УДК 519.859

КВАЗИ Ф-ФУНКЦИЯ ДЛЯ СФЕРОКОНУСОВ С ПОВОРОТАМИ

СЁМКИН В.В., ЧУГАЙ А.М., ПАНКРАТОВ А.В.

Предлагается квази Ф-функция для пары неориентированных сфероконусов. Данная функция позволяет записать условия взаимного непересечения объектов в виде набора систем неравенств, левые части которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Введение

На сегодняшний день наименее исследованными в классе задач размещения геометрических объектов являются задачи размещения трехмерных объектов, которые допускают непрерывные повороты. В то же время данные задачи являются востребованными как с научной, так и с практической точек зрения [1-3].

Для построения адекватных математических моделей таких задач необходимо выполнить аналитическое описание взаимоотношений (касание, пересечение и непересечение) размещаемых геометрических объектов. Однако в связи с отсутствием конструктивных средств математического моделирования этих отношений для класса неориентированных (допускающих непрерывные повороты) трехмерных объектов существует проблема применения известных методов локальной и глобальной оптимизации для поиска решения рассматриваемых задач. Решить эту проблему позволяет подход, основанный на методе Ф-функций [4].

На данный момент в классе неориентированных трехмерных геометрических объектов построены Ф-функции для многогранников [5] и для многогранника и шара [6].

Данная статья расширяет множество трехмерных неориентированных объектов, для которых может быть построена математическая модель задачи оптимальной упаковки.

Целью данной работы является математическое моделирование взаимодействия неориентированных сфероконусов.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие *задачи*: построить квази Ф-функцию и псевдонормализованную квази Ф-функцию для сфероконусов.

1. Постановка задачи

В качестве сфероконуса в работе рассматривается выпуклый геометрический объект $sK_i = G_{1i} \cup F_i \cup G_{2i}$ (рис. 1), где F_i – усечённый конус высоты $2h_i$ радиуса верхнего и нижнего оснований r_{1i} и r_{2i} соответственно, $r_{1i} \ge r_{2i}$; G_{1i} – верхний сферический сегмент высоты w_{1i} и радиуса основания r_{1i}; G_{2i} – нижний сферический сегмент высоты w_{2i} и радиуса основания r_{2i}. При этом G_{ki} получены из шаров S_{ki} радиусов $\rho_{ki} = \dfrac{r_{ki}^2 + w_{ki}^2}{2w_{ki}}, k = 1,2$. Обозначим также $\tau_{ki} = \rho_{ki} - w_{ki}, k = 1,2$.

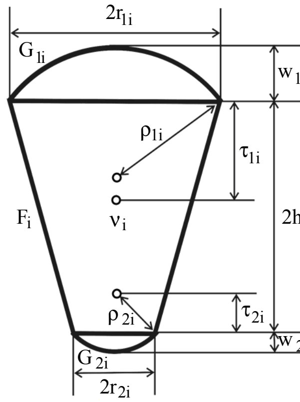

Рис. 1. Сфероконус

Условия выпуклости сфероконуса записываются в виде условий на его метрические характеристики:

$$\tau_{1i} + \frac{r_{1i}(r_{1i} - r_{2i})}{2h_i} \ge 0, \tau_{2i} + \frac{r_{2i}(r_{2i} - r_{1i})}{2h_i} \ge 0.$$

В работе рассматриваются сфероконусы, для которых $\tau_{1i} \ge 0$.

Пусть вектор $\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, w_{1i}, w_{2i})$ задает метрические характеристики сфероконуса sK_i. Изменяя значения вектора μ_i, можно получить следующие геометрические объекты: конус ($\mu_i = (h_i, r_{1i}, 0, 0, 0)$); усеченный конус ($\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, 0, 0)$); круговой цилиндр ($\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, 0, 0), r_{1i} = r_{2i}$); сфероцилиндр ($\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, w_{1i}, w_{2i}), r_{1i} = r_{2i}$); сферический сегмент ($\mu_i = (0, r_{1i}, 0, w_{1i}, 0)$); сферический диск ($\mu_i = (0, r_{1i}, r_{2i}, w_{1i}, w_{2i}), r_{1i} = r_{2i}$).

