{n,2}}{112} - \frac{57\tau^2 F'_{n,3}}{896} .$$

Порядки невязки в расчетных точках блока одинаковы и составляют

$$\begin{aligned}
 r(t_n + \tau) &= -\frac{5101x_0^{(9)}\tau^9}{101606400} + O[\tau]^{10} , \\
 r(t_n + 2\tau) &= -\frac{181x_0^{(9)}\tau^9}{3175200} + O[\tau]^{10} , \\
 r(t_n + 3\tau) &= -\frac{93x_0^{(9)}\tau^9}{1254400} + O[\tau]^{10}
 \end{aligned}$$

Если сравнить полученные результаты с точностью, которую дала одношаговая схема с первыми производными на тех же точках коллокации [8], а там был седьмой порядок, можно утверждать, что многошаговая схема, обладая той же размерностью системы уравнений и не вводя дополнительные пересчеты во вновь посчитанных точках для производных, имеет более высокую точность, т.е. использование таких схем является более предпочтительным.

Изменим расположение узлов коллокации  $j = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  и введем первые производные правых частей. Рассчитываться будет двухточечный блок с опорным блоком, состоящим из 3-х точек. Такому расположению узлов (рис. 4) будет соответствовать следующая система разностных уравнений

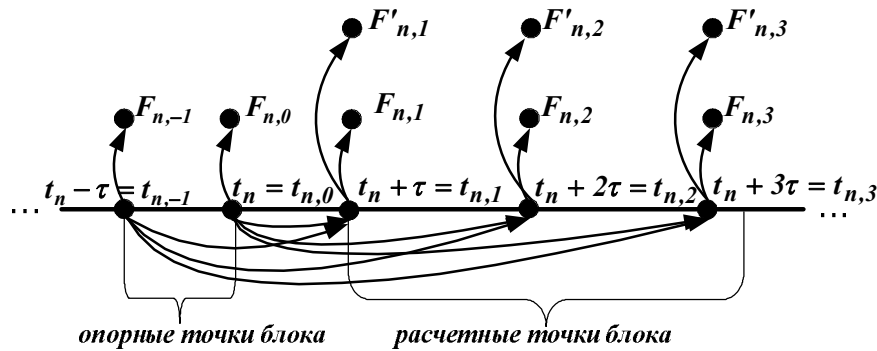


Рис. 3. Шаблон разностной схемы 3-шагового 2-точечного коллокационного блочного метода

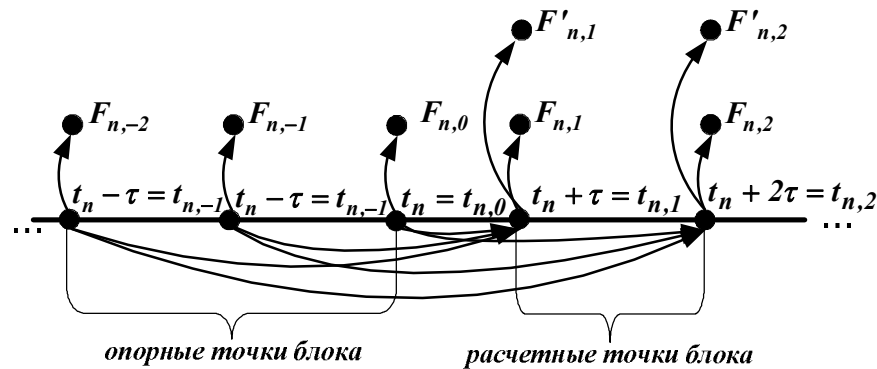


Рис. 4. Шаблон разностной схемы 2-шагового 3-точечного коллокационного блочного метода

$$\begin{aligned}
 u_{n,1} &= u_{n,0} + \frac{41\tau F_{n,-2}}{40320} - \\
 & - \frac{107\tau F_{n,-1}}{7560} + \frac{391\tau F_{n,0}}{1120} + \frac{1501\tau F_{n,1}}{2520} + \\
 & + \frac{8273\tau F_{n,2}}{120960} - \frac{19\tau^2 F'_{n,1}}{84} - \frac{37\tau^2 F'_{n,2}}{2016}, \\
 u_{n,2} &= u_{n,0} + \frac{11\tau F_{n,-2}}{7560} - \\
 & - \frac{2\tau F_{n,-1}}{105} + \frac{27\tau F_{n,0}}{70} + \frac{1082\tau F_{n,1}}{945} + \\
 & + \frac{409\tau F_{n,2}}{840} - \frac{4\tau^2 F'_{n,1}}{63} - \frac{1\tau^2 F'_{n,2}}{14}
 \end{aligned} \quad (7)$$

