УДК 519.713

А.С. ЕПИФАНОВ

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

ДООПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЧНО ЗАДАННЫХ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙНОВ

В статье рассматривается доопределение частично заданных законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем (автоматов). В качестве основного варианта задания автоматов используется новый, предложенный и разработанный В.А. Твердохлебовым, способ, основанный на геометрическом представлении законов функционирования. В качестве средства доопределения частично заданных геометрическими образами автоматов используются сплайны различных степеней. Исследована эффективность интерполяции сплайнами геометрических образов автоматов длины до 1022 в классе (2,2,16)-автоматов, классе (2,2,32)-автоматов, классе (4,2,2)-автоматов и его 15 непустых подклассах, в классе линейных (8,2,2)-автоматов и др.

Ключевые слова: *автоматное отображение, геометрический образ закона функционирования автомата, интерполяция, квадратичный сплайн, кубический сплайн, сплайн Акимы, сплайн Эрмита, сплайн Катмулла-Рома.*

Введение

В основополагающих работах, содержащих развитие теории автоматов (см., например, [1 – 4]) , не рассматривается задача доопределения автоматов на основе единого подхода. Существуют задачи, при решении которых используемые методы предполагают полностью заданные законы функционирования автоматов, а в исходных данных эти законы представлены частично.

Фундаментальные математические результаты по доопределению частично заданных графиков представлены классическими методами интерполяции Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Бесселя, Стирлинга, методами сплайн-интерполяции, методом наименьших квадратов, методом ближайшего соседа и др.[6-8]. Неприменимость этих методов для частично заданных автоматов связана с символьной формой задания автоматов таблицами, матрицами, графами, системами логических уравнений и т.п. Задание числовыми структурами законов функционирования автоматов на основе представления автоматных отображений числовыми графиками [10] позволяет использовать классические методы интерполяции в теории автоматов.

В данной статье рассматривается интерполяция законов функционирования автоматов на основе применения разработанных методов к классам автоматов и их подклассам, образованных сочетаниями свойств Поста для комбинационных частей автоматов.

В работе исследуется доопределение частично заданных законов функционирования автоматов из классов (n, m, l) – автоматов, где n – число состояний автомата, m и l - числа входных и выходных сигналов автомата для всего класса (4,2,2)-автоматов, для 15 непустых подклассов класса (4,2,2)-автоматов, для класса линейных (8,2,2)-автоматов и классов автоматов, законы функционирования которых представлены частично заданными последовательностями вторых координат точек геометрических образов (см.[12]). Выбор для исследования классов (4,2,2)-автоматов, (8,2,2)-автоматов определяется тем, что они являются автоматными моделями в исходном базисе технических элементов для синтеза систем. Синтез систем из базовых элементов позволяет строить такие системы, законы функционирования которых, во-первых, существенно более сложные, чем законы функционирования отдельных элементов, а, во-вторых, определены с меньшей полнотой. Для того, чтобы учесть эту ситуацию исследовано доопределение законов функционирования автоматов по частично заданным последовательностям вторых координат точек геометрических образов автоматов без учета ограничения на число состояний автоматов (см. [5]). Выбор и применение метода интерполяции по смыслу соответствуют принятию и реализации гипотезы о том, что метод интерполяции, применяемый к числовому графику, представляющему частично заданный геометрический образ, достаточно точно восстанавливает точки геометрического образа, т.е. достаточно

точно доопределяет частично заданные законы функционирования автомата. Следовательно, обоснованность результатов, полученных с использованием выбранного метода интерполяции, сведена к обоснованию правильности гипотезы.

1. Геометрические образы законов функционирования автоматов

Применение методов интерполяции для доопределения частично заданных законов функционирования автоматов становится возможным при использовании нового геометрического задания автоматных отображений, предложенного и разработанного Твердохлебовым В.А. (см.[10]). Геометрическое задание закона функционирования автомата, которое систематизировано представлено автоматным отображением, построено на рассмотрении автоматных отображений как точек и размещении таких точек геометрических кривых, имеющих аналитическое задание. Такое размещение возможно, если на множестве X^* всех входных конечных последовательностей и на множестве Y всех выходных сигналов ввести соответственно натуральные линейные порядки ω_1 и ω_2 (примеры конкретных порядков содержатся, например, в работах [10,11]). В результате автоматное отображение представляется символьным графиком G_0 в системе координат с осью абсцисс (X^*, ω_1) и осью ординат (Y, ω_2). После замены точек с координатами в форме последовательностей в графике G_0 на точки с координатами - номерами последовательностей по линейным порядкам ω_1 и ω_2, получаем график G_1 автоматного отображения в системе координат с осью абсцисс N^+ и осью ординат N^+. Твердохлебовым В.А. показано (см.[10,11]), что представление автоматного отображения на геометрической кривой точками с целочисленными положительными координатами может быть заменено точками с положительными числовыми координатами, что позволяет полностью использовать методы геометрии.

