УДК 517.27

О. М. ПРОХОРОВА

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

О ВКЛАДЕ К. ВЕЙЕРШТРАССА В ТЕОРИЮ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье впервые исследованы необходимые и достаточные условия существования максимума и минимума функций многих переменных, а также задачи на экстремум, изложенные в лекциях по высшей математике К. Вейерштрассом. Установлено, что К. Вейерштрасс продолжил дело введения в математику повышенной строгости, начатое К. Гауссом, О. Коши, Х. Абелем и Б. Больцано. Выяснено, что им впервые дано определение экстремума функции многих переменных с привлечением понятия окрестности точки в том виде, в котором оно встречается во всех современных учебниках высшей математики и математического анализа. Благодаря работам К. Вейерштрасса обоснование и арифметизация математического анализа вышли, таким образом, на новый, более высокий, уровень развития.

Ключевые слова: *оптимизация, экстремум функции: двух переменных, многих переменных; условия экстремума: необходимые, достаточные; точки экстремума; точки: максимума, минимума.*

Введение

Актуальность данной темы определяется тем, что содержательно всякая задача исследования операций является оптимизационной. Часто задачи оптимизации могут быть сведены к задачам математического программирования. Задачи математического программирования, в свою очередь, являются математическими моделями многочисленных задач технического и экономического содержания. Например, в технике это выбор оптимального проекта или оптимальной конструкции. Так задача определения оптимальных параметров турбореактивных двигателей может быть сведена к многокритериальной задаче параметрической оптимизации [1]. В настоящее время для решения задач оптимизации используются алгоритмы, связанные с нахождением экстремумов функций нескольких переменных [2, 3]. К задачам линейного программирования сводятся и некоторые задачи прикладной теории игр.

Теория экстремумов функций многих переменных, как часть математического анализа, относится к математическим основам исследования операций. В общем виде задачу математического программирования можно записать, как известно, следующим образом: максимизировать целевую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ на допустимом множестве G, где G задается системой

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, (x_1, \dots, x_n) \in X,$$

где X - некоторое подмножество $\mathbb{R}^n$. Таким образом, многие задачи оптимизации являются фактически задачами на условный экстремум функции многих переменных.

Эта статья продолжает исследования автора о развитии теории экстремумов функций многих переменных в 19 веке [4]. В ней показано, что О. Коши внес существенный вклад в эту теорию, а также установлено, что он впервые в задаче на экстремум функции многих переменных фактически применил критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм.

Коши вместе со своими современниками К. Гауссом, Н.-Х. Абелем, Б. Больцано, принадлежит к пионерам в деле введения в математику повышенной строгости. Восемнадцатое столетие в основном было периодом эксперимента, когда новые результаты появлялись в изобилии. Математики того времени не слишком заботились об обосновании своих результатов. Обоснованиями, правда, занимались Л. Эйлер и Ж.-Л. Лагранж, но их аргументы не всегда были убедительны. Однако и после попыток Коши в этом деле оставалось много «белых пятен», подавляющее большинство его работ носит по мере развития эскизный характер [5].

В работах Коши наметилась та арифметизация анализа, которая станет позже сутью исследований К. Вейерштрасса. С К. Вейерштрасса начинается то сведение принципов математического анализа к простейшим арифметическим понятиям, которое мы и называем арифметизацией математики.

Особый интерес представляют лекции К. Вейерштрасса. Главным образом благодаря этим лекциям его идеи стали общим достоянием математиков, поскольку большинство его работ было опубликовано после смерти [6]. В историко-математической литературе известен вклад К. Вейерштрасса в математический анализ, теорию аналитических функций, вариационное исчисление, дифференциальную геометрию и линейную алгебру [7 - 9]. Славу ему принесла, как известно, исключительная тщательность рассуждений, которую называют теперь «вейерштрассовой строгостью». В частности, он разъяснил понятие экстремума. Однако историками математики его лекции не изучались с точки зрения теории экстремумов функций многих переменных.