с невязками в точках коллокации

$$\begin{aligned}
 r(t_n + \tau) &= -\frac{13x_0^{(8)}\tau^8}{94080} + O[\tau]^9, \\
 r(t_n + 2\tau) &= -\frac{x_0^{(8)}\tau^8}{4410} + O[\tau]^9.
 \end{aligned}$$

Варьируя таким образом расположение точек коллокации, можно генерировать соответствующие расчетные разностные схемы, которые будут отличаться соотношением расчетных и опорных точек, порядками входящих в разностные уравнения производных правых частей, а, следовательно, и порядком аппроксимации исходного уравнения. При этом не следует увлекаться наращиванием размерности расчетного блока, поскольку увеличение количества неизвестных приводит к росту размерности системы. Гораздо меньшей трудоемкостью будут обладать схемы с дополнительными точками в опорном блоке или добавочными производными правых частей.

## 2. Устойчивость и сходимость блочных коллокационных методов

Устойчивость по начальным данным у блочных многошаговых коллокационных методов с производными высоких порядков оценивается по решению однородной системы, соответствующей (4). Поскольку в расчетных точках блока  $t_n + j\tau$ ,  $j=0,1,\dots,s$  решения однородной системы имеют вид  $u_{n,j} = u_{n,0}$ , можно утверждать, что решения устойчивы и являются равномерно ограниченными по  $n$ .

Для произвольной правой части необходимо получить оценку, устанавливающую устойчивость решения уравнения по правой части, из которой следует, что если разностное уравнение (4) аппроксимирует исходное уравнение (1), то решение разностной задачи сходится при  $\tau \rightarrow 0$  к решению исходной задачи (1), причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации [15].

Исследование устойчивости по правой части проводится на одномерном модельном уравнении

$$x' = \lambda x, \quad t > 0, \quad (8)$$

где  $\lambda$  - комплексное число ( $\lambda < 0$ ). Этот вид модельного уравнения широко используется для анализа устойчивости численных методов решения дифференциальных уравнений [8,11,15]. С учетом вида модельного уравнения (8) и соотношений  $F_{n,j} = \lambda u_{n,j}$ , систему (4) можно будет записать как

$$\begin{aligned}
 u_{n,j} &= u_{n,0} + \tau \lambda \sum_{i=1}^m b_{i,j} u_{n,i-m} + \\
 & + \tau \lambda \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(0)} u_{n,i} + \tau^2 \lambda \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(1)}, \\
 & j=1,2,\dots,s.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуем полученное уравнение к виду

$$\begin{aligned}
 (1 - \lambda \tau a_{j,j}^{(0)}) u_{n,j} - \lambda \tau \sum_{i=1, i \neq j}^s a_{i,j}^{(0)} u_{n,i} = \\
 = u_{n,0} \left( 1 + \lambda \tau \left( b_{j,m} + u_{n,0}^{-1} \sum_{i=1}^s \tau a_{i,j}^{(1)} \right) \right) + \\
 + \lambda \tau \sum_{i=1}^{m-1} b_{i,j} u_{n,i-m}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Введем обозначения

$$V_{n+1} = \{u_{n,j}, j=1,2,\dots,s\},$$

$$U_n = \{u_{n,j-m}, j=1,2,\dots,m\},$$

$$c_j = u_{n,0}^{-1} \sum_{i=1}^s \tau a_{i,j}^{(1)}$$

и запишем (10) в векторной форме

$$A_1 U_n + A_2 V_{n+1} = 0, \quad (11)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu b_{1,1} & \mu b_{1,2} & \dots & \mu b_{1,m-1} & 1 + \mu(b_{1,m} + c_1) \\ \mu b_{2,1} & \mu b_{2,2} & \dots & \mu b_{2,m-1} & 1 + \mu(b_{2,m} + c_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mu b_{s,1} & \mu b_{s,2} & \dots & \mu b_{s,m-1} & 1 + \mu(b_{s,m} + c_s) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mu a_{1,1}^{(0)} - 1 & \mu a_{1,2}^{(0)} & \dots & \mu a_{1,s}^{(0)} \\ \mu a_{2,1}^{(0)} & \mu a_{2,2}^{(0)} - 1 & \dots & \mu a_{2,s}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu a_{s,1}^{(0)} & \mu a_{s,2}^{(0)} & \dots & \mu a_{s,s}^{(0)} - 1 \end{pmatrix}.$$

