УДК 519.713

В.А. ТВЕРДОХЛЕБОВ

Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Дискретные детерминированные динамические системы в форме автоматов используются как модели реальных систем. Традиционные способы задания автоматов не позволяют определять сложные реальные системы, ориентированы на символьные структуры и изолированы от применения развитого аппарата непрерывной числовой математики, а также не являются конструктивными при задании автомата с большим числом состояний. В статье приводятся основные теоремы для нового геометрического представления автоматных отображений, что позволяет конструктивно использовать автоматные модели с счетно-бесконечным множеством состояний и применять к ним аппарат непрерывной числовой математики.

Ключевые слова: *автоматное отображение, геометрический образ автоматного отображения, линейный порядок, геометрическая кривая, график геометрического образа.*

Введение

Дискретные детерминированные динамические системы (автоматы с конечными или счетно-бесконечными множествами состояний) образуют собственный подкласс в классе динамических систем. Класс таких автоматов обладает большими возможностями, т.к. представляет (по одной из основных гипотез теории алгоритмов) весь класс интуитивно понимаемых алгоритмов. В связи с тем, что конечные детерминированные автоматы и машины Тьюринга первоначально не предназначались для определения систем с большим множеством состояний, разработанные методы задания автоматов (табличный, графом, матрицей, логическими уравнениями, формулой языка регулярных выражений) оказываются эффективными только для автоматов с конечным множеством состояний. При этом исследования показали, что применяемый аппарат дискретных структур не использует мощные математические абстракции (актуальной бесконечности, непрерывности, предельного перехода, суммирования бесконечных рядов, структуры абстрактных пространств и т.д.), принципиально ограничивает практическую применимость автоматных моделей. В работах [ТВА1-ТВА4] впервые введены, а затем развиты основные положения, модели и методы для представления автоматных отображений геометрическими образами в форме множеств точек на аналитически заданных кривых с интерпретацией первых координат точек как входных последовательностей и вторых координат точек как выходных сигналов. На основании этого автоматные отображения получили различные формы изображения графиками. В таких графиках компонентами точек оказались целые положительные числа и целые числа, положительные действительные и действительные числа, интервалы, полуинтервалы, отрезки. Для того, чтобы систематизировать все возможное разнообразие геометрических образов автоматных отображений, получены теоремы, приведенные в данной статье.

1. Автоматные отображения и их геометрические образы

Введем абстрактные дискретные детерминированные автоматы с конечными или бесконечными множествами состояний типов Мили и Мура.

Определение 1.1. Дискретным детерминированным автоматом типа Мили называется система пяти объектов $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S – не более, чем счетно-бесконечное множество состояний; X и Y – конечные множества входных и выходных сигналов; δ - отображение вида $\delta: S \times X \to S$ (функция переходов); λ - отображение вида $\lambda: S \times X \to Y$ (функция выходов). Автомат функционирует в абстрактном целочисленном неотрицательном времени в соответствии с уравнениями динамики

$$s(t+1) = \delta(s(t), x(t)) , y(t) = \lambda(s(t), x(t)), \qquad (1.1)$$

формируя для задаваемых последовательности входных сигналов $p = x(1)x(2)\dots x(c)$ и начального состояния $s(1) \in S$ последовательность состояний $\theta = s(1)\ s(2)\ \dots\ s(c+1)$ и последовательность выходных сигналов $q = y(1)y(2)\dots y(c)$.

Определение 1.2. Дискретным детерминированным автоматом типа Мура (автоматом с функцией отметок состояний) называется система пяти объектов $B = (S, X, Y, \delta, \mu)$, где S, X ,Y и δ имеют тот же смысл, что и в определении 1, а μ - отображение вида $\mu : S \to Y$ (функция отметок состояний). Процесс функционирования определяется уравнениями динамики

$$s(t+1) = \delta(s(t), x(t)) ,\ y(t) = \mu(s(t)). \qquad (1.2)$$

Автоматное отображение $f_{s_0}^A$ является множеством пар вида (p, q), где $p \in X^*$, $q \in Y^*$ и соответствует инициальному автомату

$$A_{s_0}^A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0) ,$$

где $s_0 \in S$ - зафиксированное начальное состояние автомата:

$$f_{s_0}^A = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda(s_0, p))\}. \qquad (1.3)$$

