СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК517.95:519.633

ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ

ДУБА Т.В., КОЛОСОВА С.В.

Розглядається застосування проекційного методу Бубнова-Гальоркіна до початково-крайової задачі для нестаціонарного рівняння теплопровідності з нелокальною умовою. Для таких задач важливим є питання про вибір координатних функцій, на яке ми намагаємося дати відповідь.

Вступ

Актуальність дослідження. Велика кількість явищ у різних областях науки і техніки достатньо повно може бути описана за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних, точні розв'язки яких вдається отримати для досить вузького класу задач. У даній роботі розглядається застосування проекційного методу Бубнова-Гальоркіна до початково-крайової задачі теорії теплопровідності з нелокальною (некласичною) умовою (у нелокальних граничних умовах задається зв'язок значень розв'язку та його похідних у різних точках граничних та внутрішніх многовидів). Такі нелокальні умови зустрічаються досить часто, наприклад, у задачах, що описують процес дифузії частинок у турбулентній плазмі, у процесах розповсюдження тепла у тонкому нагрітому стержні, якщо задано закон зміни загальної кількості тепла стержня, у економічних задачах з рівнянням грошових накопичень тощо.

Метою даної роботи є розробка методу чисельного аналізу для початково-крайової задачі теорії теплопровідності з нелокальною умовою. Застосування проекційного методу Бубнова-Гальоркіна дозволяє отримати розв'язок у аналітичному вигляді, що при проведенні обчислювальних експериментів з різними даними може допомогти зацікавленим структурам робити прогнози та розробляти стратегію своєї поведінки.

1. Постановка задачі

Розглянемо початково-крайову задачу:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_0)+f(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t},\qquad (1)$$

$$\forall x\in(0,l),\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \ u\big|_{x=0}=0,\ \ \int_0^l u(x,t)dx=K(t),\ (2)$$

тут $u(x,t)$ – температура точки x у момент часу t; $\varphi(x)$ - розподіл температур в точках стержня в початковий момент часу $t=0$; $a^2=\text{const}$ – коефіцієнт температуропровідності; $h=\frac{\alpha}{c\rho}=\text{const}$; ρ – густина маси; c – питома теплоємність; α – коефіцієнт теплообміну між поверхнею стержня та навколишнім середовищем з температурою u_0; $K(t)$ – загальна кількість тепла стержня у момент часу t [1, 2]. Шукаємо розв'язок задачі (1), (2) $u(x,t)\in C(\overline{B})$, $\overline{B}=\{(x,t)\,|\,0\le x\le l,\ t\ge 0\}$. При цьому повинні виконуватися умови узгодження

$$\varphi(0)=0,\quad \int_0^l\varphi(x)dx=K(0)\,.\qquad (3)$$

У задачі (1), (2) зробимо заміну:

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)+W(x,t),\qquad (4)$$

$$W(x,t)=\frac{2x}{l^2}K(t),\qquad (5)$$

що приведе до наступної задачі з однорідними крайовими умовами:

$$a^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}-h(\upsilon-u_0)+F(x,t)=\frac{\partial\upsilon}{\partial t},\qquad (6)$$

$$\forall x\in(0,l),\quad t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=\overline{\varphi}(x),\quad \upsilon\big|_{x=0}=0,\quad \int_0^l\upsilon(x,t)dx=0,\quad (7)$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-\frac{2x}{l^2}K(0),$$

де

$$F(x,t)=f(x,t)-\frac{2hx}{l^2}K(t)-\frac{2x}{l^2}K'(t).$$

2. Побудова алгоритму розв'язання задачі за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна

Згідно з методом Бубнова-Гальоркіна [3, 4] наближений розв'язок задачі (6), (7) шукаємо у вигляді

$$\upsilon_n(x,t)=\sum_{k=1}^n a_k(t)\varphi_k(x),\qquad (8)$$

де $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$ – координатні функції (кожна $\varphi_k(x)\subset D(A)$ – області визначення оператора A, відповідного до задачі (6), (7) операторного рівняння, при будь-якому n $\varphi_1,...,\varphi_n$ є лінійно незалежними, послідовність $\varphi_1,...,\varphi_n$ є повною у гільбертовому просторі $L_2(0,l)$; тут

$$A\upsilon=a^2\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}-h(\upsilon-u_0),\quad D(A)=\{\upsilon\,|\,\upsilon\in C^2(B),$$

$$\upsilon\in C(\overline{B}),\ \upsilon\in L^2(0,l)\ \forall t\ge 0,\quad \upsilon(0,t)=0,$$

$$\int_0^l\upsilon(x,t)dx=0\ \ \forall t\ge 0\}).$$

Прирівнюючи нулеві скалярний добуток відхилу рівняння задачі (6), (7) до кожної з координатних функцій $\varphi_1,...,\varphi_n$, маємо:

$$(a^2\frac{\partial^2\upsilon_n}{\partial x^2}-h(\upsilon_n-u_0)+F(x,t)-\frac{\partial\upsilon_n}{\partial t},\varphi_j)=$$
$$=a^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\varphi_k,\varphi_j)-h(\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\varphi_k,\varphi_j)-$$
$$-(\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\varphi_k,\varphi_j)+(F+hu_0,\varphi_j)=0,\ \ j=1,...,n.$$

