УДК 517.956

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ В РАДИОТЕХНИКЕ

ФИЛИПКОВСКАЯ М. С.

Доказывается теорема существования и единственности глобального решения переопределенной системы дифференциально-алгебраических уравнений. Векторная форма системы имеет вид полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения с сингулярным характеристическим пучком операторов. Для нелинейной правой части уравнения не требуется выполнения ограничения типа глобального условия Липшица. Исследуется модель радиотехнического фильтра с нелинейными элементами и указываются ограничения, которые обеспечивают гладкую эволюцию состояний в течение сколь угодно большого временного периода.

1. Введение

Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений, векторная форма которой имеет вид дифференциально-алгебраического уравнения (ДАУ) с выделенной линейной частью и сингулярным характеристическим пучком операторов. Предполагается, что система уравнений переопределена, т.е. число уравнений больше числа неизвестных.

Дифференциально-алгебраические уравнения возникают в теплофизике, радиотехнике, экономике, теории управления, при математическом моделировании различных систем и процессов. Дифференциальные уравнения такого типа называют также вырожденными, сингулярными, алгебро-дифференциальными, дескрипторными. В настоящей статье под сингулярной системой дифференциально-алгебраических уравнений понимается ДАУ с сингулярным характеристическим пучком операторов.

Разрешимость ДАУ в случае регулярного характеристического пучка исследовалась многими авторами (см. монографию [1] и библиографию в ней). Для сингулярных линейных дифференциально-алгебраических уравнений классические результаты принадлежат Л. Кронекеру [2]. Локальная разрешимость сингулярных полулинейных дифференциальных уравнений исследована в статье [3]. Известны теоремы о глобальной разрешимости ДАУ с регулярным характеристическим пучком операторов, которые содержат ограничения, эквивалентные глобальным условиям Липшица [1].

Целью работы является получение условий существования и единственности глобального решения сингулярного дифференциально-алгебраического уравнения. Эта задача представляет интерес для теории динамических систем и приложений, поскольку наличие глобального по времени решения гарантирует длительное время жизни соответствующей реальной системы.

Стоит отметить, что на нелинейную правую часть рассматриваемого уравнения не накладываются ограничения типа глобальных условий Липшица. Отказ от подобных ограничений обусловлен тем, что во многих прикладных задачах радиотехники, электроники, математической экономики и т. д. реальные нелинейности не являются глобально липшицевыми.

В качестве приложения рассматривается обратная задача для математической модели нелинейного двухполюсного радиотехнического фильтра.

2. Блочные представления сингулярного пучка и его компонент

Пусть даны линейные операторы $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^n$ – вещественное n-мерное пространство), которым соответствуют $(m\times n)$-матрицы A, B.

Введем комплексные расширения $\hat{A}$, $\hat{B}$ операторов A, B, действующие из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Пучок $\lambda A + B$ является регулярным, если множество $\rho(\hat{A},\hat{B}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda\hat{A}+\hat{B})^{-1} \in L(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)\}$ регулярных точек соответствующего комплексного пучка $\lambda\hat{A}+\hat{B}$ нетривиально ($\mathbb{C}^n$ – комплексное n-мерное пространство, $L(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)$ – пространство ограниченных линейных операторов из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$). В противном случае, т.е. при $\rho(\hat{A},\hat{B}) = \varnothing$, пучок называется сингулярным.

Рассмотрим сингулярный пучок операторов $\lambda A + B$, у которого ранг (наибольший из порядков миноров, не равных тождественно нулю [2]) $r(A,B) = rg(\lambda A + B) = n < m$. Это значит, что у соответствующего пучка матриц $\lambda A + B$ строки линейно-зависимы и уравнение

$$(\lambda A^T + B^T)y = 0, \qquad (1)$$

где $\lambda A^T + B^T$ – транспонированный пучок размера $n \times m$, имеет хотя бы одно ненулевое решение. Достаточно рассмотреть лишь те решения $y(\lambda)$, которые являются полиномами от λ:

$$y(\lambda) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \lambda^i y_i,\ \ y_i \ne 0,\ \ i = \overline{1,k},$$

где $k \le n$ – степень решения $y(\lambda)$. Условие $(\lambda A^T + B^T)y(\lambda) = 0$ равносильно набору равенств

$$B^T y_0 = 0, B^T y_1 = A^T y_0, ..., B^T y_k = A^T y_{k-1}, A^T y_k = 0.$$

Системы векторов $\{y_i\}_{i=0}^k$, $\{B^T y_i\}_{i=1}^k$ линейно-независимы и образуют базисы, относительно которых матрица индуцированного пучка $\lambda A_X^T + B_Y^T = \lambda A^T + B^T : Y \to X$, где $Y = \mathrm{Lin}\{y_i\}_{i=0}^k \subset \mathbb{R}^m$, $X = \mathrm{Lin}\{B^T y_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, будет канонической клеткой Кронекера $L_k = (l_{ij})$ размера $k\times(k+1)$, у которой все элементы нулевые, кроме $l_{ii} = \lambda$, $l_{i,i+1} = 1$, $i = \overline{1,k}$ [2]. Среди всех решений уравнения (1) выберем линейно-независимые. Если в выбранном наборе имеются решения, не зависящие от

λ, то возьмем их в качестве новых базисных, тогда соответствующие столбцы матрицы $\lambda A^T + B^T$, определяющей оператор $\lambda A^T + B^T$ в новом базисе, будут состоять из нулей. Оставшиеся линейно-независимые решения уравнения (1) обозначим через $y_1(\lambda), y_2(\lambda),..., y_d(\lambda)$. Отметим, что линейно-независимые решения уравнения (1) определяются с точностью до скалярных множителей. Коэффициенты при степенях λ решений $\{y_i(\lambda)\}_{i=1}^d$ являются линейно-независимыми векторами и их можно взять в качестве новых базисных векторов в R^m.

Согласно [2] сингулярный пучок матриц $\lambda A + B$ размера $m \times n$ и ранга $r(A,B) = n$ $(n < m)$ всегда может быть приведен к каноническому квазидиагональному виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ L_{k_1}^T & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & L_{k_d}^T & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda\tilde{A} + \tilde{B} \end{pmatrix},$$

где количество первых нулевых строк совпадает с количеством линейно-независимых постоянных решений уравнения (1), транспонированные канонические клетки Кронекера $L_{k_j}^T$ расположены в порядке возрастания степеней k_j ($0 < k_1 \le k_2 \le \dots \le k_d$, $k_1 + k_2 + \dots + k_d \le n$), соответствующих линейно-независимым решениям $y_j(\lambda)$, $j = \overline{1,d}$, $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$ – регулярный пучок.

Таким образом, сингулярный операторный пучок $\lambda A + B$ имеет блочное представление

$$\begin{pmatrix} \lambda\tilde{A}_s + \tilde{B}_s & 0 \\ 0 & \lambda\tilde{A}_r + \tilde{B}_r \end{pmatrix},$$

где $\lambda\tilde{A}_s + \tilde{B}_s$ – чисто сингулярный пучок, т. е. от него нельзя отделить регулярный блок, а $\lambda\tilde{A}_r + \tilde{B}_r$ – регулярный пучок. Ясно, что выбирая базисы в R^n и R^m необходимым образом, можно получить аналогичное блочное представление соответствующего пучка матриц $\lambda A + B$ с одноименными матричными компонентами $\tilde{A}_s$, $\tilde{B}_s$, $\tilde{A}_r$, $\tilde{B}_r$.