Автоматное отображение $f_{s_0}^A : X^* \to Y^*$, требующее для представления графиком бесконечной оси ординат, эквивалентным образом можно заменить автоматным отображением $\rho_{s_0}^A$: $X^* \to Y$, где

$$\rho_{s_0}^A = \bigcup_{px \in X^* X} \{(px, \lambda(\delta(s_0, p), x))\}. \qquad (1.4)$$

В автоматном отображении $f_{s_0}^A$ пары имеют вид (p, q), где $p \in X^*$, $q \in Y^*$.

В автоматном отображении $\rho_{s_0}^A$ паре (p, q) соответствует множество пар, первыми элементами которых являются префиксы последовательности p , а вторыми элементами – последние элементы выходных последовательностей, соответствующие префиксам входных последовательностей. Множество состояний S инициального автомата

$$A_{s_0}^A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$$

удобно представлять в следующей форме: $s_0 = s_\varepsilon$ и для любого $p \in X^*$ $\delta(s_\varepsilon, p) = s_p$. Для любых p_i , $p_j \in X^*$ выполняется равенство:

$$\delta(s_{p_i}, p_j) = s_{p_i p_j} . \qquad (1.5)$$

В геометрических образах автоматных отображений пары из автоматных отображений представлены точками в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости. Простейшим случаем являются геометрические образы, представляющие автоматные отображения точками с положительными целочисленными координатами. На рис. 1.1 показан график символьного геометрического образа, в котором элементы множества X^* линейно упорядочены порядком ω_1 , а элементы множества Y линейно упорядочены порядком ω_2 . При этом символьный график представлен точками с целочисленными положительными координатами, являющимися номерами элементов по порядкам ω_1 и ω_2 .

Предполагается, что множества (X^*, ω_1) и (Y, ω_2) являются вполне линейно упорядоченными множествами, в которых ω_1 и ω_2 соответствуют определению 1.3.

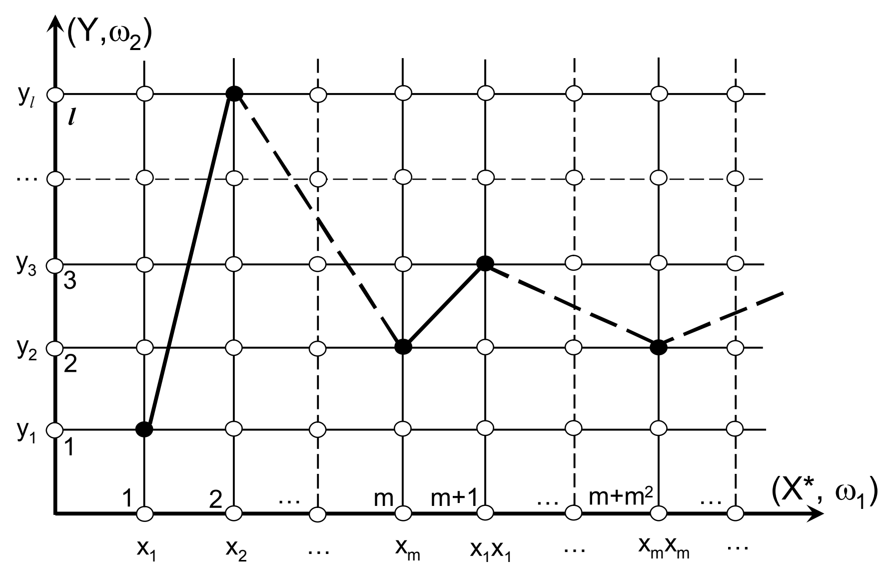

Рис. 1.1. Пример начального фрагмента символьного геометрического образа автоматного отображения

Определение 1.3. Пусть X - конечное непустое множество, X^*- множество всех конечных последовательностей элементов из множества X и на X^* определен порядок следующими правилами:

Правило 1. На множестве X определен некоторый линейный порядок ω_1 с дополнительными условиями: задан первый элемент и для каждого элемента определен непосредственно следующий за ним элемент.

