УДК519.681

ПОЛУЧЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА МНОГОИНДЕКСНОЙ ЗАДАЧИ ТРАСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ

АХИЕЗЕР Е.Б., ГЕЛЯРОВСКАЯ О.А., ДУНАЕВСКАЯ О.И., ПРОЦАЙ Н.Т.

Рассматривается методика построения начального опорного плана многоиндексной задачи транспортной логистики. Предлагается эффективный метод нуль-преобразования исходных матриц стоимостей для получения начального опорного плана. Описываются соответствующие вычислительные процедуры.

1.Ведение

Актуальность. В реальных задачах транспортной логистики необходимо учитывать не только различия в пунктах производства и потребления, но и промежуточных центров, вида товара, типа транспортных средств. Такая задача описывается многоиндексной моделью транспортной задачи [1].

При высокой размерности задачи, характерной для всех многоиндексных задач, трудно формализуемыми становятся традиционные процедуры построения начального опорного плана, использующие стандартные методы (метод «северо – западного угла», метод минимальной стоимости, метод Фогеля) [2, 3].

Точное решение многоиндексной транспортной задачи может быть получено методом потенциалов [1, 4]. Однако практическая реализация этого метода является трудоемкой, так как содержит большое число итераций. Основная причина – начальный опорный план никак не связан с матрицей стоимостей и поэтому может быть произвольно далеким от оптимального. При этом вычислительная сложность решения быстро растет с увеличением размерности задачи.

Цель: построить начальный опорный план многоиндексной задачи траспортной логистики на основании метода нуль – преобразований исходной матрицы стоимостей.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие *задачи*:

1. Анализ традиционных методов построения начального опорного плана в транспортных задачах.

2. Разработка метода построения начального опорного плана для многоиндексной задачи. Получение соотношения для расчета элементов плана для задачи произвольной индексности.

3. Модификация метода нуль – преобразований исходной матрицы стоимостей.

4. Анализ эффективности метода нуль – преобразований.

2. Метод построения начального опорного плана для многоиндексной задачи. Получение соотношения для расчета элементов плана для задачи произвольной индексности

Общая формулировка q-индексной транспортной задачи такова: найти набор $X=\left(X_{j_1 j_2 \cdots j_q}\right)$, минимизирующий целевую функцию

$$L(X)=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\dots\sum_{j_q=1}^{n_q} C_{j_1 j_2 \cdots j_q} X_{j_1 j_2 \cdots j_q} \qquad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} X_{j_1 j_2 \cdots j_q}=b_{j_2 j_3 \cdots j_q},\ j_k \in J_k,\ k=\{2,3,...,q\},$$

$$\sum_{j_2=1}^{n_2} X_{j_1 j_2 \cdots j_q}=b_{j_1 j_3 \cdots j_q},\ j_k \in J_k,\ k=\{1,3,...,q\}, \qquad (2)$$

$$\sum_{j_q=1}^{n_q} X_{j_1 j_2 \cdots j_q}=b_{j_1 j_2 \cdots j_{q-1}},\ j_k \in J_k,$$

$$k=\{1,2,...,q\text{-}1\},\ X_{j_1 j_2 \cdots j_q} \ge 0,\ j_1 \in J_1,\ j_2 \in J_2,\ ...,\ j_q \in J_q, \qquad (3)$$

$C_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ – матрица, определяющая стоимость транспортировки единицы груза в условиях $\left(j_1, j_2, ..., j_q\right)$; $b_{j_1 j_2 \cdots j_{q-1}}$ – суммарный объем груза, транспортируемого в условиях $\left(j_1, j_2, ..., j_{q-1}\right)$.

Простая технология расчета элементов плана задачи основана на условиях существования решения, сформулированных применительно к триаксальной трехиндексной транспортной задаче.

Соотношения для расчета элементов плана задачи:

$$X_{j_1 j_2 j_3}=\frac{b_{j_1 j_2}}{n_3}+\frac{b_{j_1 j_3}}{n_2}+\frac{b_{j_2 j_3}}{n_1}-\frac{b_{j_3}}{n_1 n_2}-\frac{b_{j_2}}{n_1 n_3}-\frac{b_{j_1}}{n_2 n_3}+\frac{S}{n_1 n_2 n_3}, \qquad (4)$$

где
$$b_{j_1}=\sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_1 j_2},$$

$$b_{j_2}=\sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_2 j_3},\ b_{j_3}=\sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3},\ S=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_1 j_3}.$$

Неотрицательный, удовлетворяющий условиям баланса набор, определяемый (4), есть план задачи:

$$\sum_{j_i=1}^{n_1} X_{j_1 j_2 j_3}=\frac{1}{n_3}\sum_{j_i=1}^{n_1} b_{j_1 j_2}+\frac{1}{n_2}\sum_{j_i=1}^{n_1} b_{j_1 j_3}+\frac{1}{n_1}\sum_{j_i=1}^{n_1} b_{j_2 j_3}-\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{j_i=1}^{n_1} b_{j_3}-\frac{1}{n_1 n_3}\sum_{j_i=1}^{n_1} b_{j_2}-\frac{1}{n_2 n_3}\sum_{j_i=1}^{n_1} b_{j_1}+\frac{1}{n_1 n_2 n_3}\sum_{j_i=1}^{n_1} S \qquad (5)$$