2. Методы выбора базовых точек интерполяции

Выбор базовых точек интерполяции характеризуется числом базовых точек и конфигурациями их расположения. К классическим вариантам расположения базовых точек относится расположение первых координат базовых точек интерполяции на одинаковом расстоянии по оси абсцисс. В данной работе выбор базовых точек интерполяции определялся новым критерием, в котором учитывается интерпретация точек интерполируемого графика: базовыми точками интерполяции полагаются вершины геометрических образов автономных подавтоматов $A_0=(S,\{0\},Y,\delta_0,\lambda_0,s_0)$ и $A_1=(S,\{1\},Y,\delta_1,\lambda_1,s_0)$ автомата $A=(S,\{0,1\},Y,\delta,\lambda,s_0)$. Координаты таких базовых точек удобно вычислять, т.к. они соответствуют приложению к исследуемому автомату периодических входных последовательностей с периодом, состоящим из одного входного сигнала – 0 или 1. Такой критерий выбора базовых точек интерполяции предлагается впервые (такой метод выбора базовых точек далее в работе будем называть методом 1). Также впервые предлагается следующий критерий выбора базовых точек интерполяции: базовыми точками интерполяции для доопределения графика, представляющего частично заданные законы функционирования автомата, предлагается использовать точки, расположенные на прямых, параллельных оси абсцисс. Такие точки удобно определять экспериментально с помощью простых устройств, выделяющих в последовательностях выходных сигналов только один заданный сигнал (такой метод выбора базовых точек далее в работе будем называть методом 2).

Для рассматриваемых в данной статье классов автоматов число входных сигналов равно двум. Каждый частично заданный геометрический образ автомата предполагается заданным двумя сечениями, которые представляют собой геометрические образы автономных подавтоматов. На рис.1 (часть 2) приведен частично заданный геометрическими образами двух автономных подавтоматов геометрический образ (2,2,16)-автомата длины d = 62 и построенный по этим базовым точкам сплайн. Первое сечение представлено пятью точками с номерами 1, 3, 7, 15, 31 (данным точкам соответствуют следующие пять входных последовательностей: x_1, x_1x_1, $x_1x_1x_1$, $x_1x_1x_1x_1$, $x_1x_1x_1x_1x_1$), второе сечение представлено пятью точками с номерами 2, 6, 14, 30, 62 (данным точкам соответствуют следующие пять входных последовательностей: x_2, x_2x_2, $x_2x_2x_2$, $x_2x_2x_2x_2$, $x_2x_2\,x_2x_2x_2$). Таким образом , при d = 62, анализ эффективности сплайн-интерполяции проводится по отношению к частично заданным 10 базовыми точками интерполяции (точками с номерами 1, 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, 31, 62) геометрическим образам автоматов.

Очевидно, что в общем случае, когда частично заданный геометрический образ автомата с m входными сигналами представлен m сечениями, являющимися геометрическими образами его m автономных подавтоматов, и длина рассматриваемого начального отрезка геометрического образа автомата определяется как