Правило 2. Для каждого целого положительного числа $k \in N^+$ последовательность из $k+1$ наименьших по порядку ω_1 элементов множества X непосредственно следует за последовательностью из k наибольших по порядку ω_1 элементов множества X.

Правило 3. Для любых $p, p' \in X^*$, для которых выполняются равенства $p \neq p'$, $|p| = |p'|$ и существуют такие префиксы ux, ux', что x по порядку ω_1 предшествует x', полагается, что p предшествует p' по порядку ω_1.

Такой порядок ω_1 на множестве X будем называть натуральным линейным порядком. Множество (X^*, ω_1) является вполне линейно упорядоченным множеством, а ω_1 - конкретным вариантом порядка. Аналогично, по правилу 1, вводится натуральный линейный порядок ω_2 на множестве Y.

Введение на множестве натурального линейного порядка превращает множество в вполне линейно упорядоченное множество. Имеет место теорема.

Теорема 1.1. Пусть X - конечное непустое множество и на множестве X^* определен натуральный линейный порядок ω. Тогда по порядку ω множество X^* является вполне линейно упорядоченным множеством.

Теорема 1.1 и основные теоремы приводятся без доказательств в связи с ограничениями на объем статьи.

2. Основные теоремы для построения геометрических образов автоматных отображений

Основной математической структурой, позволяющей преобразовывать символьное автоматное отображение $\rho^A_{s_0}$ вида (1.4) в различные числовые структуры, является отображение η вида

$$\eta : N^+ \to \{1, 2, \dots, l\}, \qquad (2.1)$$

где $l \in N^+$. Это отображение связывает последовательности входных сигналов, для любого конечного множества входных сигналов, с множеством выходных сигналов, содержащим l элементов. Отображению η для каждого автоматного отображения дается следующая интерпретация: $i \in N^+$ - номер входной последовательности, а $\eta(i)$ – номер выходного сигнала. Отображение η представляет базовый уровень преобразования символьного автоматного отображения в его геометрический образ с точками, имеющими целочисленные положительные координаты. Следующая теорема 2.1 показывает, что при введенном натуральном линейном порядке для любой последовательности $p \in X^*$ определяется ее номер.

Теорема 2.1. Пусть X - конечное непустое множество, $|X| = m$, где $m \in N^+$, X^* - множество всех конечных последовательностей элементов из X и ω-натуральный линейный порядок на множестве X^*. Тогда для любой последовательности $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, где $p \in X^*$ и $k \in N^+$, номер $r(p)$ последовательности p по натуральному линейному порядку ω определяется формулой

$$r(p) = \sum_{i=1}^{k-1} m^i + r^k(p) + 1, \qquad (2.2)$$

где $r^k(p)$ - номер последовательности p по натуральному линейному порядку ω в блоке H_k всех последовательностей длины k.

Следующие теоремы 2.2 – 2.4 определяют структуры вариантов связи символьного автоматного отображения с геометрическими образами, состоящими из точек с числовыми координатами.

Теорема 2.2. Пусть $A=(S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ - инициальный дискретный детерминированный автомат с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний S, ω_1 - линейный порядок на X^* и $(\alpha_0, \alpha_l]$ - полуинтервал на оси ординат, где $l = |Y|$. Тогда для любых:

-взаимно-однозначного отображения "в"

$$\varphi: N^+ \to R,$$

где для любых $n, n' \in N^+$ из $n < n'$ следует

$$\varphi(n) < \varphi(n');$$

- разбиения полуинтервала $(\alpha_0, \alpha_l]$ на l полуинтервалов $(\alpha_0, \alpha_1]$, $(\alpha_1, \alpha_2]$, ... ,$(\alpha_{l-1}, \alpha_l]$ и взаимно-однозначного отображения $\nu : Y \to (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $1 \le i \le l$, пара чисел (j, β), где $j \in Pr_2\, \varphi$ и $\beta \in (\alpha_0, \alpha_l]$, однозначно определяет пару (p, y_i), для которой j - номер $p \in X^*$ по порядку ω_1 и $\beta \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$.