Разрешим (11) относительно  $V_{n+1}$ , получим

$$V_{n+1} = G U_n, \quad (12)$$

где

$$G = -A_2^{-1} A_1. \quad (13)$$

Преобразуем систему (12) к эквивалентной системе

$$W_{n+1} = \check{G}W_n, \quad (14)$$

где

$$W_n = \{u_{n,m-1}, u_{n,1-m+1}, \dots, u_{n,0}\},$$

$$W_{n+1} = \{u_{n,s-m+1}, u_{n,s-m+2}, \dots, u_{n,0}, \dots, u_{n,s}\}.$$

Матрица (13) имеет размерность  $s \times m$ , а матрица из (14) – квадратная, и ее размерность определяется  $\max(s,m)$ . Если число опорных и расчетных точек совпадает ( $s = m$ ), то совпадают и матрицы  $G = \check{G}$ . В противном случае, если опорных точек меньше, чем расчетных ( $m < s$ ), в матрице  $\check{G}$  первые  $s - m$  столбцов следует положить равными 0, а последние  $m$  столбцов будут совпадать с  $G$

$$\check{G} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & g_{1,m-1} & g_{1,m-2} & \dots & g_{1,0} \\ 0 & \dots & 0 & g_{2,m-1} & g_{2,m-2} & \dots & g_{2,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_{s,m-1} & g_{s,m-2} & \dots & g_{s,0} \end{pmatrix}.$$

Для случая, когда опорных точек больше, чем расчетных ( $s < m$ ), матрицу  $\check{G}$  следует привести к виду (15). Устойчивость численного метода (4) определяется собственными значениями матрицы  $\check{G}$ , и для устойчивости по правой части должно быть выполнено условие корней. Т.е. для некоторой нормы матрицы  $\check{G}$  справедливо неравенство  $\|\check{G}\| \leq 1$ , или все корни характеристического уравнения матрицы  $\check{G}$  лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе круга нет кратных корней.

Проверим устойчивость трехшагового двухточечного метода, заданного разностными уравнениями (6).

$$\check{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ g_{1,1} & g_{1,2} & \dots & & & & & & g_{1,m} \\ & & & & & & \ddots & & \\ g_{s,1} & g_{s,2} & \dots & & & & & & g_{s,m} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Придем к модельному уравнению, положив  $F_{n,j} = \lambda u_{n,j}$  и  $\mu = \lambda t$ , определим матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1283\mu}{483840} & 1 + \frac{2689\mu}{10080} \\ -\frac{43\mu}{15120} & 1 + \frac{257\mu}{945} \\ -\frac{57\mu}{17920} & 1 + \frac{313\mu}{1120} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{273\mu}{640} - 1 & \frac{9137\mu}{30240} & \frac{10229\mu}{161280} \\ \frac{17\mu}{20} & \frac{757\mu}{945} - 1 & \frac{1207\mu}{15120} \\ \frac{621\mu}{640} & \frac{1443\mu}{1120} & \frac{8333\mu}{17920} - 1 \end{pmatrix}.$$

Сформируем матрицы  $G, \check{G}$  и построим область устойчивости (рис. 5) разностной системы уравнений метода (6).