Существуют разложения пространств R^n, R^m в прямые суммы подпространств

$$R^n = X_s \dot{+} X_r, \quad R^m = Y_s \dot{+} Y_r, \tag{2}$$

относительно которых индуцированные пучки

$$\lambda A_s + B_s = \lambda A + B : X_s \to Y_s, \tag{3}$$

$$\lambda A_r + B_r = \lambda A + B : X_r \to Y_r \tag{4}$$

являются чисто сингулярным и регулярным соответственно. Подобное представление в [3] названо RS-расщеплением пучка. Введем две пары взаимно дополнительных проекторов $S : R^n \to X_s$, $P : R^n \to X_r$ и $F : R^m \to Y_s$, $Q : R^m \to Y_r$ на подпространства из разложений (2), $E_{R^n} = S + P$, $E_{R^m} = F + Q$. Пары подпространств (X_s, Y_s), (X_r, Y_r) инвариантны относительно операторов A, B, то есть $QA = AP, QB = BP, FA = AS, FB = BS$.

Сингулярное пространство Y_s разлагается в прямую сумму подпространств $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}$ таких, что

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{s1} \\ 0 \end{pmatrix} : X_s \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \quad B_s = \begin{pmatrix} B_{s1} \\ B_{s2} \end{pmatrix} : X_s \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \tag{5}$$

где $A_{s1} \in L(X_s, Y_{s_1})$ имеет обратный оператор $A_{s1}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$. Обозначим через $\tilde{F}_k : Y_s \to Y_{s_k}$ проекторы на подпространства Y_{s_k} и через $F_k = \tilde{F}_k F : R^m \to Y_{s_k}$, $k = 1,2$, – расширения операторов $\tilde{F}_k$, $F = F_1 + F_2$, $F_1 F_2 = F_2 F_1 = 0$, $A_{s1} = F_1 A|_{X_s}$, $B_{sk} = F_k B|_{X_s}$, $k = 1,2$, $F_2 A = 0$.

Пусть $\lambda A_r + B_r$ – регулярный пучок индекса 1, т.е. выполнено ограничение

$$\exists C_1 > 0\, \exists C_2 > 0 : \left\|(\lambda A_r + B_r)^{-1}\right\| \le C_1, \ |\lambda| \ge C_2. \tag{6}$$

Тогда существуют вещественные спектральные проекторы $\tilde{P}_k : X_r \to X_k$, $\tilde{Q}_k : Y_r \to Y_k$, $k = 1,2$, которые могут быть вычислены контурным интегрированием и расщепляют пространства X_r, Y_r в прямые суммы подпространств $X_r = X_1 \dot{+} X_2$, $Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2$ [4]. Операторы индуцированных пучков $\lambda A_k + B_k = \lambda A_r + B_r : X_k \to Y_k$, $k = 1,2$ таковы, что $A_2 = 0$, существуют $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$ и $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$. Обозначим через $P_k = \tilde{P}_k P : R^n \to X_k$, $Q_k = \tilde{Q}_k Q : R^m \to Y_k$ расширения проекторов $\tilde{P}_k, \tilde{Q}_k$, $k = 1,2$, $P = P_1 + P_2$, $Q = Q_1 + Q_2$, при этом для расширенных проекторов сохраняются свойства исходных: $Q_k A = AP_k$, $Q_k B = BP_k$, $k = 1,2$.

3. Постановка задачи и дополнительные построения

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x), \tag{7}$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \ge 0), \tag{8}$$

где x, $x_0 \in R^n$, $f(t,x) : [0,\infty) \times R^n \to R^m$ – непрерывная функция, $A, B : R^n \to R^m$ – линейные операторы, которым соответствуют $(m \times n)$-матрицы A, B.

Влияние левой части уравнения (7) определяется свойствами характеристического пучка операторов $\lambda A+B$. Предполагается, что сингулярный пучок $\lambda A+B$ имеет ранг $r(A,B)=n<m$. Тогда пространства R^n, R^m допускают разложения (см. п. 2)

$$R^n = X_s \dot{+} X_r = X_s \dot{+} X_1 \dot{+} X_2,$$
$$R^m = Y_s \dot{+} Y_r = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \dot{+} Y_r, \tag{9}$$

такие, что пучок $\lambda A+B$ расщепляется на сингулярную компоненту (3), операторы которой имеют блочные представления (5), и регулярную компоненту (4). Предполагается, что $\lambda A_r + B_r$ – регулярный пучок индекса 1. Как в п. 2, вводятся проекторы из R^n и R^m на соответствующие подпространства в разложениях (9).

Относительно разложения (9) пространства R^n любой вектор $x \in R^n$ единственным образом представим в виде суммы

$$x = x_s + x_1 + x_2, \tag{10}$$
$$x_s = Sx \in X_s,\quad x_k = P_k x \in X_k,\quad k=1,2.$$

Обозначим $\dim X_s = q$, $\dim X_1 = a$, $\dim X_2 = d$, $q+a+d=n$. Пусть $\{s_i\}_{i=1}^q$, $\{p_i\}_{i=1}^a$, $\{p_{a+i}\}_{i=1}^d$ – базисы подпространств X_s, X_1, X_2 соответственно. Базисы выбираются так, чтобы относительно них матрицы A_s, B_s сингулярной компоненты пучка $\lambda A+B$ имели вид (5). Объединение базисов подпространств X_s, X_1, X_2 является базисом пространства $R^n = R^q \times R^a \times R^d$ и для любого вектора $x \in R^n$ из разложения

$$x = \sum_{i=1}^{q} w_i s_i + \sum_{i=1}^{a} z_i p_i + \sum_{i=1}^{d} v_i p_{a+i}$$

по этому базису вытекает представление: $x = \begin{pmatrix} w \\ z \\ v \end{pmatrix}$,

где $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{pmatrix} \in R^q$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_a \end{pmatrix} \in R^a$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in R^d$.

Указанное разложение вектора x определяет операторы $S_q : R^q \to X_s$, $P_a : R^a \to X_1$, $P_d : R^d \to X_2$, для которых, очевидно, существуют обратные операторы $S_q^{-1} : X_s \to R^q$, $P_a^{-1} : X_1 \to R^a$, $P_d^{-1} : X_2 \to R^d$, и компоненты вектора x в разложении (10) имеют вид

$$x_s = S_q w,\quad x_1 = P_a z,\quad x_2 = P_d v, \tag{11}$$

соответственно, $w = S_q^{-1} S x$, $z = P_a^{-1} P_1 x$, $v = P_d^{-1} P_2 x$.

Определение 1 [5]. *Аддитивным разложением единицы* E_Y в s-мерном линейном пространстве Y назовем любую систему одномерных проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$, $\Theta_k : Y \to Y$ ($\Theta_k^2 = \Theta_k$) таких, что $\Theta_i \Theta_j = 0$ при $i \neq j$ и $E_Y = \sum_{k=1}^{s} \Theta_k$.