Именно в лекциях К. Вейерштрасса впервые представлены определение экстремума функций многих переменных и необходимые и достаточные условия его существования в том виде, в котором они сейчас входят в учебники по высшей математике и математическому анализу [10, 11].

Постановка задачи исследования

Целью статьи является исследование условий максимума и минимума функций многих переменных, данных в лекциях К. Вейерштрассом, и сравнение его результатов с изложением данной тематики в современных учебниках по высшей математике и математическому анализу. Метод исследования - историко-научный анализ первоисточника, позволяющий научные результаты, полученные в 19 веке, оценить с позиций современного математического анализа.

Теория экстремумов функций многих переменных в лекциях К. Вейерштрасса

Достаточные условия существования экстремума функции многих переменных впервые с должной полнотой исследованы К. Вейерштрассом во второй половине 19 века. Результаты, полученные им, К. Вейерштрасс изложил в своих лекциях, которые он регулярно читал в Берлинском университете в 1865-1889 гг. Опубликованы они много позднее, в 1927г. [6]. Эти лекции состоят из двух больших разделов.

Содержание лекций К. Вейерштрасса

Отдел первый «Теория максимума и минимума функций одной и нескольких переменных» занимает шесть глав (главы 1-6).

Во втором отделе (главы 7-31) излагается вариационное исчисление.

Предметом исследования данной статьи является первый отдел.

Исследование первого отдела лекций

В первой главе речь идет о функциях одной переменной, даются необходимые и достаточные условия существования экстремума таких функций.

Здесь впервые появляется определение экстремума функции многих переменных с привлечением понятия окрестности точки в том виде, в котором оно вошло в современные учебники математического анализа и сохраняется в них по сей день. В дальнейшем сохранены обозначения К. Вейерштрасса.

«Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n переменных имеет в точке $(a_1, a_2, ..., a_n)$ максимум (минимум), если можно подобрать систему бесконечно малых величин $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ так, что будет выполняться неравенство

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_n + h_n) - \\ - f(a_1, a_2, ..., a_n) < 0 \ \ (>0)$$

для любых h_1, h_2, ..., h_n, удовлетворяющих неравенствам

$$|h_1| < \delta_1, \quad |h_2| < \delta_2, \quad ..., \quad |h_n| < \delta_n .\text{»} \ [6, \text{с. } 4\text{-}5].$$

По мнению К. Вейерштрасса, изложенному во введении к лекциям, для исследования достаточных условий существования экстремума функции многих переменных существенно требуется алгебраический аппарат, а именно, критерий положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм. Он появился только в 19 веке (1852) и стал основным инструментом для четкого различения максимумов и минимумов функций нескольких переменных.

В начале второй главы говорится о приведении квадратичной формы к сумме квадратов и формулируется критерий положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм.

Затем К. Вейерштрасс записывает приращение функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(a_1, a_2, ..., a_n)$ в виде

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_n + h_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) = \\ = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} f(a_1 + \varepsilon h_1, a_2 + \varepsilon h_2, ..., a_n + \varepsilon h_n)_{\lambda\mu} h_\lambda h_\mu$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, ..., n),$$

где ε - величина, заключенная между 0 и 1, а $h_1, h_2, ..., h_n$ - произвольные величины, абсолютные значения которых не превосходят некоторых границ. Предполагая, что не все $f(a_1, a_2, ..., a_n)_{\lambda\mu}$

равны нулю, получаем, что минимум функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(a_1, a_2, ..., a_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда величина, стоящая в этой формуле справа, при всех значениях $h_1, h_2, ..., h_n$, удовлетворяющих указанному ограничению, положительна. Следовательно, квадратичная форма

$$\sum_{\lambda}\sum_{\mu} f(a_1, a_2, ..., a_n)_{\lambda\mu} h_\lambda h_\mu$$

должна быть положительной для всех таких $h_1, h_2, ..., h_n$.