Сфероконус допускает аффинные преобразования трансляции и поворота. В работе сфероконус sK_i является объектом вращения вокруг оси Oz, поэтому его ориентация задается углами $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ вокруг осей Ox и Oy соответственно. Зададим матрицу поворота $R(\theta_i) = (R_x(\theta_i), R_y(\theta_i), R_z(\theta_i))$, где

$$R_x(\theta_i) = (\cos\beta_i, \sin\alpha_i \sin\beta_i, -\cos\alpha_i \sin\beta_i)^T,$$

$$R_y(\theta_i) = (0, \cos\alpha_i, \sin\alpha_i)^T,$$

$$R_z(\theta_i) = (\sin\beta_i, -\sin\alpha_i \cos\beta_i, -\cos\alpha_i \cos\beta_i)^T.$$

Сфероконус sK_i, транслированный на вектор $\nu_i = (x_i, y_i, z_i)$ и повёрнутый на углы $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, обозначим $sK_i(u_i)$, где $u_i = (\nu_i, \theta_i)$ – вектор движения сфероконуса.

В работе [7] в целях описания в аналитическом виде условий непересечения выпуклых объектов введено понятие квази Ф-функции. Эта функция зависит не только от параметров размещения объектов, но и от некоторых дополнительных переменных Y_{ij}, количество k которых зависит от размерности пространства, в котором заданы геометрические объекты.

Определение 1. Квази Ф-функцией $Q_{ij}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right)$ для φ-объектов [8] $O_i(u_i)$ и $O_j\left(u_j\right)$ называется непрерывная всюду определённая функция, для которой выполняются следующие свойства:

$$\max_{Y_{ij}\in R^k} Q_{ij}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) < 0, \text{ если} \operatorname{int} O_i(u_i) \bigcap \operatorname{int} O_j\left(u_j\right) \neq \varnothing$$

$$\max_{Y_{ij}\in R^k} Q_{ij}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) = 0, \text{ если} \operatorname{int} O_i(u_i) \bigcap \operatorname{int} O_j\left(u_j\right) = \varnothing,$$

$$\operatorname{fr} O_i(u_i) \bigcap \operatorname{fr} O_j\left(u_j\right) \neq \varnothing;$$

$$\max_{Y_{ij}\in R^k} Q_{ij}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) > 0, \text{если } O_i(u_i) \bigcap O_j\left(u_j\right) = \varnothing .$$

Таким образом, функция

$$\Phi\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) = \max_{Y_{ij}\in R^k} Q_{ij}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right)$$

является Ф-функцией для объектов $O_i(u_i)$ и $O_j\left(u_j\right)$.

Определение 2. Квази Ф-функция $Q_{ij}^{d_{ij}}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right)$ называется псевдонормализованной квази Ф-функцией для φ-объектов $O_i(u_i)$ и $O_j\left(u_j\right)$, если для некоторого фиксированного значения $d_{ij} \geq 0$ она удовлетворяет следующим условиям:

$$\max_{Y_{ij}\in R^k} Q_{ij}^{d_{ij}}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) < 0, \text{ если} \rho\left(O_i(u_i), O_j\left(u_j\right)\right) < d_{ij};$$

$$\max_{Y_{ij}\in R^k} Q_{ij}^{d_{ij}}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) = 0, \text{ если} \rho\left(O_i(u_i), O_j\left(u_j\right)\right) = d_{ij};$$

$$\max_{Y_{ij}\in R^k} Q_{ij}^{d_{ij}}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) > 0, \text{если } \rho\left(O_i(u_i), O_j\left(u_j\right)\right) > d_{ij},$$

где $\rho\left(O_i(u_i), O_j\left(u_j\right)\right)$ – евклидово расстояние между объектами $O_i(u_i)$ и $O_j\left(u_j\right)$.

Легко видеть, что условие $Q_{ij}^{d_{ij}}\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) \geq 0$ обеспечивает нахождение объектов на расстоянии не меньшем, чем d_{ij}.

2. Построение квази Ф-функции для двух сфероконусов

Рассмотрим полупространство

$$H_s^-(Y_s) = \left\{X = (x, y, z) \in R^3 : f(X, Y_s) \leq 0\right\},$$

отделяемое плоскостью $\Lambda_s = \operatorname{fr} H_s^-(Y_s)$, которая задаётся уравнением

$$f(X, Y_s) = a(\psi_s)x + b(\phi_s, \psi_s)y + c(\phi_s, \psi_s) + d_s = 0,$$

$$a(\psi_s) = \sin\psi_s, b(\phi_s, \psi_s) = -\sin\phi_s\cos\psi_s,$$

$$c(\phi_s, \psi_s) = \cos\phi_s\sin\psi_s, \; Y_s = (\phi_s, \psi_s, d_s).$$

Замечание. Заметим, что

$$\left\|n_s(Y_s)\right\| = \left\|\left(a(\psi_s), b(\phi_s, \psi_s), c(\phi_s, \psi_s)\right)\right\| = 1,$$

поэтому величина $\left|f\left(X^0, Y_s\right)\right|$ равна расстоянию от произвольной точки $X^0 \in R^3$ до плоскости Λ_s.