$$d = \sum_{i=1}^{h} m^i ,$$

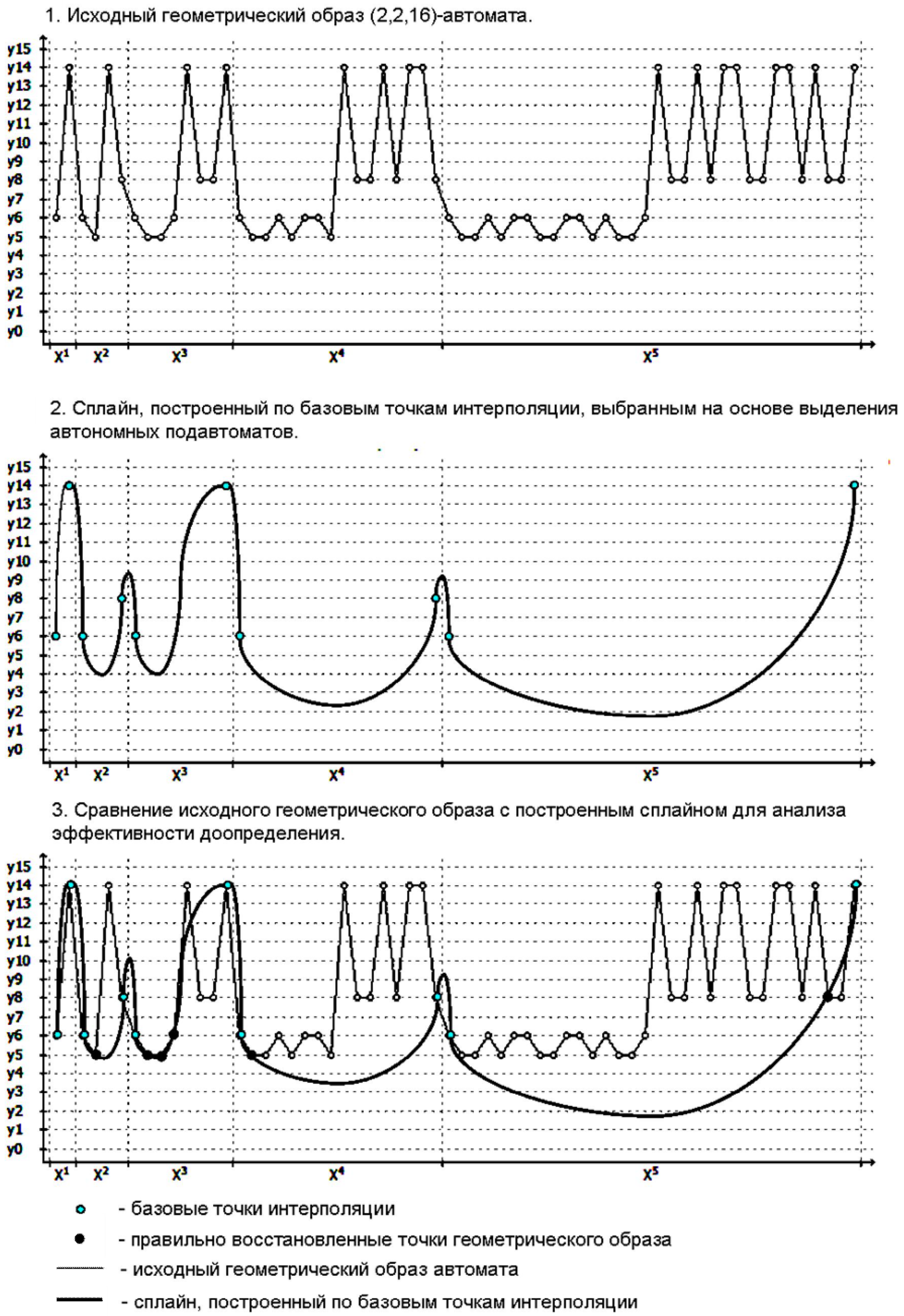

Рис. 1. Схема анализа эффективности сплайн-интерполяции (на примере (2,2,16)-автомата):
1) построение исходного геометрического образа; 2) выбор базовых точек интерполяции на основе выделения автономных подавтоматов исходного автомата и построение по данным точкам сплайна;
3) подсчет числа правильно восстановленных точек на основе сравнения исходного геометрического образа и построенного сплайна

где h =1, 2, 3, … - длина входных слов (т.е. в начальном отрезке геометрического образа представлено функционирование автомата на словах до длины h включительно), то частично заданный геометрический образ автомата представлен $(m \cdot h)$ точками, а значения в $(d - m \cdot h)$ точках не заданы. Анализ эффективности интерполяции в исследуемых в данной части работы классах автоматов проводится при $d \in \{30, 62, 126, 254, 510, 1022\}$, таким образом число базовых точек интерполяции при d=30 равно 8, при d=62 равно 10, при d=126 равно 12, при d=254 равно 14, при d=510 равно 16, при d=1022 равно 18.