В результате, чтобы решить, является ли значение функции $f(x_1, ..., x_n)$ в точке $x_1 = a_1, \ ..., \ x_n = a_n$ максимумом или минимумом, К. Вейерштрасс раскладывает функцию $f(x_1, ..., x_n)$ в окрестности точки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ в ряд Тейлора до членов второго порядка включительно. Тогда все члены первого порядка должны обратиться в нуль, в силу необходимых условий экстремума. Если члены второго порядка образуют квадратичную форму, которая может принимать только положительные значения и обращаться в нуль только тогда, когда все переменные равны нулю, то имеет место минимум. Если квадратичная форма принимает только отрицательные значения и обращается в нуль только в случае, если все переменные равны нулю, то в точке $(a_1, a_2, ..., a_n)$ функция $f(x_1, ..., x_n)$ будет иметь максимум. Если эти условия не выполняются, то квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения. В этом случае экстремума не будет.

Пусть

$$h_1 = c_1, \quad h_2 = c_2, \quad ..., \quad h_n = c_n -$$

система значений, для которых квадратичная форма положительна;

$$h_1 = c_1', \quad h_2 = c_2', \quad ..., \quad h_n = c_n' -$$

система значений, для которых квадратичная форма отрицательна.

Положим

$$h_1 = c_1 h, \quad h_2 = c_2 h, \quad ..., \quad h_n = c_n h$$

для некоторого h, и вычислим приращение функции $f(x_1, ..., x_n)$ для этих значений

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_n + h_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) = \\ = C_2 h^2 + C_3 h^3 + ... ,$$

где коэффициент при h^2 имеет вид

$$C_2 = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} f(a_1, a_2, ..., a_n)_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, ..., n),$$

а

$$f(a_1, a_2, ..., a_n)_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta,$$

$$x^0 = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

и является рассматриваемой квадратичной формой.

«Если h достаточно мало по модулю, то знак ряда зависит от коэффициента при h^2 . Для величин c_α имеем положительный знак этой квадратичной формы, для величин c_α' - отрицательный. Из этого следует, что рассматриваемая функция $f(x_1, ..., x_n)$ в точке $(a_1, a_2, ..., a_n)$ не имеет ни максимума, ни минимума» [6, с.24].

Остается рассмотреть случай, когда квадратичная форма второго порядка сохраняет знак, но может обратиться в нуль, если сами переменные не все равны нулю. В этом случае, как замечает К. Вейерштрасс, для определения максимума или минимума здесь потребуются дополнительные исследования.

В современных учебниках математического анализа этот особый случай не рассматривается [10, 11]. Однако его не оставили без внимания математики 19 века. Этот особый случай не изучен историками математики, поэтому автор предполагает посвятить ему отдельное исследование.

В остальных главах первого отдела исследуются на экстремум квадратичные формы, что не является объектом изучения данной статьи.

Выводы

Впервые в историко-математической литературе проанализировано изложение теории экстремумов функций многих переменных в лекциях К. Вейерштрасса. Установлено, что К. Вейерштрассом впервые дано определение экстремума функций многих переменных на языке «ε, δ» в том виде, в котором оно входит во все современные учебники математического анализа [10, 11]. Выяснено также, что им с математической точки зрения строго сформулированы и аргументированы все положения теории экстремумов функций многих переменных. Изучение экстремальных задач, а вместе с тем, и экстремумов функций многих переменных, обусловлено большим спектром приложений на практике в математических моделях различных практических задач. В связи с этим этот раздел математического анализа всегда присутствует в учебниках по высшей математике и является неотъемлемой частью курса высшей математики в высших учебных заведениях для студентов различных специальностей.

Литература

1. Меняйлов, А. В. Применение эволюционных методов решения задач оптимизации компрессоров газотурбинных двигателей [Текст] / А. В. Меняйлов, А. А. Трончук, Е. М. Угрюмова // Авиационно-космическая техника и технологии. – 2008. – № 5(52). – С. 59-65.