Вначале построим Ф-функцию для сферического сегмента $G_{1i} \subset sK_i$ и полупространства $H_s^-(Y_s)$.

Теорема 1. *Нормализованная Ф-функция для сферического сегмента* $G_{1i}(u_i)$ *и полупространства* $H_s^-(Y_s)$ *может быть представлена в виде*

$$\Phi^{11}(u_i, Y_s) = \max\left\{F_{is}^1(u_i, Y_s), g_{3is}^1(u_i, Y_s)\right\},$$

где

$$F_{is}^1(u_i, Y_s) = \min\left\{g_{1is}^1(u_i, Y_s), g_{2is}^1(u_i, Y_s)\right\},$$

$$g_{1is}^1(u_i, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) + h_i q(\theta_i, Y_s) - r_{1i}\sqrt{1 - q(\theta_i, Y_s)^2},$$

$$g_{2is}^1(u_i, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) + \left(h_i + \frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}\right) q(\theta_i, Y_s),$$

$$g_{3is}^1(u_i, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) + (h_i - \tau_{1i}) q(\theta_i, Y_s) - \rho_{1i},$$

$$q(\theta_i, Y_s) = \left\langle R_z(\theta_i), n_s(Y_s)\right\rangle.$$

Доказательство. Сегмент G_{1i} представляется, как пересечение шара S_{1i} радиуса ρ_{1i} и конуса K_{1i} высоты $\frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}$ и радиуса основания r_{1i}, образующие которого касаются шара S_{1i} в точках окружности

$$\left\{X \in R^3 : x^2 + y^2 + (z + h_i - \tau_{1i})^2 - r_{1i}^2 = 0, z - h_i = 0\right\}.$$

Обозначим ближайшую к плоскости Λ_s точку основания конуса K_{1i} через A_{i1}, вершину этого конуса – A_{i2}, а точку шара S_{1i}, ближайшую к Λ_s – через A_{i3} (рис. 2).

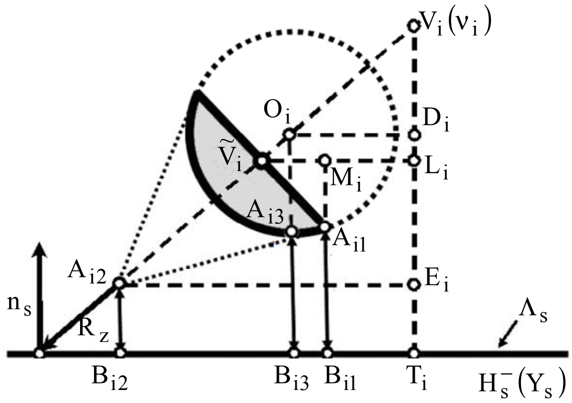

Рис. 2. Отклонения контрольных точек сегмента

Вычислим отклонение точки A_{i1} от плоскости Λ_s. Имеем, $A_{i1}B_{i1} = V_iT_i - V_iL_i - M_iA_{i1}$, т.е. $f(A_{i1}, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) + h_i\cos\omega - r_{1i}\sin\omega$, откуда, учитывая, что ω – угол между единичными векторами $n_s(Y_s)$ и $R_z(\theta_i)$, получаем

$f(A_{i1}, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) + h_i q(\theta_i, Y_s) - r_{1i}\sqrt{1 - q(\theta_i, Y_s)^2}$.

Отклонение точки A_{i2} от плоскости Λ_s равно $A_{i2}B_{i2} = V_i T_i - V_i E_i$, т.е.

$$f(A_{i2}, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) - V_i A_{i2} \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует

$$f(A_{i2}, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) + \left(h_i + \frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}\right) q(\theta_i, Y_s).$$

И, наконец, отклонение точки от плоскости равно $A_{i3}B_{i3} = V_i T_i - O_i D_i$, т.е.