3. Анализ эффективности доопределения частично заданных автоматов на основе сплайн-интерполяции

В данной части работы проводится анализ эффективности сплайн-интерполяции для доопределения частично заданных автоматов в классе (2,2,16)-автоматов, классе (2,2,32)-автоматов, классе (4,2,2)-автоматов, классе линейных (8,2,2)-автоматов и др. Спецификой сплайн-интерполяции, в отличие от полиномиальной интерполяции, когда вся аппроксимируемая зависимость описывается одним полиномом, является построение на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ отдельного полинома со своими коэффициентами. Далее кратко приводится описание основных используемых в работе сплайнов.

1. Одним из самых простых видов сплайнов является линейный сплайн - это сплайн, составленный из полиномов первой степени, т.е. из отрезков прямых линий. Точность интерполяции линейными сплайнами невысока. В некоторых случаях кусочно-линейная аппроксимация функции может оказаться эффективнее по некоторым критериям, чем аппроксимация более высокого порядка.

2. Сплайн Эрмита - сплайн третьего порядка, производная которого принимает в узлах сплайна заданные значения. В каждом узле сплайна Эрмита задано не только значение функции, но и значение её первой производной. Сплайн Эрмита имеет непрерывную первую производную.

3. Сплайн Катмулла-Рома – аналог сплайна Эрмита, специфическим свойством которого является определение производной:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$

Как и сплайн Эрмита, сплайн Катмулла-Рома имеет непрерывную первую производную и разрывную вторую. Значения сплайна Катмулла-Рома зависят только от значений функции в четырех соседних точках (двух слева, двух справа).

4. Кубический сплайн. Все сплайны (за исключением линейного сплайна), используемые в данной работе, являются кубическими сплайнами - в том смысле, что они являются кусочно-кубическими функциями. Однако, когда говорят "кубический сплайн", то обычно имеют в виду конкретный вид кубического сплайна, который получается, если потребовать непрерывности первой и второй производных. Кубический сплайн задается значениями функции в узлах и значениями производных на границе отрезка интерполяции (либо первых, либо вторых производных).

5. Сплайн Акимы - это особый вид сплайна, устойчивый к выбросам. Недостатком кубических сплайнов является то, что они склонны осциллировать в окрестностях точки, значения второй координаты которой существенно отличаются от значений вторых координат соседних по оси абсцисс точек. В отличие от кубического сплайна, сплайн Акимы в меньшей мере подвержен влиянию выбросов - на отрезках, граничащих с выбросом, практически отсутствуют признаки осцилляции. Важным свойством сплайна Акимы является нелинейность интерполяции - результат интерполяции суммы двух функций не равен сумме интерполяционных схем, построенных на основе отдельных функций.

На основе использования: аппарата геометрических образов автоматов [10,11]; сплайнов в качестве средства доопределения частично заданных законов функционирования автоматов и двух предложенных методов выбора базовых точек интерполяции проведен анализ эффективности доопределения в следующих классах автоматов: в классе (2,2,8)-автоматов, в классе (2,2,16)-автоматов, в классе (2,2,32)-автоматов и в 15 его непустых подклассах (выделенных на основании свойств Поста для комбинационных частей автоматов), в классе (4,2,2)-автоматов и в 15 его непустых подклассах, в классе линейных (8,2,2)-автоматов. Для каждого класса определен сплайн (из множества используемых сплайнов), который наиболее эффективно восстанавливает геометрические образы автоматов в классе. Отмечено, что в классах (2,2,32)-автоматов и (2,2,16) – автоматов наиболее эффективным оказался сплайн Акимы, а в классе линейных (8,2,2) - автоматов - кубический сплайн. Получены оценки точности доопределения в 15 непустых подклассах класса (2,2,32)-автоматов и 15 непустых подклассах класса (4,2,2)-автоматов при различных длинах начальных отрезков геометрических образов автоматов.

Выводы

В работе проведен анализ эффективности доопределения частично заданных законов функционирования автоматов на основе сплайн-интерполяции. Исследованы геометрические образы автоматов длины до 1022 знаков в классе (2,2,16)-автоматов, классе (2,2,32)-автоматов, классе (4,2,2)-автоматов, классе линейных (8,2,2)-автоматов и др. Для каждого класса определен наиболее эффективные сплайн. Получена сравнительная оценка по точности интерполяции в указанных классах линейного сплайна, сплайна Эрмита, кубического сплайна, сплайна Акимы и сплайна Катмулла-Рома.