Определение 2 [5]. Оператор-функция $\Phi(x) : D \to L(X,Y)$, $D \subset X$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке $\mathrm{conv}\{u,v\}$ векторов $u, v \in D$, если для любого набора векторов $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset \mathrm{conv}\{u,v\}$ и некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ в s-мерном пространстве Y оператор $\Lambda = \sum_{k=1}^{s} \Theta_k \Phi(\tilde{x}_k) \in L(X,Y)$ является обратимым так, что $\Lambda^{-1} \in L(Y,X)$.

Представим отображение $\Phi(x) : D \to L(X,Y)$ в виде матрицы в некоторых базисах s-мерных пространств X, Y:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \cdots & \Phi_{1s}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(x) & \cdots & \Phi_{ss}(x) \end{pmatrix}.$$

Определение 2 может быть сформулировано следующим образом: оператор-функция $\Phi(x)$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке $\mathrm{conv}\{u,v\}$ векторов $u, v \in D$, если для любого набора векторов $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset \mathrm{conv}\{u,v\}$ обратим оператор

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tilde{x}_1) & \cdots & \Phi_{1s}(\tilde{x}_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(\tilde{x}_s) & \cdots & \Phi_{ss}(\tilde{x}_s) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, из базисной обратимости оператор-функции $\Phi(x)$ на выпуклой оболочке $\mathrm{conv}\{u,v\}$ следует обратимость в любой точке $x \in \mathrm{conv}\{u,v\}$ ($x = \lambda v + (1-\lambda)u$, $\lambda \in [0,1]$). Обратное утверждение не верно, кроме случая, когда пространства X, Y одномерны. Приведем пример.

Пусть $X = Y = R^2$, $D = \mathrm{conv}\{u,v\}$, $u = (1,-1)^T$, $v = (1,1)^T$, $x = (x_1, x_2)^T \in D$, $\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & 1 \\ -1 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$.

Для набора векторов $\{\tilde{u}, \tilde{v}\} \subset \mathrm{conv}\{u,v\}$ оператор Λ имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 & 1 \\ -1 & \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\forall x \in D : \det\Phi(x) = x_1^2 x_2^2 + 1 \neq 0$, то $\Phi(x)$ обратима на D. Однако оператор Λ необратим для $\{\tilde{u}, \tilde{v}\} = \{u, v\}$ и, следовательно, функция $\Phi(x)$ не является базисно обратимой на D. Если же взять $u = (1,0)^T$, базисная обратимость будет иметь место.

4. Основная теорема

Введем многообразие

$$L_0 = \{(t,x) \in [0,\infty) \times R^n : (F_2 + Q_2)[Bx - f(t,x)] = 0\}.$$

Здесь и далее используются проекторы и блочные представления операторов пучка $\lambda A + B$, определенные в п. 2, 3.

Теорема. *Пусть функция* $f(t,x) \in C([0,\infty) \times R^n, R^m)$ *имеет непрерывную частную производную* $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ *всюду на* $[0,\infty) \times R^n$, $n < m$, *ранг пучка* $\lambda A + B$ *равен* n, *регулярная компонента (4) удовлетворяет (6). Пусть*

$$\forall\, t \ge 0\ \exists\, x \in R^n : (t,x) \in L_0, \tag{12}$$

и для любых $u_k \in X_2$ *таких, что* $(t, Sx + P_1 x + u_k) \in L_0$, $k = 1,2$, *функция*

$$\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \big(Q_2 f(t, Sx + P_1 x + u) \big) - B \right] P_2 \tag{13}$$

является базисно обратимым оператором $\big(\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2)) \big)$ *на выпуклой оболочке* $\operatorname{conv}\{u_1, u_2\}$. *Предположим, что проекции* $F_1 f$, $Q_1 f$ *допускают представления:*

$$\begin{aligned} F_1 f(t,x) &= K_1(t) Sx + K_2(t) P_1 x + \psi_1(t,x) + g_1(t), \\ Q_1 f(t,x) &= D_1(t) Sx + D_2(t) P_1 x + \psi_2(t,x) + g_2(t), \end{aligned} \tag{14}$$

где $K_1(t) \in C([0,\infty), L(X_s, Y_{s_1}))$,

$$K_2(t) \in C([0,\infty), L(X_1, Y_{s_1})),$$

$$D_1(t) \in C([0,\infty), L(X_s, Y_1)),$$

$$D_2(t) \in C([0,\infty), L(X_1, Y_1)),\ g_1(t) \in C([0,\infty), Y_{s_1}),$$

$$g_2(t) \in C([0,\infty), Y_1),\ \psi_1(t,x) \in C([0,\infty) \times R^n, Y_{s_1}),$$

$$\psi_2(t,x) \in C([0,\infty) \times R^n, Y_1),\ \frac{\partial}{\partial x} \psi_i(t,x),\ i = 1,2$$

непрерывны на $[0,\infty) \times R^n$. *Пусть существуют самосопряженные положительные операторы* $H_i = H_i^* > 0,\ i = 1,2$, $H_1 \in L(X_s)$, $H_2 \in L(X_1)$ *и для каждого* $T > 0$ *найдется число* $R_T > 0$ *такое, что*

$$\begin{aligned} &\big(H_1 Sx,\ A_{s1}^{-1} \psi_1(t,x) \big) + \big(H_2 P_1 x,\ A_1^{-1} \psi_2(t,x) \big) \le 0, \\ &\quad \forall (t,x) \in L_0 : 0 \le t \le T,\ \|Sx + P_1 x\| \ge R_T. \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ *существует единственное решение* $x(t)$ *задачи Коши* (7), (8) *на* $t_0 \le t < \infty$.

Доказательство. Применяя к уравнению (7) проекторы F_k, Q_k, $k = 1,2$, получаем эквивалентную систему четырех уравнений:

$$\frac{d}{dt}(F_1 A S x) + F_1 B S x = F_1 f(t,x), \tag{16}$$

$$F_2[Bx - f(t,x)] = 0, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}(A P_1 x) + B P_1 x = Q_1 f(t,x), \tag{18}$$

$$Q_2 f(t,x) - B P_2 x = 0, \tag{19}$$

в которой уравнение (17) является тождеством в силу условий теоремы.

Сужая операторы из системы уравнений (16), (18), (19) на пространства соответственно X_s, X_1, X_2 из разложения (9) и учитывая (5), получаем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(A_{s1} x_s) + B_{s1} x_s = F_1 f(t,x), \\ \frac{d}{dt}(A_1 x_1) + B_1 x_1 = Q_1 f(t,x), \\ \quad Q_2 f(t,x) - B_2 x_2 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Умножая уравнения системы (20) слева на $S_q^{-1} A_{s1}^{-1}$, $P_a^{-1} A_1^{-1}$, $P_d^{-1} B_2^{-1}$ соответственно и делая замену (11), получаем эквивалентную (20) систему:

$$\frac{dw}{dt} + S_q^{-1} A_{s1}^{-1} B_{s1} S_q w = S_q^{-1} A_{s1}^{-1} F_1 \tilde f(t,w,z,v), \tag{21}$$

$$\frac{dz}{dt} + P_a^{-1} A_1^{-1} B_1 P_a z = P_a^{-1} A_1^{-1} Q_1 \tilde f(t,w,z,v), \tag{22}$$

$$P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde f(t,w,z,v) - v = 0, \tag{23}$$

где $\tilde f(t,w,z,v) = f(t, S_q w + P_a z + P_d v)$.