$f(A_{i3}, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) - V_i O_i \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - O_i A_{i3}$, откуда $f(A_{i3}, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) - (h_i - \tau_{1i}) q(\theta_i, Y_s) - \rho_{1i}$.

Очевидно, что $G_{1i}(u_i) \cap \operatorname{int} H_s^-(Y_s) = \varnothing$, если выполнено хотя бы одно из условий: 1) $f(A_{i1}, Y_s) \geq 0$, $f(A_{i2}, Y_s) \geq 0$; 2) $f(A_{i3}, Y_s) \geq 0$.

Обозначим $g_{tis}^1(u_i, Y_s) = f(A_{it}, Y_s), t = 1,2,3$.

Поэтому, если $\Phi^{11}(u_i, Y_s) > 0$, то $F_{is}(u_i, Y_s) > 0$ или $g_{3is}^1(u_i, Y_s) > 0$, а значит $G_{1i}(u_i) \cap H_s^-(Y_s) = \varnothing$. Если $\Phi^{11}(u_i, Y_s) = 0$, то $F_{is}^1(u_i, Y_s) = 0$ или $g_{3is}^1(u_i, Y_s) = 0$, откуда $\operatorname{int} G_{1i}(u_i) \cap \operatorname{int} H_s^-(Y_s) = \varnothing$ и $\operatorname{fr} G_{1i}(u_i) \cap \operatorname{fr} H_s^-(Y_s) \neq \varnothing$. Если же $\Phi^{11}(u_i, Y_s) < 0$, то $F_{is}(u_i, Y_s) < 0$ и $g_{3is}^1(u_i, Y_s) < 0$, из чего следует, что $\operatorname{int} G_{1i}(u_i) \cap \operatorname{int} H_s^-(Y_s) \neq \varnothing$.

Заметим, что $A_{i2} \notin G_{1i}$. Покажем, что или $\Phi^{11}(u_i, Y_s) = g_{1is}^1(u_i, Y_s) = g_{2is}^1(u_i, Y_s) = g_{3is}^1(u_i, Y_s)$, или $\Phi^{11}(u_i, Y_s) \neq g_{2is}^1(u_i, Y_s)$.

Действительно, если

$F_{is}(u_i, Y_s) = \min\left\{g_{1is}^1(u_i, Y_s), g_{2is}^1(u_i, Y_s)\right\} = g_{1is}^1(u_i, Y_s)$, то $\Phi^{11}(u_i, Y_s) \neq g_{2is}^1(u_i, Y_s)$.

Иначе, пусть $F_{is}(u_i, Y_s) = g_{2is}^1(u_i, Y_s)$, т.е. $g_{2is}^1(u_i, Y_s) \leq g_{1is}^1(u_i, Y_s)$. Тогда получаем $q(\theta_i, Y_s) \leq -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$. Если $g_{3is}^1(u_i, Y_s) > g_{2is}^1(u_i, Y_s)$, то $\Phi^{11}(u_i, Y_s) \neq g_{2is}^1(u_i, Y_s)$.

В ином случае, если $g_{3is}^1(u_i, Y_s) \leq g_{2is}^1(u_i, Y_s)$, т.е. $\Phi^{11}(u_i, Y_s) = g_{2is}^1(u_i, Y_s)$, имеем $q(\theta_i, Y_s) \geq -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$.

Таким образом, с одной стороны, $q(\theta_i, Y_s) \leq -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$, а с другой – $q(\theta_i, Y_s) \geq -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$. Отсюда $q(\theta_i, Y_s) = -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$. Подставляя это значение в $g_{1is}^1(u_i, Y_s), g_{2is}^1(u_i, Y_s)$ и $g_{3is}^1(u_i, Y_s)$, получаем

$$\Phi^{11}(u_i, Y_s) = g_{1is}^1(u_i, Y_s) = g_{2is}^1(u_i, Y_s) = g_{3is}^1(u_i, Y_s).$$

Поскольку функции $g_{tis}^1(u_i, Y_s), t = 1,2,3$, всюду определены и непрерывны, то и функция $\Phi^{11}(u_i, Y_s)$ всюду определена и непрерывна. Поэтому функция $\Phi^{11}(u_i, Y_s)$, с учётом замечания, является нормализованной Ф-функцией сфероконуса $sK_i(u_i)$ и полупространства $H_s^-(Y_s)$. Теорема 1 доказана.