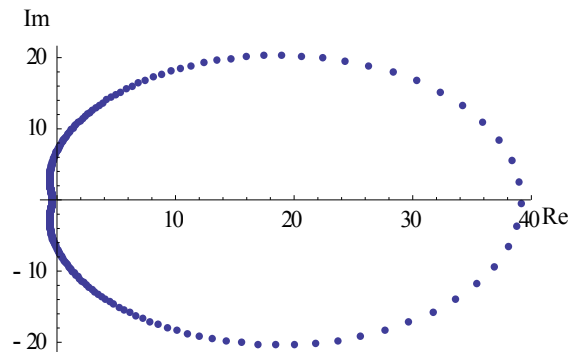


Рис. 5. Область устойчивости трехшагового двухточечного коллокационного блочного метода (6)

Динамику изменения области устойчивости коллокационных блочных многошаговых методов можно проследить, изменяя соотношение количества расчетных и опорных точек. Рассмотрим разностные уравнения для блочного метода с соотношением опорных и расчетных точек (7). Построенная по корням характеристического уравнения матрицы  $\check{G}$  область устойчивости для трехшагового двухточечного метода с первыми производными правых частей представлена на рис. 6.

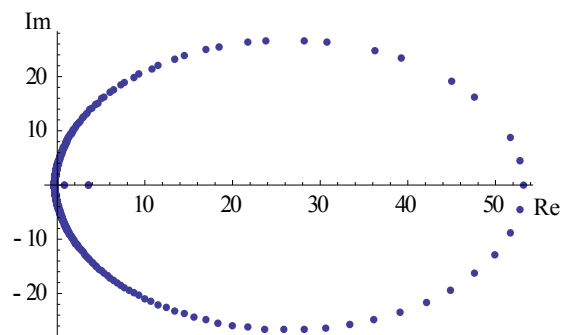


Рис. 6. Область устойчивости двухшагового трехточечного коллокационного блочного метода (7)

Из приведенных на рис. 5, 6 годографов следует, что многошаговые коллокационные блочные методы со старшими производными условно устой-

чивы, так как имеется незначительное смещение годографов в отрицательную полуплоскость, и при решении жестких задач это повлечет за собой введение некоторых ограничений на шаг интегрирования. Но, тем не менее, эти методы могут быть успешно использованы при решении неособенных задач, поскольку имеют достаточно высокий порядок аппроксимации. Кроме того, можно попытаться исправить этот недостаток, осуществив некоторую модификацию методов.

### Выводы

Разработаны блочные коллокационные многошаговые методы с производными высших порядков, ориентированные на параллельную архитектуру и не использующие при своем построении промежуточных стадийных точек.

Определены условия устойчивости и доказана сходимости по начальным данным и по правой части, определен порядок их точности.

Предложена методика генерации параллельных коллокационных разностных формул с производными высоких порядков на основе интегро-интерполяционного подхода, базирующаяся на использовании многочленов Эрмита.

Данная методика является универсальной для получения разностных уравнений различных видов и позволяет генерировать как методы многостадийного типа, так и блочные одношаговые и многошаговые многоточечные разностные схемы с вариацией порядков производных правых частей в расчетных и опорных точках.

Порядки производных в каждом узле коллокации определяются исходя из требований точности, размерности задачи, архитектурных особенностей параллельной системы и топологии процессорного поля.

### Литература

1. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи [Текст] / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
2. Численное решение сверхжестких дифференциально-алгебраических систем. [Текст] / А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Н.Н. Калиткин, А.Б. Корягина // Доклады академии наук. – 2006. – Т. 408, № 4. – С. 1–5.
3. Dmitrieva, O. Parallel Algorithms of Simulation. Increase of simulation of dynamic objects with the lumped parameters into parallel computer systems. [Text] / O. Dmitrieva, A. Firsova. - Lambert Academic Publishing. – 2012. – 192 p.
4. Куликов, Г.Ю. Об одношаговых коллокационных методах со старшими производными для решения обыкновенных дифференциальных уравне-

ний/ [Текст] / Г.Ю. Куликов, А.И. Меркулов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1782-1807.

5. Куликов, Г.Ю. Об автоматическом управлении длиной шага и порядком в одношаговых коллокационных методах со старшими производными. [Текст] / Г.Ю. Куликов, Е.Ю. Хрусталёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 6. – С. 1060-1077.

6. Аульченко, С.М. Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием интерполяционных полиномов Эрмита. [Текст] / С.М. Аульченко, А.Ф. Латыпов, Ю.В. Никуличев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1665-1670.

7. Латыпов, А.Ф. Численный метод решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многосвязных интерполяционных полиномов Эрмита. [Текст] / А.Ф. Латыпов, О.В. Попик // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 78-85.