Рассмотрим отображение

$$\Psi(t,w,z,v) = P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde f(t,w,z,v) - v.$$

Оно непрерывно по совокупности переменных и имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial \Psi(t,w,z,v)}{\partial (w,z)} = P_d^{-1} B_2^{-1} \frac{\partial Q_2 f(t,x)}{\partial x} (S_q\ \ P_a),$$

$$\frac{\partial \Psi(t,w,z,v)}{\partial v} = P_d^{-1} \left[B_2^{-1} \frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - P_2 \right] P_d =$$

$$= P_d^{-1} B_2^{-1} \Phi(P_d v) P_d,$$

где $\Phi(P_d v) = \Phi(u)$ – оператор-функция (13), $u = P_d v \in X_2$.

Поскольку функция $\Phi(u)$ является базисно обратимым оператором на $\operatorname{conv}\{u_1, u_2\}$ для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, x_s + x_1 + u_i) \in L_0$, $i = 1,2$, существует аддитивное разложение единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^d$ в Y_2 такое, что оператор $\Lambda_1 = \sum_{k=1}^d \Theta_k \Phi(\tilde u_k) \in L(X_2, Y_2)$ является обратимым для любого набора векторов $\{\tilde u_k\}_{k=1}^d \subset \operatorname{conv}\{u_1, u_2\}$. С помощью обратимого оператора $N = P_d^{-1} B_2^{-1} : Y_2 \to R^d$ введем в R^d систему одномерных проекторов $\hat\Theta_k = N \Theta_k N^{-1}$, которые образуют аддитивное разложение единицы $\{\hat\Theta_k\}_{k=1}^d$ в R^d. Выберем любые $v_1, v_2 \in R^d$, $\tilde v_k \in \operatorname{conv}\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1,d}$, такие, что (t,w,z,v_i), $i = 1,2$, принадлежат

$$\tilde L_0 = \big\{ (t,w,z,v) \in [0,\infty) \times R^n : (F_2 + Q_2)[B(S_q w + P_a z + P_d v) - \tilde f(t,w,z,v)] = 0 \big\}.$$

Поскольку $(t,w,z,v) \in \tilde L_0 \Leftrightarrow (t,x) \in L_0$ и для векторов $u_i = P_d v_i$, $\tilde u_k = P_d \tilde v_k$ обратим оператор Λ_1, то обратим и действующий в R^d оператор

$$\Lambda_2 = \sum_{k=1}^{d} \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} \Psi(t, w, z, \tilde{v}_k) = N\Lambda_1 P_d .$$

Таким образом, для любых v_i таких, что $(t, w, z, v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1,2$, функция $W(v) = \dfrac{\partial}{\partial v}\Psi(t, w, z, v)$ является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\operatorname{conv}\{v_1, v_2\}$ и, следовательно, для любой точки $(t, w, z, v) \in \tilde{L}_0$ существует обратный оператор $\left[\dfrac{\partial \Psi(t, w, z, v)}{\partial v}\right]^{-1}$.

Из (12) следует, что для любого t можно выбрать w, z, v так, что $(t, w, z, v) \in \tilde{L}_0$.

Пусть t_* – некоторая точка из $[0, \infty)$. Выберем $w_* \in R^q$, $z_* \in R^a$, $v_* \in R^d$ так, чтобы $(t_*, w_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$. В силу теорем о неявной функции [6], существуют окрестности $U_\varepsilon(v_*)$, $U = U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(w_*) \times U_{\delta_3}(z_*)$ и единственная функция $v = v(t, w, z) \in C(U, U_\varepsilon(v_*))$, непрерывно дифференцируемая по (w, z), такая, что $\Psi(t, w, z, v(t, w, z)) = 0$, $(t, w, z) \in U$ и $v(t_*, w_*, z_*) = v_*$. Данное утверждение выполнено для всех точек $(t, w, z) \in [0, \infty) \times D_{wz}$ и $v \in D_v$, где области $D_{wz} \subset R^q \times R^a$, $D_v \subset R^d$ такие, что $(S_q^{-1} S x_0, P_a^{-1} P_1 x_0) \in D_{wz}$, $P_d^{-1} P_2 x_0 \in D_v$. Определим глобальную функцию $v = \eta(t, w, z) : [0, \infty) \times D_{wz} \to D_v$ в точке (t_*, w_*, ξ_*, z_*) как $\eta(t_*, w_*, z_*) = v(t_*, w_*, z_*)$.

Рассмотрим точки $(t, w, z, v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1,2$, очевидно, $\Psi(t, w, z, v_i) = 0$. Для функции Ψ ее проекции $\Psi_k(t, w, z, v) = \hat{\Theta}_k \Psi(t, w, z, v)$, $k = \overline{1, d}$, являются функциями со значениями в одномерных пространствах $R_k = \hat{\Theta}_k R^d$, изоморфных R. Согласно формуле конечных приращений [6]: $\Psi_k(t, w, z, v_2) - \Psi_k(t, w, z, v_1) = \dfrac{\partial}{\partial v}\Psi_k(t, w, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $\tilde{v}_k \in \operatorname{conv}\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1, d}$, следовательно, $\hat{\Theta}_k \dfrac{\partial}{\partial v}\Psi_k(t, w, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $k = \overline{1, d}$, откуда получаем: $\Lambda_2(v_2 - v_1) = 0$, значит, $v_2 = v_1$ и

$$\forall (t, w, z) \in [0, \infty) \times D_{wz}\ \exists!\, v \in D_v : \Psi(t, w, z, v) = 0 . \quad (24)$$

Так как в некоторой окрестности каждой точки $(t_*, w_*, z_*) \in [0, \infty) \times D_{wz}$ существует единственное решение $v = \nu(t, w, z)$ неявного уравнения (23), непрерывное по совокупности переменных t, w, z вместе со своими частными производными по w, z, то функция $v = \eta(t, w, z)$ в этой окрестности совпадает с $\nu(t, w, z)$ и является решением уравнения (23) с соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция $v = \eta(t, w, z)$ единственная на всей области определения. Действительно, если бы существовала функция $v = \mu(t, w, z)$, обладающая в некоторой точке $(t_*, w_*, z_*) \in [0, \infty) \times D_{wz}$ теми же свойствами, что и $v = \eta(t, w, z)$, то, в силу (24), $\eta(t_*, w_*, z_*) = \mu(t_*, w_*, z_*) = v_*$, следовательно, $\eta(t, w, z) = \mu(t, w, z)$ на $[0, \infty) \times D_{wz}$.

Подставим $v = \eta(t, w, z)$ в (21), (22) и получим:

$$\frac{dw}{dt} = S_q^{-1} A_{s1}^{-1}[-B_{s1} S_q w + F_1 \tilde{f}(t, w, z, \eta(t, w, z))], \quad (25)$$

$$\frac{dz}{dt} = P_a^{-1} A_1^{-1}[-B_1 P_a z + Q_1 \tilde{f}(t, w, z, \eta(t, w, z))]. \quad (26)$$

Запишем систему (25), (26) в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1[-N_2 \omega + G(t, \omega)], \quad (27)$$

где $\omega = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$, $N_1 = \begin{pmatrix} S_q^{-1} A_{s1}^{-1} & 0 \\ 0 & P_a^{-1} A_1^{-1} \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} B_{s1} S_q & 0 \\ 0 & B_1 P_a \end{pmatrix}$, обозначение для η сохраняется, т.е. $\eta(t, \omega) = \eta(t, w, z)$, и $G(t, \omega) = \begin{pmatrix} F_1 \tilde{f}(t, \omega, \eta(t, \omega)) \\ Q_1 \tilde{f}(t, \omega, \eta(t, \omega)) \end{pmatrix}$.