Аналогично, нормализованная Ф-функция для сферического сегмента $G_{2i}(u_i)$ и полупространства $H_s^-(Y_s)$ может быть записана, как

$$\Phi^{12}(u_i, Y_s) = \max\left\{F_{is}^2(u_i, Y_s), g_{3is}^2(u_i, Y_s)\right\},$$

где

$$F_{is}^2(u_i, Y_s) = \min\left\{g_{1is}^2(u_i, Y_s), g_{2is}^2(u_i, Y_s)\right\},$$

$$g_{1is}^2(u_i, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) - h_i q(\theta_i, Y_s) - r_{2i}\sqrt{1 - q(\theta_i, Y_s)^2},$$

$$g_{2is}^2(u_i, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) - \left(h_i + \frac{r_{2i}^2}{\tau_{2i}}\right) q(\theta_i, Y_s),$$

$$g_{3is}^2(u_i, Y_s) = f(\nu_i, Y_s) - (h_i - \tau_{2i}) q(\theta_i, Y_s) - \rho_{2i}.$$

Поскольку сфероконус является выпуклым множеством, то $sK_i(u_i) \cap H_s^-(Y_s) = \varnothing$, если $G_{1i}(u_i) \cap H_s^-(Y_s) = \varnothing$ и $G_{2i}(u_i) \cap H_s^-(Y_s) = \varnothing$. Поэтому функция

$$\Phi_{is}^1(u_i, Y_s) = \min\left\{\Phi_{is}^{11}(u_i, Y_s), \Phi_{is}^{12}(u_i, Y_s)\right\}$$

является нормализованной Ф-функцией для сфероконуса $sK_i(u_i)$ и полупространства $H_s^-(Y_s)$.

Заметим, что для случаев, когда сфероконус принимает форму конуса, усечённого конуса или цилиндра, Ф-функция $\Phi_{is}^1(u_i, Y_s)$ принимает вид

$$\Phi_{is}^1(u_i, Y_s) = \min\left\{g_{1is}^1(u_i, Y_s), g_{1is}^2(u_i, Y_s)\right\}.$$

Аналогичным образом, нормализованная Ф-функция для сфероконуса $sK_j(u_j)$ и полупространства

$$H_s^+(\bar{Y}_s) = \left\{X \in R^3 : f(X, \bar{Y}_s) = -f(X, Y_s) \leq 0\right\},$$

$\bar{Y}_s = (\phi_s, \pi + \psi_s, -d_s)$, может быть записана в виде

$$\Phi_{js}^2(u_j, \bar{Y}_s) = \min\left\{\Phi_{js}^{21}(u_j, \bar{Y}_s), \Phi_{js}^{22}(u_j, \bar{Y}_s)\right\},$$

где $\Phi_{js}^{2k}(u_j, \bar{Y}_s)$ – нормализованная Ф-функция для сегмента $G_{kj} \subset sK_j, k = 1,2$, и полупространства $H_s^+(\bar{Y}_s)$. Для упрощения записи переобозначим

$Y_s = Y_{ij}$. Таким образом, сфероконусы гарантированно не пересекаются (не имеют общих внутренних точек), если плоскость Λ_{ij} является разделяющей плоскостью этих объектов.

Теорема 2. *Квази Ф-функция для сфероконусов* $sK_i(u_i)$ *и* $sK_j(u_j)$ *может быть представлена в виде* $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = \min\left\{\Phi^1_{ij}(u_i, Y_{ij}), \Phi^2_{ij}(u_j, \bar{Y}_{ij})\right\}$.

Доказательство. Пусть
$$\max_{Y_{ij}\in R^3} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = Q_{ij}(u_i, u_j, Y^*_{ij}) > 0.$$

Тогда $\Phi^1_{ij}(u_i, Y^*_{ij}) > 0$ и $\Phi^2_{ij}(u_j, Y^*_{ij}) > 0$, следовательно, плоскость Λ^*_{ij} является разделяющей плоскостью сфероконусов, причём $sK_i(u_i) \subset \operatorname{int} H^+_{ij}(Y_{ij})$ и $sK_j(u_j) \subset \operatorname{int} H^-_{ij}(Y_{ij})$.