Теорема 2.3. Любые:
- геометрическая кривая $y = f(x)$;
- последовательность h точек

$$(x_{i_1}, f(x_{i_1})), (x_{i_2}, f(x_{i_2})), \dots, (x_{i_j}, f(x_{i_j})), \dots,$$

где

$$x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_j} < \ldots;$$

- число $m \in N^+$ и разбиение последовательности h на подпоследовательности из m элементов каждая;

- полуинтервал $\Delta=(\alpha, \beta]$ на оси ординат, где

$$\min_{x \in \Delta} f(x) < \alpha < \beta \le \max_{x \in \Delta} f(x);$$

- разбиение полуинтервала Δ на конечное множество полуинтервалов вида $(\alpha_0, \alpha_1]$, $(\alpha_1, \alpha_2]$, ... ,$(\alpha_{l-1}, \alpha_l]$, где $l \in N^+$,

однозначно определяют геометрический образ законов функционирования дискретного детерминированного автомата с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний, с m входными и l выходными сигналами.

Следующая теорема фактически по представленному в ней утверждению совпадает с теоремой 2.3, но сформулирована в несколько иной форме.

Теорема 2.4. Для любых:

1) конечного непустого множества X и линейного порядка ω на X* , конечного непустого множества Y ;

2) взаимно-однозначного отображения

$$\varphi : N+ \rightarrow R+,$$

удовлетворяющего условиям, что для любых ni , nj $\in$ N+ из ni < nj следует φ (ni) < φ(nj) ;

3) полуинтервала [a0 , am) , где m = |Y| и a0, am $\in$ R+ , и разбиения полуинтервала [a0 , am) на m полуинтервалов [a0 , a1) , [a1 ,a2) , … , [am-1 , am) ;

4) взаимно-однозначного отображения

ν : {[a0 ,a1) , [a1 , a2), … ,[am-1,am)}$\rightarrow$Y ;

5) последовательности

$$\xi = < z1, z2, \ldots , >,$$

где для любого t $\in$ N+ zt$\in$[a0 , am) ,

бинарное отношение ρ вида $\rho \subset X^* \times Y$

ρ = {(p,y) : p$\in$X* & y$\in$Y & (($\exists$z $\in$ M(ξ)) rω(p) = rξ(z)) & (($\exists$ 1$\le$ j $\le$ m) z$\in$[aj-1 , aj) & ν([aj-1 , aj)) = y)} (где rω(p) – номер p по линейному порядку ω на X* , rξ(z) – номер z в последовательности ξ и M(ξ) – множество элементов в последовательности ξ) однозначно определяет автоматное отображение для дискретного детерминированного автомата с множествами входных сигналов X , выходных сигналов Y и конечным или счетно-бесконечным множеством состояний.

Выходные сигналы автомата в приложениях могут иметь вид векторов. Для векторов отсутствуют отношения ">" и "<" , что затрудняет расположение векторов по натуральному линейному порядку на оси ординат.

Следующая теорема 2.5 показывает, что формально вектора, представляющие выходные сигналы, могут располагаться на оси ординат в любом натуральном линейном порядке и это не нарушит свойство геометрических образов "различаться".

Теорема 2.5. Пусть $\alpha = \{\rho_i^a\}_{i \in I}$ - семейство попарно различных автоматных отображений вида $\rho_i^a : X^* \to Y$ и h - взаимно-однозначное отображение вида h: $Y \to U$ для некоторого множества U . Тогда семейство $\beta = \{\rho_i^\beta\}_{i \in I}$, где для каждого $i \in I$

$$\rho_i^\beta = \{(p, u) : p \in X^* \,\&\, u \in U \,\&$$

$$\&(\exists y \in Y)\,(p, y) \in \rho_i^\alpha \,\&\, h(y) = u\,\}\,, \qquad (2.3)$$

является семейством попарно различных автоматных отображений.