В силу свойств функций $F_1 f$, $Q_1 f$ вида (14) и η, функция $G(t, \omega)$ непрерывна по совокупности переменных t, ω и непрерывно дифференцируема по ω на $[0, \infty) \times D_{wz}$. Следовательно, на некотором интервале $t_0 \le t < \varepsilon$ существует единственное решение $\omega(t)$ задачи Коши для уравнения (27) с начальным условием

$$\omega(t_0) = \omega_0, \quad \omega_0 = (w_0, z_0)^T, \quad (28)$$

$(t_0, w_0, z_0, \eta(t_0, w_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$. Заметим, что если начальная точка $(t_0, x_0) \in L_0$ и $x_0 = S_q w_0 + P_a z_0 + P_d \eta(t_0, w_0, z_0)$, то начальная точка $(t_0, w_0, z_0, \eta(t_0, w_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$.

Обозначим

$$\hat{\psi}_i(t, \omega) = \psi_i(t, (S_q, P_a)\omega + P_d \eta(t, \omega)),\ i = 1,2,$$

$$e(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix},\ N_3(t) = \begin{pmatrix} K_1(t) S_q & K_2(t) P_a \\ D_1(t) S_q & D_2(t) P_a \end{pmatrix},$$

$$\hat{\psi}(t, \omega) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(t, \omega) \\ \hat{\psi}_2(t, \omega) \end{pmatrix}.$$

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0, \infty)$ введем срезку функции $\hat{\psi}(t, \omega)$ по переменной t: $\hat{\psi}_T(t, \omega) = \begin{cases} \hat{\psi}(t, \omega), & 0 \le t \le T \\ \hat{\psi}(T, \omega), & t > T \end{cases}$. С учетом новых обозначений и представления (14) уравнение (27) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1[(N_3(t) - N_2)\omega + e(t) + \hat{\psi}_T(t, \omega)]. \quad (29)$$

Рассмотрим функцию

$$V(x_s+x_1)=\frac{1}{2}\left[(H_1x_s,x_s)+(H_2x_1,x_1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[(H_1S_q w,S_q w)+(H_2P_a z,P_a z)]=\frac{1}{2}\left(\hat{H}\omega,\omega\right)=\hat{V}(\omega),$$

где $\hat{H}=\begin{pmatrix} S_q^*H_1S_q & 0 \\ 0 & P_a^*H_2P_a \end{pmatrix}$ и H_1, H_2 – операторы из (15). Ясно, что $\hat{H}=\hat{H}^*>0$. Градиент функции $\hat{V}$ равен $\operatorname{grad}\hat{V}(\omega)=\hat{H}\omega$.

Из (15) следует, что для каждого $T>0$ найдется число $\hat{R}_T>0$ такое, что

$$\left(\hat{H}\omega,\ N_1\hat{\psi}(t,\omega)\right)\le 0,\quad 0\le t\le T,\quad \|\omega\|\ge\hat{R}_T. \tag{30}$$

Так как $\hat{H}=\hat{H}^*>0$, то существуют $\hat{H}^{-1}$ и легко показать, что $\|\omega\|^2\le\left\|\hat{H}^{-1}\right\|\left(\hat{H}\omega,\omega\right)$. Тогда

$$\left|\left(\hat{H}\omega,N_1[N_3(t)-N_2]\omega\right)\right|\le$$

$$\le\left\|\hat{H}\right\|\|N_1\|\|N_3(t)-N_2\|\left\|\hat{H}^{-1}\right\|\left(\hat{H}\omega,\omega\right).$$

Выбирая $\hat{R}_T\ge\sqrt{\left\|\hat{H}^{-1}\right\|}$, получаем оценку:

$$\left|\left(\hat{H}\omega,N_1e(t)\right)\right|\le\left\|\hat{H}\right\|^{1/2}\|N_1\|\|e(t)\|\left(\hat{H}\omega,\omega\right),\quad \|\omega\|\ge\hat{R}_T.$$

Увеличивая, если необходимо, радиус $\hat{R}_T$ в условии (30) так, чтобы выполнялось неравенство $\hat{R}_T\ge\sqrt{\left\|\hat{H}^{-1}\right\|}$, получаем оценку для производной функции $\hat{V}(\omega)$ в силу системы (29) [7], которая выполнена при всех ω таких, что $\|\omega\|\ge\hat{R}_T$ и всех $t\ge 0$:

$$\dot{\hat{V}}\Big|_{(29)}=\left(\hat{H}\omega,N_1[(N_3(t)-N_2)\omega+e(t)+\hat{\psi}_T(t,\omega)]\right)\le$$

$$\le\left|\left(\hat{H}\omega,N_1[N_3(t)-N_2]\omega\right)\right|+\left|\left(\hat{H}\omega,N_1e(t)\right)\right|\le$$

$$\le\|N_1\|\left(\left\|\hat{H}\right\|\|N_3(t)-N_2\|\left\|\hat{H}^{-1}\right\|+\left\|\hat{H}\right\|^{1/2}\|e(t)\|\right)\left(\hat{H}\omega,\omega\right)=$$

$$=k(t)\hat{V}(\omega),$$

где $k(t)=2\|N_1\|\left(\left\|\hat{H}\right\|\|N_3(t)-N_2\|\left\|\hat{H}^{-1}\right\|+\left\|\hat{H}\right\|^{1/2}\|e(t)\|\right)$ – непрерывная функция при $t\ge 0$. Так как неравенство $\dot{v}\le G(t,v)$, $t\ge 0$, где $G(t,\hat{V})=k(t)\hat{V}$, не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения, то по лемме 3.1 из [7] каждое решение $\omega(t)=(w(t),z(t))^T$ уравнения (27) неограниченно продолжаемо.

Проверим, что каждое локальное решение $\omega(t)$, $t\in[t_0,\varepsilon)$ ($t_0\ge 0$) уравнения (27) допускает единственное продолжение на всю временную полуось $t_0\le t<\infty$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $\omega(t)$ задачи Коши (27), (28) единственно на некотором интервале $t_0\le t<\varepsilon$. Предположим, что решение не единственно на $t_0\le t<\infty$. Тогда существует $t_*\ge\varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $\omega(t)$, $\hat{\omega}(t)$ с общим значением $\omega_*=\omega(t_*)=\hat{\omega}(t_*)$. Возьмем точку (t_*,ω_*) в качестве начальной (в силу свойств функции η точка $(t_*,w_*,z_*,\eta(t_*,w_*,z_*))\in\tilde{L}_0$), тогда на некотором интервале $t_*\le t<\varepsilon_1$ должно существовать единственное решение уравнения (27) с начальным значением $\omega(t_*)=\omega_*$, что противоречит предположению.