Учтем условия баланса, в соответствии с которыми

$$\sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_1 j_2} = \sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_1 j_3}\ ,\ \ j_1=1,2,...,n_1\ ,$$

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_2} = \sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_2 j_3}\ ,\ \ j_2=1,2,...,n_2\ ,$$

$$\sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_2 j_3} = \sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3}\ ,\ \ j_3=1,2,...,n_3\ ,$$

$$\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_1 j_2} = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_1 j_3} = \sum_{j_2=1}^{n_2}\sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_1 j_3} = S\ .$$

Преобразуя (5), получаем

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} X_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{n_3}\sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_2} + \frac{1}{n_2}\sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3} + b_{j_2 j_3} - \\ - \frac{1}{n_2} b_{j_3} - \frac{1}{n_3} b_{j_2} - \frac{1}{n_2 n_3}\sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1} + \frac{1}{n_2 n_3} S \qquad (6)$$

Далее, так как

$$\frac{1}{n_2} b_{j_3} = \frac{1}{n_2}\sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_3}\ ,$$

$$\frac{1}{n_3} b_{j_2} = \frac{1}{n_3}\sum_{j_3=1}^{n_3} b_{j_2 j_3} = \frac{1}{n_3}\sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1 j_2}\ ,$$

$$\frac{1}{n_2 n_3}\sum_{j_1=1}^{n_1} b_{j_1} = \frac{1}{n_2 n_3}\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2} b_{j_1 j_2} = \frac{1}{n_1 n_2} S\ , \qquad (7)$$

то (6) выражение с учетом (7) упростится к виду

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_2 j_3}\ ,\ \ j_2=1,2,...,n_2\ ,\ \ j_3=1,2,...,n_3\ . \qquad (8)$$

Аналогично этому в результате суммирования (4) по j_2, а затем по j_3, получим соответственно

$$\sum_{j_2=1}^{n_2} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_1 j_3}\ ,\ \ j_1=1,2,...,n_1\ ,\ \ j_3=1,2,...,n_3\ , \qquad (9)$$

$$\sum_{j_3=1}^{n_3} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_1 j_2}\ ,\ \ j_1=1,2,...,n_1\ ,\ \ j_2=1,2,...,n_2\ . \qquad (10)$$

Таким образом, из (8) – (10) следует, что набор (4) – план задачи. Соотношение (4) легко обобщается на случай произвольного числа индексов. В частности, при S=4 соотношение для расчета компонентов плана имеет вид:

$$X_{j_1 j_2 j_3 j_4} = \frac{b_{j_2 j_3 j_4}}{n_1} + \frac{b_{j_1 j_3 j_4}}{n_2} + \frac{b_{j_1 j_2 j_4}}{n_3} + \frac{b_{j_1 j_2 j_3}}{n_4} - \\ - \frac{b_{j_1 j_2}}{n_3 n_4} - \frac{b_{j_1 j_3}}{n_2 n_4} - \frac{b_{j_1 j_4}}{n_2 n_3} - \frac{b_{j_2 j_3}}{n_1 n_4} - \frac{b_{j_2 j_4}}{n_1 n_3} - \frac{b_{j_3 j_4}}{n_1 n_2} + \\ + \frac{b_{j_1}}{n_2 n_3 n_4} + \frac{b_{j_2}}{n_1 n_3 n_4} + \frac{b_{j_3}}{n_1 n_2 n_4} + \frac{b_{j_4}}{n_1 n_2 n_3} - \frac{S}{n_1 n_2 n_3 n_4}\ . \qquad (11)$$

3. Модификация метода нуль – преобразований исходной матрицы стоимостей

Нуль-преобразование исходной матрицы стоимостей для обычной двухиндексной транспортной задачи имеет вид

$$C_{ij}^{(0)} = C_{ij} - \left(\alpha_i + \beta_j\right), \qquad (12)$$

$$\beta_j = \min_i\left\{C_{ij} - \alpha_i\right\},\ \alpha_i = \min_j\left\{C_{ij}\right\}.$$

Полезный эффект, возникающий при использовании этого преобразования, состоит в том, что

$$\min_i\left\{C_{ij}^0\right\} = 0\ ,\ \ j=1,2,...,n\ ,$$

$$\min_j\left\{C_{ij}^0\right\} = 0\ ,\ \ i=1,2,...,m\ .$$

Таким образом, в каждой строке и каждом столбце матрицы стоимостей $\left\{C_{ij}^0\right\}$ появляется по меньшей мере один нулевой элемент. Это приводит к тому, что начальный опорный план ближе к оптимальному, а следовательно, для решения задачи понадобится значительно меньшее число итераций.