3. Клеточное представление геометрических образов автоматных отображений

При практическом использовании автоматных моделей для реальных систем конкретный входной и выходной сигналы представляются не отдельными точками геометрического образа, а определяемыми средствами контроля и диагностирования областями их значений.

Разработан метод преобразования геометрической кривой в ломаную линию с последующим представлением кривой специальным кодом.

Пусть на геометрической кривой линии L , аналитически заданной уравнением y = f(x) , рассматривается размещение пар из автоматного отображения

$$\rho_{s_0}^A = \bigcup_{px \in X^* X} \{(px, \lambda(\delta(s_0, p), x))\},$$

соответствующего автомату A = (S, X, Y, δ, λ, s0).

Предположим, что используется область Q из общего задания кривой линии L и в этой области вторые координаты точек линии L расположены в отрезке $[\alpha, \beta]$.

В качестве клетки на плоскости будем рассматривать область, ограниченную прямоугольником со сторонами размерности d1 и d2, параллельными осям абсцисс и ординат в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости.

На рис. 3.1 показаны правила построения кода для расположения ориентированной геометрической кривой в выбранной и зафиксированной на плоскости сетке.

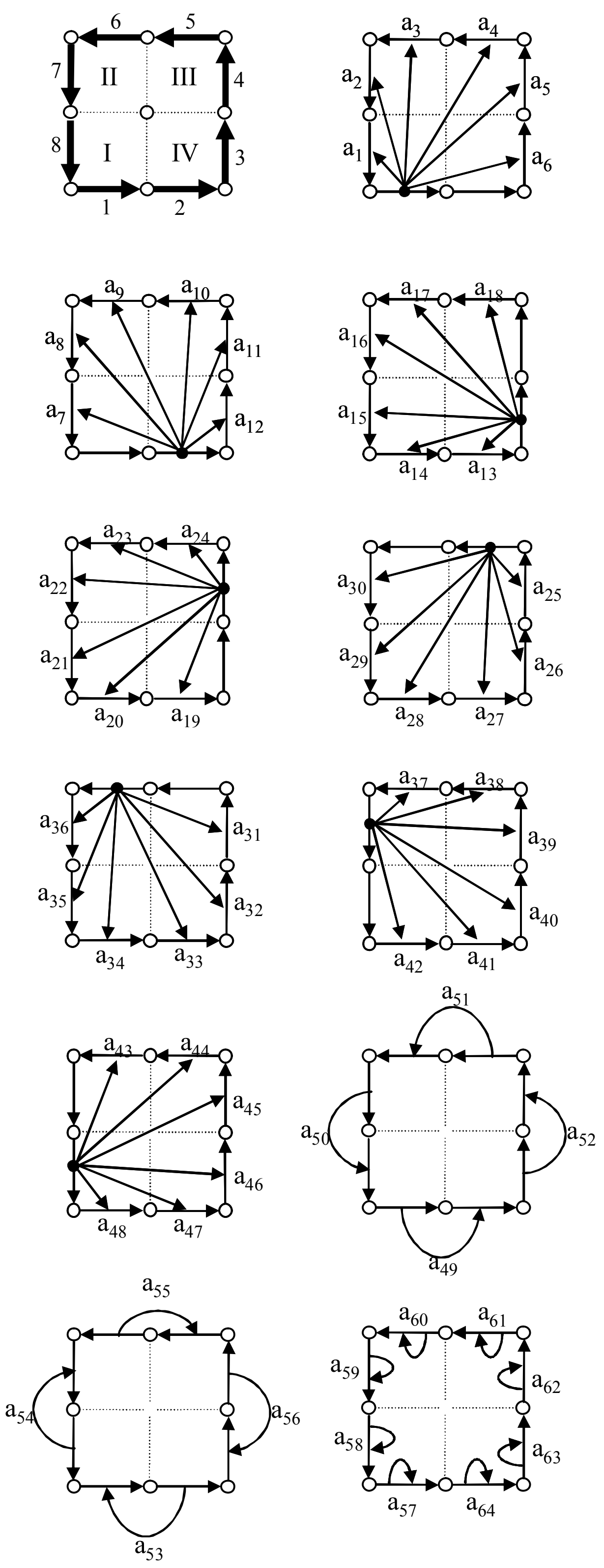

Рис. 3.1. Схемы, определяющие правила кодирования вариантов пересечений ориентированной кривой с периметрами клеток

Периметр каждой клетки разбит на 8 ориентированных полуинтервалов с указанными для них номерами (первое изображение в схеме на рис. 3.1).