Найденные непрерывно дифференцируемые компоненты $w(t)$, $z(t)$ глобального решения $\omega(t)$ уравнения (27) однозначно определены на всей полуоси $t_0\le t<\infty$. Следовательно, функция $x(t)=S_q w(t)+P_a z(t)+P_d\eta(t,w(t),z(t))$ будет единственным решением уравнения (7) на $[t_0,\infty)$. Теорема доказана.

Замечание 1. По построению гладкость решения $x(t)$ следующая: компоненты $Sx(t)$, $P_1x(t)$ непрерывно дифференцируемы, а $P_2x(t)$ – непрерывна.

Замечание 2. Условие базисной обратимости оператор-функции $\Phi(u)$ (13) на любой выпуклой оболочке $\operatorname{conv}\{u_1,u_2\}$ можно заменить на требование обратимости в любой точке $(t,Sx+P_1x+u)\in L_0$, если вместо условия (12) потребовать, чтобы

$\forall t\ge 0\ \exists x_s\in X_s\ \exists x_1\in X_1\ \exists!\, u\in X_2:(t,x_s+x_1+u)\in L_0.$

5. Пример

Рассмотрим систему из трех уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}+x_1-x_2=I(t)-x_1^3+x_2^3, \tag{31}$$

$$x_1+x_2=I(t), \tag{32}$$

$$2x_2=x_1^3-x_2^3, \tag{33}$$

векторная форма которой имеет вид (7), где

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\0&2\end{pmatrix},\ f(t,x)=\begin{pmatrix}I(t)-x_1^3+x_2^3\\ I(t)\\ x_1^3-x_2^3\end{pmatrix},$$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathsf{R}^2,\ I(t)\in C\left([0,\infty),\mathsf{R}\right).$$

Ранг пучка $\lambda A+B$ равен 2.

Анализируя решение уравнения (1), находим пространства $X_s=\operatorname{Lin}\{s\}$, $X_r=\operatorname{Lin}\{p\}$, $Y_s=Y_{s_1}\dot{+}Y_{s_2}=\operatorname{Lin}\{g_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_1}=\operatorname{Lin}\{g_1\}$, $Y_{s_2}=\operatorname{Lin}\{g_2\}$, $Y_r=\operatorname{Lin}\{q\}$, $X_2=X_r, Y_2=Y_r$, $X_1=\{0\}$, $Y_1=\{0\}$ из разложений (9), где

$$s=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ p=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ g_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ g_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ q=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Выпишем введенные в п. 2 проекторы $S:\mathsf{R}^2\to X_s$,

$P: \mathsf{R}^2 \to X_r$, $Q: \mathsf{R}^3 \to Y_r$, $F: \mathsf{R}^3 \to Y_s$, $F_k: \mathsf{R}^3 \to Y_{s_k}$, $P_k: \mathsf{R}^2 \to X_k$, $Q_k: \mathsf{R}^3 \to Y_k$, $k = 1,2$, в координатных базисах пространств $\mathsf{R}^2, \mathsf{R}^3$:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P_2 = P, \ Q_2 = Q, \ Q_1 = 0, \ P_1 = 0.$$

Оператор $A_{s1} = F_1 A|_{X_s}: X_s \to Y_{s1}$ из представления (5) имеет обратный $A_{s1}^{-1} \in L(Y_{s1}, X_s)$. В координатных базисах пространств R^2, R^3 матрицы A_{s1}, A_{s1}^{-1} одноименных операторов принимают вид:

$$A_{s1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{s1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $QA = 0$, оператор $A_r = QA|_{X_r} = A_2$ также нулевой. Если $x_r \in X_r$, то $QBx_r = y_r \in Y_r$, причем $QBx_r = 0$ только при $x_r = 0$ и, значит, оператор $B_r = QB|_{X_r} = B_2$ обратим. Очевидно, пучок $\lambda A_r + B_r$ (4) регулярный и удовлетворяет (6).

Вычислим проекции вектора x:

$x_s = Sx = (x_1, 0)^T = (w, 0)^T$,

$P_1 x = 0$, $u = P_2 x = (0, x_2)^T = (0, v)^T$,

$w = x_1, v = x_2 \in \mathsf{R}$.

Уравнение $(F_2 + Q_2)[Bx - f(t,x)] = 0$ эквивалентно (33), которое можно записать в виде

$$2v = w^3 - v^3, \tag{34}$$

следовательно, условие (12) теоремы выполнено.

Найдем $\left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - B\right] P_2 = \left(\frac{3}{2}x_2^2 + 1\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$

рассмотрим оператор-функцию

$$\hat{\Phi}(\tilde{u}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t, x_s + \tilde{u})) - B\right] P_2 =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\tilde{v}^2 + 1\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \tilde{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \ \tilde{v} \in \mathsf{R},$$

где $\tilde{u} \in \operatorname{conv}\{u_1, u_2\}$ и $u_1, u_2 \in X_2$ удовлетворяют (34). Учитывая, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 1$, аддитивным разложением единицы в Y_2 будет сужение Θ_1 проектора Q_2 на одномерное подпространство его образов. Ясно, что сужение Λ оператора $\hat{\Lambda} = \Theta_1 \hat{\Phi}(\tilde{u}) = \hat{\Phi}(\tilde{u})$ на одномерное подпространство X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2. Следовательно, для любых $u_1, u_2 \in X_2$, удовлетворяющих (34), функция (13) является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\operatorname{conv}\{u_1, u_2\} \subset X_2$.

Представим проекцию $F_1 f(t,x)$ $(Q_1 f(t,x) = 0)$ в виде (14): $K_i(t) = 0$, $i = \overline{1,3}$, $F_1 f(t,x) = \psi_1(x) + g_1(t)$,

$$\psi_1(t,x) \equiv \psi_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_2^3 - x_1^3) \\ \frac{1}{2}(x_2^3 - x_1^3) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(t) = \begin{pmatrix} I(t) \\ I(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $A_{s1}^{-1}\psi_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_2^3 - x_1^3) \\ 0 \end{pmatrix}$. Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, что $H_1 = H_1^* > 0$, $\left(H_1 Sx, A_{s1}^{-1}\psi_1(x)\right) = x_1 x_2^3 - x_1^4$.

Проверим, что $\left(H_1 Sx, A_{s1}^{-1}\psi_1(x)\right) \le 0$ для любого $x \in \mathsf{R}^2$, удовлетворяющего (33) и такого, что $\|Sx + P_1 x\| = |x_1| \ge R_T$. Из равенства (33) следует, что $\operatorname{sign} x_1 = \operatorname{sign} x_2$ и $\left(H_1 Sx, A_{s1}^{-1}\psi_1(x)\right) = -2x_1 x_2 \le 0$. Значит, выполнено условие (15) теоремы.

Итак, по теореме для всякой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathsf{R}^2$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению (33), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (7), (8) на полуоси $t_0 \le t < \infty$.

6. Модель нелинейного двухполюсного радиотехнического фильтра

Рассмотрим следующую обратную задачу для двухполюсного радиотехнического фильтра (рисунок).