Литература

1. *Брауер, В. Введение в теорию конечных автоматов [Текст] / В. Брауер. – М.:Радио и связь, 1987. – 320 с.*
2. *Гилл, А. Введение в теорию конечных автоматов [Текст] / А. Гилл. – М.: Наука, 1966. – 272 с.*
3. *Глушков, В.М. Синтез цифровых автоматов [Текст] / В.М. Глушков. – М.: Физматгиз. 1962. – 476 с.*
4. *Глушков, В.М. Абстрактная теория автоматов [Текст] / В.М. Глушков // Успехи мат. наук.- 1961. – 16. Вып. 5 (101). – С. 3 – 62.*
5. *Епифанов, А.С. Методы доопределения и оценки сложности законов функционирования дискретных динамических систем [Текст] / А.С. Епифанов // Проблемы управления. – М., 2011. – № 2. – С. 23 – 30.*
6. *Корнейчук, Н.П. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов [Текст] / Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун; отв. ред. А. И. Степанец; ред. С. Д. Кошис, О. Д. Мельник, АН Украины, Ин-т математики. – К.: Наукова думка, 1992. – 304 с. – ISBN 5-12-0022103.*
7. *Половко, А.М. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации [Текст] / А.М. Половко, П.Н. Бутусов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с. – ISBN 5-94157-493-2.*
8. *Роджерс, Д. Математические основы машинной графики [Текст] / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 280 с. – ISBN 5-03-002143-4.*
9. *Твердохлебов, В.А. Методы интерполяции в техническом диагностировании [Текст] / В.А. Твердохлебов / Проблемы управления. – М., 2007. – № 2. – С. 28 – 34.*
10. *Твердохлебов, В.А. Геометрические образы законов функционирования автоматов [Текст] / В.А. Твердохлебов. – Саратов: Изд-во "Научная книга", 2008. – 183 с.*
11. *Твердохлебов, В.А. Представление автоматных отображений геометрическими структурами [Текст]: моногр. / В.А. Твердохлебов, А.С. Епифанов. – Саратов: ООО Изд. Центр «Наука», 2013. – 204 с. – ISBN 978-5-9999-1483-5.*
12. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences(OEIS) [Электронный ресурс]. – Режим доступа к энциклопедии: www.oeis.org.*

Поступила в редакцию 7.02.2013, рассмотрена на редколлегии 6.03.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Мельник, Национальный университет «Львовская политехника», Львов, Украина.

ДОВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТКОВО ЗАДАНИХ ЗАКОНІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙНІВ

А.С. Епіфанов

У статті розглядається довизначення частково заданих законів функціонування дискретних детермінованих динамічних систем (автоматів). Як основний варіант завдання автоматів використовується новий, запропонований і розроблений Твердохлебовим В.А. спосіб, заснований на геометричному представленні законів функціонування. Як засіб довизначення частково заданих геометричними образами автоматів використовуються сплайни різних ступенів. Досліджена ефективність інтерполяції сплайнами геометричних образів автоматів довжини до 1022 в класі (2,2,16)-автоматів, класі (2,2,32) -автоматів, класі (4,2,2) -автоматів і його 15 непорожніх підкласах, в класі лінійних (8,2,2) -автоматів тощо.

Ключові слова: автоматне відображення, геометричний образ закону функціонування автомата, інтерполяція, квадратичний сплайн, кубічний сплайн, сплайн Акими, сплайн Ерміта, сплайн Катмулла-Рома.

REGULARIZATION OF PARTIALLY SET LOWS OF FUNCTIONING OF DISCRETE DETERMINED AUTOMATONS WITH USE OF SPLINES

A.S. Epifanov

In paper it is considered regularization of partially set lows of functioning of discrete determined systems (automatons). As the basic way of representation of automatons we use new way, offered and developed by Tverdokhlebov V.A., based on geometrical representation of lows of functioning. As means of regularization of partially set geometrical image of automatons splines are used. Efficiency of interpolation by splines of geometrical images of automatons of len up to 1022 in class of (2,2,16)-automatons, in class of (2,2,32)-automatons, in class of (4,2,2)-automatons and in 15 of it nonempty suclasees, in class of linear (8,2,2)-automatons etc. is investigated.

Key words: automata mapping, geometrical image of lows of functioning of automaton, interpolation, quadratic spline, cubic spline, Akima spline, Hermit spline, Katmul-Rom spline.

Епифанов Антон Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института проблем точной механики и управления Российской академии наук, Саратов, Россия, e-mail: epifanovas@list.ru.