Каждая точка периметра принадлежит точно одному из 8 полуинтервалов.

Каждые "вход" и "выход" кривой в клетку кодируется знаком из множества знаков {a1 , a2, … , a64}.

В результате геометрическая кривая оказывается представленной кодом вида

$$\xi = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_C}.$$

Все варианты "входа" и "выхода" кривой в клетку представляются отдельными кодовыми знаками. Такой код геометрической кривой принципиально расширяет возможности учета погрешностей в определении значений входных и выходных сигналов для реальных систем.

Литература

1. Твердохлебов, В.А. Техническое диагностирование в геометрической интерпретации задач, моделей и методов [Текст] / В.А. Твердохлебов // Автоматизация проектирования дискретных систем, 1995 г. : [материалы международной конференции] / Белорус. гос. ун-т, Ин-т техн. кибернетики АНБ. – Минск : [Изд-во Белорус. гос. ун-та], 1995. – Т. 1, – С. 97.

2. Твердохлебов В.А. Геометрические образы законов функционирования автоматов [Текст] / В.А. Твердохлебов .– Саратов: Издательство «Научная книга», 2008. – 183 с. –ISBN 978-5-9758-0924-7.

3. Твердохлебов В.А. Представление автоматных отображений геометрическими структурами: Монография [Текст] / В.А. Твердохлебов, А.С. Епифанов. – Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2013. – 204 с. – ISBN 978-5-9999-1483-5.

4. Безопасность критических инфраструктур: математические и инженерные методы анализа и обеспечения [Текст] / Под ред. В.С. Харченко. – Харьков: Изд-во Национального аэрокосмического университета им. Н.Е.Жуковского "ХАИ", 2011. – 641 с. – [Резчиков А.Ф., Твердохлебов В.А. – С. 10 – 51; Твердохлебов В.А. – С. 52-75; Твердохлебов В.А., Епифанов А.С. – С. 76 – 143].

Поступила в редакцию 14.02.2013, рассмотрена на редколлегии 13.03.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ АВТОМАТНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

В.О. Твердохлебов

Дискретні детерміновані динамічні системи у формі автоматів використовуються як моделі реальних систем. Традиційні способи завдання автоматів не дозволяють визначати складні реальні системи, орієнтовані на символьні структури і ізольовані від застосування розвиненого апарату безперервної числової математики, а також не є конструктивними при завданні автомата з великим числом станів. У статті приводяться основні теореми для нового геометричного представлення автоматних відображень, що дозволяє конструктивно використовувати автоматні моделі з рахунково-нескінченним безліччю станів і застосовувати до них апарат безперервної числової математики.

Ключові слова: автоматне відображення, геометричний образ автоматного відображення, лінійний порядок, геометрична крива, графік геометричного образу.

BASIC THEOREMS FOR CONSTRUCTION OF GEOMETRIC IMAGE OF AUTOMATONS MAPPIINGS

V.A. Tverdokhebov

Discrete determined dynamic system in automaton form is used as models of real systems. Traditional approaches to representation of automatons don't allows to define complex real systems, are oriented on symbolic structures and isolated from developed apparatus of continuous numerical mathematics, and also are not constructive at representation of automatons with large number of states. In paper are presented basic theorems for new geometrical representation of automata mappings, what allows to constructively used automatons models with enumerable - infinite set of states and apply to them apparatus of continuous numerical mathematics.

Key words: automata mapping, geometrical image of automata mapping, linear order, geometrical curve, graphic of geometrical image.

Твердохлебов Владимир Александрович – д-р техн. наук, проф., главный научный сотрудник Института проблем точной механики и управления РАН, e-mail: TverdokhlebovVA@list.ru.