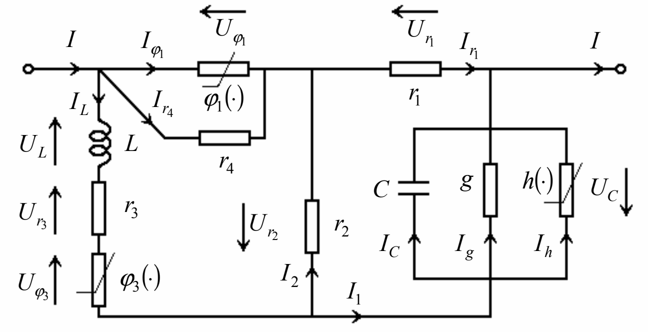

Схема электрической цепи двухполюсника

Проверим, можно ли за счет выбора входного тока $I = I(t)$ и соответствующих начальных данных обеспечить эволюцию тока I_1 внутри двухполюсника так, чтобы он равнялся наперед заданной функции $I_1 = I_1(t)$, $t_0 \le t < \infty$. Для решения этой задачи необходимо получить условия глобальной разрешимости переопределенной системы уравнений

с заданными токами $I(t)$, $I_1(t)$, которая описывает модель электрической цепи двухполюсника.
Запишем уравнения Кирхгофа и связей на элементах цепи: $I = I_{r_4} + I_{\varphi_1} + I_L$, $I_L = I_1 + I_2$, $I_1 = I_C + I_g + I_h$, $I_{r_1} = I - I_1$, $U_C = U_{r_1} + U_{r_2}$, $U_{r_1} = r_1 I_{r_1}$, $U_{r_2} = r_2 I_2$, $U_{r_3} = r_3 I_L$, $U_{\varphi_1} = \varphi_1(I_{\varphi_1})$, $U_{\varphi_3} = \varphi_3(I_L)$, $U_L + U_{r_3} + U_{\varphi_3} + U_{r_2} = U_{\varphi_1}$, $I_{r_4} = qU\varphi_1$, $q = 1/r_4$, $U_L = L\dfrac{dI_L}{dt}$, $I_C = C\dfrac{dU_C}{dt}$, $I_g = gU_C$, $I_h = h(U_C)$.
Здесь индуктивность L, емкость C, линейные сопротивления r_k, $k = \overline{1,4}$ и проводимость g являются положительными вещественными параметрами, непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ скалярные функции φ_1, φ_3 и h характеризуют нелинейные сопротивления и проводимость, заданные токи $I(t)$, $I_1(t)$ являются непрерывными при $t \ge 0$ скалярными функциями.
Выполнив элементарные преобразования из приведенных уравнений, получим систему с переменными $x_1 = I_L$, $x_2 = U_C$, $x_3 = I_{\varphi_1}$, описывающую модель цепи на рисунке:

$$L\frac{dx_1}{dt} + (r_2 + r_3)x_1 = r_2 I_1(t) + \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1), \quad (35)$$

$$C\frac{dx_2}{dt} + gx_2 = I_1(t) - h(x_2), \quad (36)$$

$$x_2 - r_2 x_1 = r_1 I(t) - (r_1 + r_2)I_1(t), \quad (37)$$

$$x_1 + x_3 = I(t) - q\varphi_1(x_3). \quad (38)$$

Векторная форма системы (35)-(38) имеет вид (7), где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_2 + r_3 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} r_2 I_1(t) + \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) \\ r_1 I(t) - (r_1 + r_2)I_1(t) \\ I(t) - q\varphi_1(x_3) \end{pmatrix}.$$

Ранг пучка $\lambda A + B$ равен 3.
Анализ решений уравнения (1) показывает, что при $L \ne C(r_2 + r_3)/g$ пространства из разложений (9) имеют вид:

$$X_r = \mathrm{Lin}\{p\},\ X_s = \mathrm{Lin}\{s_i\}_{i=1}^2,$$

$$Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = \mathrm{Lin}\{l_i\}_{i=1}^3,\ Y_{s_1} = \mathrm{Lin}\{l_i\}_{i=1}^2,$$

$$Y_{s_2} = \mathrm{Lin}\{l_3\},\ Y_r = \mathrm{Lin}\{d\},\ X_2 = X_r,\ Y_2 = Y_r,$$

$$X_1 = \{0\}, Y_1 = \{0\},$$

где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

при $L = C(r_2 + r_3)/g$: $X_r = X_1 \dot{+} X_2 = \mathrm{Lin}\{p_i\}_{i=1}^2$, $X_1 = \mathrm{Lin}\{p_1\}$, $X_2 = \mathrm{Lin}\{p_2\}$, $X_s = \mathrm{Lin}\{s\}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = \mathrm{Lin}\{l_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_1} = \mathrm{Lin}\{l_1\}$, $Y_{s_2} = \mathrm{Lin}\{l_2\}$, $Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2 = \mathrm{Lin}\{d_i\}_{i=1}^2$, $Y_1 = \mathrm{Lin}\{d_1\}$, $Y_2 = \mathrm{Lin}\{d_2\}$,

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{r_2 g}{r_2 + r_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим подробно случай, когда $L \ne C(r_2 + r_3)/g$.

Выпишем введенные в п. 2 проекторы $S: \mathbb{R}^3 \to X_s$, $P: \mathbb{R}^3 \to X_r$, $Q: \mathbb{R}^4 \to Y_r$, $F: \mathbb{R}^4 \to Y_s$, $F_k: \mathbb{R}^4 \to Y_{s_k}$, $P_k: \mathbb{R}^3 \to X_k$, $Q_k: \mathbb{R}^4 \to Y_k$, $k = 1,2$, в координатных базисах пространств $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = F_1 + F_2,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = Q,\ P_2 = P,\ Q_1 = 0,\ P_1 = 0.$$

Оператор $A_{s1} = F_1 A|_{X_s}: X_s \to Y_{s_1}$ из представления (5) имеет обратный $A_{s1}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$. В координатных базисах пространств $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ матрицы A_{s1}, A_{s1}^{-1} одноименных операторов принимают вид:

$$A_{s1} = A, \quad A_{s1}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & 0 & 0 \\ -L^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как в приведенном выше примере проверяем, что пучок $\lambda A_r + B_r$ (4) регулярный и удовлетворяет (6).
Проекции вектора x:

$$x_s = Sx = (x_1, x_2, -x_1)^T = (a, b, -a)^T,$$

$$P_1 x = 0,\ u = P_2 x = (0, 0, x_1 + x_3)^T = (0, 0, v),$$

$$a = x_1,\ b = x_2,\ v = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}.$$

Уравнение $(F_2 + Q_2)[Bx - f(t,x)] = 0$ эквивалентно системе двух уравнений (37), (38) и легко проверить, что условие (12) теоремы выполнено.
С учетом новых обозначений систему (37), (38) можно переписать в виде

$$b - r_2 a = r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t)\,, \qquad (39)$$

$$v = I(t) - q\varphi_1(v - a)\,. \qquad (40)$$

Учитывая, что $\forall t \ge 0\ \forall a \in \mathsf{R}\ \exists b \in \mathsf{R}$ такое, что выполнено (39), то $\forall t \ge 0\ \forall a \in \mathsf{R}\ \forall v \in \mathsf{R}$, удовлетворяющих (40), найдется $b \in \mathsf{R}$ такое, что выполнена система (39), (40).