Если $\max_{Y_{ij}\in R^3} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = Q_{ij}(u_i, u_j, Y^*_{ij}) = 0$, то не существует такого $Y^{**}_{ij} \in R^3$, что $Q_{ij}(u_i, u_j, Y^{**}_{ij}) > 0$. Значит, $\Phi^1_{ij}(u_i, Y^*_{ij}) = 0$ и $\Phi^2_{ij}(u_j, Y^*_{ij}) = 0$, плоскость Λ^*_{ij} является опорной плоскостью сфероконусов $sK_i(u_i)$ и $sK_j(u_j)$, причём $\operatorname{int} sK_i(u_i) \cap \operatorname{int} sK_j(u_j) = \varnothing$ и $\operatorname{fr} sK_i(u_i) \cap \operatorname{fr} sK_j(u_j) \neq \varnothing$.

Если $\max_{Y_{ij}\in R^3} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) < 0$, то для любого $Y^{**}_{ij} \in R^3$ выполняется $Q_{ij}(u_i, u_j, Y^*_{ij}) < 0$, а значит справедливо хотя бы одно из неравенств $\Phi^1_{ij}(u_i, Y^*_{ij}) < 0$ или $\Phi^2_{ij}(u_i, Y^*_{ij}) < 0$. Следовательно, в пространстве R^3 не существует плоскости, разделяющей сфероконусы $sK_i(u_i)$ и $sK_j(u_j)$.

Функция $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$ всюду определена и непрерывна в силу всюду определённости и непрерывности функций $\Phi^1_{ij}(u_i, Y_{ij})$ и $\Phi^2_{ij}(u_j, Y_{ij})$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $d_{ij} \geq 0$. *Тогда функция* $Q^{d_{ij}}_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) - \frac{1}{2} d_{ij}$ *является псевдонормализованной квази Ф-функцией для сфероконусов* $sK_i(u_i)$ *и* $sK_j(u_j)$.

3. Выводы

Научная новизна.. Впервые построена квази Ф-функция $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$ для пары неориентированных сфероконусов.

Научные и практические результаты. Данная функция позволяет записать условия взаимного непересечния объектов в виде набора систем неравенств, левые части которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Эта функция может быть использована для построения математической модели задач оптимальных упаковок неориентированных сфероконусов, сфероцилиндров, конусов, усеченных конусов, цилиндров, сферических сегментов и сферических дисков.

Функция $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$ позволяет снизить вычислительные затраты при определении условий непересечения рассматриваемых трехмерных неориентированных объектов.

Кроме того, функция $Q^{d_{ij}}_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$ позволяет учитывать ограничения на кратчайшие расстояния между рассматриваемыми объектами.

Литература: 1. *Williams S.R.* Random packing of spheres and spherocylinders simulated by mechanical contraction / S.R. Williams and A.P. Philipse // Physics Review E. 2003. Vol. 67, Article ID 051301. P. 051301-1–051301-9. **2.** *Torquato S.* Modeling of physical properties of composite materials / S. Torquato // Int. J. Solids Struct. 2000. Vol. 37, Issue 1-2. P. 411-422. **3.** *Yi Y.B.* Compression of packed particulate systems: simulations and experiments in graphitic li-ion anodes / Y.B. Yi, C.W. Wang, A.M.Sastry // Journal of Engineering Materials and Technology. 2006. Vol. 128, Issue 1. P. 73-80. **4.** *Stoyan Yu.G.* Ф-function and its basic properties / Yu. G. Stoyan // Доп. НАН України. 2001. №8. С.112-117. **5.** *Stoyan Yu. G.* Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes / Yu. G. Stoyan, A.M. Chugay // Cybernetics and Systems Analysis. 2012. Vol. 46, №6. P. 837-845. **6.** *Стоян Ю.Г.* Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника / Ю.Г. Стоян, А.М. Чугай // Доп. НАН України. 2011. №12. С. 44-50. **7.** *Панкратов О.В.* Математичні моделі, методи та інформаційні технології розв'язання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / О.В. Панкратов. Харків, 2013. 40 с. 8. *Стоян Ю.Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. К.: Наук. думка, 1986. 267 с.

Поступила в редколлегию 14.02.2014

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Сёмкин Владимир Владимирович, аспирант отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАНУ им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10, тел. раб. (0572) 349-47-77, тел. (095)188-45-86.

Чугай Андрей Михайлович, канд. техн. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАНУ им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10, тел. раб. (0572) 349-47-77, тел. (068)319-12-54.

Панкратов Александр Викторович, д-р техн. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАНУ им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10, тел.: раб. (0572) 349-47-77, моб. (067)681-95-10.