Обобщим соотношения (12) на случай транспортной задачи произвольной индексности. При этом нуль-преобразование исходной матрицы стоимостей имеет вид

$$C_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{(0)} = C_{j_1 j_2 \cdots j_s} - \left(\alpha_{j_1 j_3 \cdots j_s}^{(1)} + \alpha_{j_1 j_3 \cdots j_s}^{(2)} + ... + \alpha_{j_1 j_3 \cdots j_s}^{(s)}\right),$$

где

$$\alpha_{j_2 j_3 \cdots j_s}^{(1)} = \min_{j_1}\left\{C_{j_1 j_2 \cdots j_s}\right\},\ \alpha_{j_1 j_3 \cdots j_s}^{(2)} = \min_{j_2}\left\{C_{j_1 j_2 \cdots j_s} - \alpha_{j_2 j_3 \cdots j_s}^{(1)}\right\}$$

$$\alpha_{j_1 j_2 \cdots j_{s-1}}^{(s)} = \min_{j_s}\left\{C_{j_1 j_2 \cdots j_s} - \alpha_{j_2 j_3 \cdots j_s}^{(1)} - ... - \alpha_{j_1 j_2 \cdots j_{s-2} j_s}^{(s-1)}\right\}.$$

4. Выводы

Эффективность метода нуль-преобразований исследована экспериментально при решении двухиндексных и трехиндексных транспортных задач (рис. 1 и 2). Условия задач формировались с помощью имитационной модели. Каждая задача решалась дважды: а) начальный план формируется традиционным методом северо-западного угла; б) начальный план формируется методом нуль – преобразований. Критерий оценки эффективности имеет вид

$$\eta_k(N) = \frac{V_k^{(T)}(N)}{V_k^{(0)}(N)},\ \ k=2,3\ .$$

Здесь $V_k^{(T)}(N)$ – количество итераций улучшения начального плана, полученного традиционным методом до получения решения; $V_k^{(0)}(N)$ – количество итераций улучшения начального плана, полученного методом нуль – преобразований до получения решения; N – размерность задачи.

$$\eta_2 = 1.5 \times 10^{-3} N^{1.5};$$

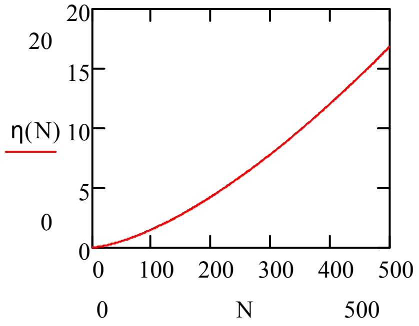

Рис. 1. График зависимости оценки эффективности метода нуль – преобразований от размерности двухиндексной задачи

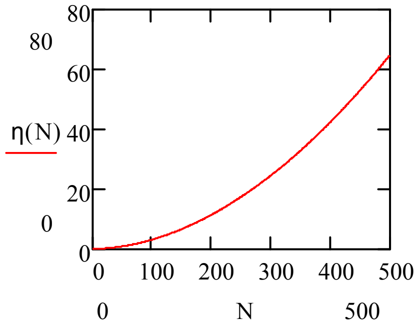

Рис.2. График зависимости оценки эффективности метода нуль - преобразований от размерности трехиндексной задачи

Научная и практическая значимость. Таким образом, использование условий существования решения для многоиндексных задач транспортной логистики позволяет получить начальный опорный план путем расчета по формулам, не прибегая к стандартным трудоемким алгоритмическим процедурам. Для решения многоиндексной задачи управления транспортировками предложен эффективный метод нуль-преобразований матриц для получения начального опорного плана, что существенно ускоряет процедуру решения.

Методика построения начального опорного плана многоиндексной задачи транспортной логистики была разработана для линейных транспортных задач. В дальнейшем планируется усовершенствовать алгоритм для использования его при решении нелинейных транспортных задач, которые возникают в результате, во-первых, учета более адекватных, чем линейные, зависимостей стоимости транспортировки от объема перевозимого груза, и, во-вторых – в результате построения моделей транспортных задач, параметры которых носят стохастический характер.

Литература: 1. *Раскин Л.Г.* Многоиндексные задачи линейного программирования / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. М., 1982. 240с. **2.** *Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. М.: Сов. радио, 1969. 382с. **3.** *Лунгу К.Н.* Линейное программирование. Руководство к решению задач / К.Н. Лунгу. М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. 128с. **4.** *Лукинский В.С.* Модели и методы теории логистики / В.С. Лукинский, И.А. Цвиринько, Ю.В. Малевич. СПб.: ПИТЕР, 2003. 175с.

Поступила в редколлегию 27.05.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Пиротти Е.Л.

Ахиезер Елена Борисовна, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 707-63-51.

Геляровская Оксана Анатолиевна, доцент кафедры компьтерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 707-63-51.

Дунаевская Ольга Игоревна, канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 707-63-51.

Процай Наталья Тимофеевна, канд. техн. наук, доцент кафедры компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 707-63-51.