Найдем $\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - B\right] P_2 = -(q\varphi_1'(x_3) + 1) W$,

$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_1'(x_3) = \dfrac{d\varphi_1(x_3)}{dx_3}$, и рассмотрим оператор-функцию

$$\hat{\Phi}(\tilde{u}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t, x_s + \tilde{u})) - B\right] P_2 = -(q\varphi_1'(\tilde{v} - a) + 1) W\,,$$

$\tilde{u} = (0,0,\tilde{v})^T$, $\tilde{v}, a \in \mathsf{R}$, где $\tilde{u} \in \operatorname{conv}\{u_1, u_2\}$ и $u_1, u_2 \in X_2$ удовлетворяют (40). Поскольку $\dim X_2 = \dim Y_2 = 1$, сужение Λ оператора $\hat{\Lambda} = \hat{\Phi}(\tilde{u})$ на одномерное подпространство X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2, если $q\varphi_1'(\tilde{v} - a) \ne -1$, $a \in \mathsf{R}$. Действительно, при выполнении последнего условия из равенства $\hat{\Lambda} u = 0$, $u \in X_2$, следует $u = 0$. Следовательно, для любых $u_1, u_2 \in X_2$, удовлетворяющих (40), функция (13) является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\operatorname{conv}\{u_1, u_2\} \subset X_2$.

Представим проекцию $F_1 f(t,x)$ $(Q_1 f(t,x) = 0)$ в виде (14): $K_i(t) = 0,\ i = \overline{1,3}$, $F_1 f(t,x) = \psi_1(x) + g_1(t)$,

$$\psi_1(t,x) \equiv \psi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1) \\ -h(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ g_1(t) = \begin{pmatrix} r_2 I_1(t) \\ I_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}$. Очевидно, что $H_1 = H_1^* > 0$,

$\left(H_1 Sx,\ A_{s1}^{-1}\psi_1(x)\right) = 2x_1[\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] - x_2 h(x_2)$.

Найдем ограничение, при котором для любого конечного интервала $0 \le t \le T$ найдется $R_T > 0$ такое, что если $\|Sx + P_1 x\| = \sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \ge R_T$ и выполнено (37), (38), то $\left(H_1 Sx,\ A_{s1}^{-1}\psi_1(x)\right) \le 0$. В этом случае выполняется условие (15) теоремы.

Обозначив $M_T = \max\limits_{t \in [0,T]} |I(t)|$, учитывая (38), получим искомое ограничение:

$$\begin{aligned} &\forall T \ge 0\ \exists R_T > 0 : 2[M_T\,|\varphi_1(x_3)| - x_3\varphi_1(x_3) - \\ &- q\varphi_1^2(x_3) - x_1\varphi_3(x_1)] - x_2 h(x_2) \le 0 \end{aligned} \qquad (41)$$

для всех $x \in \mathsf{R}^3$ таких, что $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \ge R_T$ и выполнено (37), (38).

Итак, по теореме 1 для всякой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0,\infty) \times \mathsf{R}^3$, удовлетворяющей системе уравнений (37), (38), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (7), (8) на полуоси $t_0 \le t < \infty$, если:

1) $L \ne C(r_2 + r_3)/g$; $\varphi_1'(\tilde{v} - a) \ne -r_4$ ($a \in \mathsf{R}$) при любом $\tilde{u} \in \operatorname{conv}\{u_1, u_2\}$ и любых $u_1, u_2 \in X_2$, удовлетворяющих (40); выполнено условие (41) для всех $x \in \mathsf{R}^3$, удовлетворяющих (37), (38) и таких, что $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \ge R_T$;

2) $L = C(r_2 + r_3)/g$; $\forall t \ge 0\ \exists x_3 \in \mathsf{R}$:

$$x_3 + q\varphi_1(x_3) = I(t); \qquad (42)$$

$\varphi_1'(\tilde{x}_3) \ne -r_4$ при любом $\tilde{u} = (0,0,\tilde{x}_3)^T \in \operatorname{conv}\{u_1, u_2\}$ и любых $u_1, u_2 \in X_2$, удовлетворяющих (42);

$$\begin{aligned} &\forall\, T \ge 0\ \exists\, R_T > 0 : (3r_2 x_1 - x_2)[\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] + \\ &+ (r_2 x_1 - x_2)(r_2 + r_3)(r_2 g)^{-1} h(x_2) \le 0 \end{aligned}$$

для всех $x \in \mathsf{R}^3$, удовлетворяющих (37), (42) и таких, что $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ge R_T$.

Рассмотрим частные случаи при $L \ne C(r_2 + r_3)/g$. Пусть

$$\begin{aligned} &\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{2k-1},\ \varphi_3(y) = \alpha_2 y^{2j-1},\ h(y) = \\ &= \alpha_3 y^{2r-1},\quad k,\ j,\ r \in \mathsf{N},\ \alpha_i > 0,\ i = \overline{1,3},\ y \in \mathsf{R}. \end{aligned} \qquad (43)$$

Заметим, что подобные нелинейные сопротивления и проводимости встречаются в реальных радиотехнических системах. Легко проверить, что для нелинейных функций вида (43) выполнены условия теоремы, как и для функций

$$\begin{aligned} &\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{\frac{1}{2k+1}},\ \varphi_3(y) = \alpha_2 y^{\frac{1}{2j+1}},\ h(y) = \\ &= \alpha_3 y^{\frac{1}{2r+1}},\quad k,\ j,\ r \in \mathsf{N},\ \alpha_i > 0,\ i = \overline{1,3},\ y \in \mathsf{R}. \end{aligned}$$

7. Заключение

Доказана теорема о существовании и единственности глобального решения дифференциально-алгебраического уравнения с сингулярным характеристическим пучком операторов в случае, когда соответствующая система дифференциально-алгебраических уравнений переопределена.

Рассмотрена модель двухполюсного радиотехнического фильтра с нелинейными элементами. Исходя из условий исследуемой задачи (см. п. 6), модель электрической цепи двухполюсника описывается переопределенной системой дифференциально-алгебраических уравнений. Найдены ограничения, при выполнение которых полученная система уравнений глобально разрешима. Приведены частные случаи с нелинейными функциями, которые не являются глобально липшицевыми и удовлетворяют условиям теоремы. Анализ задачи показывает, что требования теоремы физически обеспечиваемы и практическая проверка ее условий является достаточно эффективной в реальных практических приложениях.

Для определенных классов нелинейных радиотехнических систем установлено, что теорема гарантирует существование и единственность глобальных решений соответствующих уравнений динамики.

Литература: 1. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006. 273 с. **2.** *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с. **3.** *Руткас А. Г.* Разрешимость полулинейных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Украинский математический журнал. 2008. Т. 60, № 2. С. 225-239. **4.** *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения Ax'(t)+Bx(t)=f(t) // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1996-2010. **5.** *Руткас А. Г., Филипковская М. С.* Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2013. № 1 (111). С. 135-145. **6.** *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. 822 с. **7.** *Филипковская М. С.* Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». 2012. № 1015, Вип. 19. С. 306-319. **8.** *Ла-Салль Ж.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.

Поступила в редколлегию 10.03.2014
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Руткас А.Г.

Филипковская Мария Сергеевна, аспирантка кафедры математического моделирования и программного обеспечения ХНУ им. В. Н. Каразина. Научные интересы: дифференциально-алгебраические и дифференциально-операторные уравнения, спектральная теория операторов, математическое моделирование. Адрес: Украина, 61121, Харьков, тел.: +380 097 7179551, e-mail: fmarias@mail.ru.