8. Фельдман, Л.П. Параллельные коллокационные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Л.П. Фельдман // Наукові праці ДонНТУ, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка». – 2008. – № 9 (132). – С. 33 - 40.

9. Фельдман, Л.П. Разработка обобщенных коллокационных блочных методов [Текст] / Л.П. Фельдман, О.А. Дмитриева // Сборник трудов конференции «МОДЕЛИРОВАНИЕ – 2012», 16-18 мая 2012, г. Киев – Киев: Институт проблем моделирования в энергетике. – 2012. – С. 434-437.

10. Дмитриева, О.А. Высокоэффективные алгоритмы управления шагом на основе параллельных коллокационных блочных методов [Текст] / О.А. Дмитриева // Искусственный интеллект. – 2012. – № 4. – С. 77 – 88.

11. Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформатиці. [Текст] / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнична група ВНУ, 2006. – 480 с.

12. Дмитрієва, О.А. Паралельні різницеві методи розв'язання задачі Коші [Текст] / О.А. Дмитрієва. – Донецьк: ДонНТУ. – 2011. – 265 с.

13. Butcher, J.C. Numerical methods for ordinary differential equations [Text] / J.C. Butcher – Wiley-VCH Verlag, 2003. – 418 p.

14. Дмитриева, О.А. О введении производных высших порядков в параллельные коллокационные методы решения задачи Коши [Текст] / О.А. Дмитриева // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство» (САІТ-2012). – 2012. – № 2 – С. 152-156.

15. Самарский, А.А. Численные методы. [Текст] / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука. – 1989.- 432с.

Поступила в редакцію 26.02.2013, рассмотрена на редколлегии 20.03.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. кафедри Л.П. Фельдман, Донецкий национальный технический университет, Донецк, Украина.

## РОЗРОБКА БАГАТОКРОКОВИХ ПАРАЛЕЛЬНИХ КОЛОКАЦІЙНИХ БЛОКОВИХ МЕТОДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ПОЛІНОМІВ ЕРМІТА

*О.А. Дмитрієва*

У роботі розглядаються питання чисельної реалізації задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем у паралельних комп'ютерних середовищах. Розроблено блокові колокаційні методи, які дозволяють знаходити розв'язки одночасно у всіх розрахункових точках блоку, що забезпечує скорочення часу одержання рішення навіть при послідовній реалізації. З метою вирівнювання порядку апроксимації у всіх розрахункових точках блоку в різницеві схеми введено додаткові похідні вищих порядків. Колокаційні методи будуються на інтерполяційних багаточленах Ерміта, ступеня яких збігаються з кількістю точок колокації. Для розроблених методів визначені умови стійкості, порядки точності й доведена збіжність за початковим даними й по правій частині. Показано, що порядок апроксимації введених методів значно перевищує класичні варіанти й однаковий у всіх розрахункових точках блоку.

**Ключові слова:** задача Коші, точки колокації, паралельний метод, старші похідні, стійкість, збіжність.

## DEVELOPMENT OF PARALLEL MULTISTEP COLLOCATION BLOCK METHODS USING HERMITE INTERPOLATION POLYNOMIALS

*O.A. Dmitrieva*

The paper concerns itself with the numerical realization of the Cauchy problem for ordinary differential equations and their systems in parallel computer systems. The block collocation methods are developed that allow us to find a solution simultaneously in all the calculating points of the block, which reduces the time of obtaining the solution even for the sequential implementation. In order to align the order of approximation in all the calculating points of the block the additional higher-order derivatives are introduced into the difference schemes. The collocation methods are based on the Hermite interpolation polynomials, the orders of which are equal to the number of collocation points. The conditions of stability, the order of accuracy and the convergence of the initial data and of the right-hand side are determined for the developed methods. The software for generating the coefficients of design schemes of collocation one-step block methods of a given order of accuracy is developed. The system of difference equations with arbitrarily imposed collocation points and the additional derivatives are given as the examples. It is shown that the order of approximation of the introduced methods is much higher than classical models, and the same in all calculating points of the block.

**Key words:** the Cauchy problem, the collocation points, a parallel method, higher derivatives, stability, convergence.

**Дмитрієва Ольга Анатольевна** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики и інформатики Донецького національного технічного університету, Донецк, Украина.