2. Karakasis, M. K. Aerodynamic Design of Compressor Airfoils using Hierarchical Algorithms [Text] / M. K. Karakasis, K. C. Giannakoglu, D. G. Koubogiannis // Conference Proceedings of the 7-th European Conference on Turbomachinery. – Athens (Greece), 2007. – P. 567-576.

3. Li, Yi-Guang. Small-Scale Gas Turbine Performance Improvement Approach [Text] / Yi-Guang Li // Abstracts Book and CD-ROM Proceedings of the 18-th International Symposium on Air Breathing Engines. – Beijing (Chine). – 2007. – 9 p. (ISABE Paper No. 2007 – 1374).

4. Прохорова, О. М. Теория экстремумов функций многих переменных в учебнике О. Коши по дифференциальному исчислению [Текст] / О. М. Прохорова // Вісник ХНАУ. – 2014. – № 7. – С. 164 – 168.

5. Клейн, Ф. Лекции о развитии математики в 19 столетии [Текст] / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1989 – Т. 1. – 453 с.

6. Weierstrass, K. Mathematische Werke von Karl Weierstrass [Text] / K. Weierstrass. – Berlin : Mayer & Müller, 1927. – Bd. 7. – 700 p.

7. Бородин, А. И. Выдающиеся математики [Текст] / А. И. Бородин, А. С. Бугай. – Киев : Радянська школа, 1987. – 656 с.

8. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики [Текст] / Д. Я. Стройк. – М. : Наука, 1990. – 256 с.

9. Cantor, M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik [Text] / M. Cantor. – Leipzig, 1908. – 1113 p.

10. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Текст] / Л. Д.Кудрявцев. – М. : Наука, 1990. – Т. 2. – 444 с.

11. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 1. – 616 с.

Поступила в редакцию 3.09.2015, рассмотрена на редколлегии 11.09.2015

ПРО ВНЕСОК К. ВЕЙЄРШТРАСА В ТЕОРІЮ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

О. М. Прохорова

У статті вперше досліджуються необхідні та достатні умови існування максимуму та мінімуму функцій багатьох змінних, а також задачі на екстремум, що викладено в лекціях К. Вейєрштрасса. Виявлено, що К. Вейєрштрасс продовжив справу введення до математики підвищенної точності, що розпочато К. Гауссом, О. Коши, Х. Абелем та Б. Больцано. З`ясовано, що він вперше надав визначення екстремуму функції багатьох змінних зі застосуванням окола точки у тому вигляді, в якому воно зараз зустрічається в усіх сучасних підручниках з вищої математики та математичного аналізу. Завдяки працям К. Вейєрштрасса обгрунтування та арифметизація математичного аналізу вийшли, таким чином, на новий, більш високий рівень розвитку.

Ключові слова: оптимізація; екстремум функії: двох, багатьох змінних; умови екстремуму: необхідні, достатні; точки екстремуму; точки: максимуму, мінімуму.

WEIERSTRASS`S CONTRIBUTION TO THE THEORY OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES EXTREMA

O. M. Prokhorova

The article investigates necessary and sufficient conditions of a maximum and a minimum of many switching variables functions, and also tasks on an extremum stated in lectures about the higher mathematical by K. Weierstrass. It is established that K. Weierstrass continued the idea of introduction the increased severity to the mathematics begun by K. Gauss, O. Cauchy, H. Abele and B. Boltsano. It is found out that they were for the first time given definition of an extremum of many switching variables function with addition of concept the vicinity of a point in the form of which it occurs in all modern textbooks of the higher mathematical and the mathematical analysis. Thanks to K. Weierstrass's works, justification and arithmetization of the mathematical analysis came out on the new, higher level of development.

Key words: optimization; extremum of function: two, many variables; conditions of extremum: necessary, sufficient; points of extremum; points: maximum, minimum.

Прохорова Ольга Михайловна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.