Звідси отримуємо наступну систему лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами для відшукання функцій $a_k(t),\ \ k=1,...,n$:

$$\sum_{k=1}^{n}a'_k(t)(\varphi_k,\varphi_j)+\sum_{k=1}^{n}a_k(t)[h(\varphi_k,\varphi_j)-$$
$$-a^2(\varphi''_k,\varphi_j)=(F,\varphi_j)+ \tag{9}$$
$$+h(u_0,\varphi_j),\ \ j=1,...,n.$$

Відповідні початкові умови для системи (9) отримуємо таким чином. Початкову функцію $\overline{\varphi}(x)$ зображуємо у вигляді n – ї часткової суми ряду за координатними функціями $\varphi_k(x)$, а саме $\overline{\varphi}(x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k(x)$, та добираємо сталі $\beta_k, k=1,..,n$, з умови $\|\overline{\varphi}(x)-\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k(x)\|^2_{L_2(0,l)}\to\min$.

Ця умова приводить до наступної системи рівнянь відносно β_k:

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k(\varphi_k,\varphi_j)=(\overline{\varphi},\varphi_j),\ \ j=1,...,n. \tag{10}$$

Отже, початкову умову $\upsilon(x,0)=\overline{\varphi}(x)$ записуємо у вигляді $\sum_{k=1}^{n}a_k(0)\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k(x)$, що приводить до співвідношень

$$a_k(0)=\beta_k,\ \ k=1,...,n. \tag{11}$$

Таким чином, отримали для відшукання функцій $a_k(t),\ \ k=1,...,n$, задачу Коші (9), (11).

3. Про вибір координатних функцій

У [5] за координатні функції для розв'язання рівняння $Au=f$, де A – додатно визначений оператор, пропонується взяти систему власних елементів (якщо вона повна) оператора $\overline{A}$, схожого та спорідненого з оператором A. Введемо у розгляд оператор $\overline{A}$:

$$\overline{A}\upsilon=a^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2},\ \ D(\overline{A})=\{\upsilon\,|\,\upsilon(x,t)\in L_2(0,l)$$
$$\forall t\ge0,\ \upsilon(x,t)\in C^2(B),\ \ \upsilon(x,t)\in C(\overline{B}),$$
$$\upsilon(0,t)=0,\ \int_0^1\upsilon(x,t)dx=0\ \ \forall t\ge0\}.$$

Відшукаємо власні числа та власні функції оператора $\overline{A}$. Маємо задачу

$$\phi''(x)+\lambda\phi(x)=0\quad\forall x\in(0,l),\ \ \phi(0)=0,\ \int_0^1\phi(x)dx=0,$$

звідки $\lambda_k=\frac{4\pi^2k^2}{l^2}$, $\phi_k(x)=\sin\frac{2\pi kx}{l}$, $k=1,2,3...$.

Тому що оператори A та $\overline{A}$ є схожими та спорідненими, за координатні функції пропонуємо взяти $\varphi_k(x)=\sin\frac{2\pi kx}{l}$, $k=1,2...$.

4. Обчислювальний експеримент

Добираючи для проведення обчислювальних експериментів дані задачі (1), (2), треба мати на увазі умови узгодження (3). Надалі вважаємо $l=1$. Покладемо $\varphi(x)=-3x^2+6x$, при цьому виконується перша умова узгодженості $\varphi(0)=0$. Крім того, у початковий момент часу $t=0$ маємо загальну кількість тепла стержня $K(0)=\int_0^1(-3x^2+6x)dx=2$. Наведемо деякі можливі вигляди функції $K(t)$, яка повинна задовольняти другу умову узгодження $\int_0^1\varphi(x)dx=K(0)$:

$$K(t)=\{2,\ 2(t+1),\ 2(t^2+1),\ 2(t+1)^2,...\}.$$

Обчислювальний експеримент проведено для $h=0.0155$, $a^2=0,16$ (ці значення відповідають матеріалу стержня – чавун), $K(t)=2(t+1)$, $u_0=0$, $f(x,t)=1$. На рис. 1 – 3 наведені графіки функції $u(x,t)$ у моменти часу $t=0,1,3$.

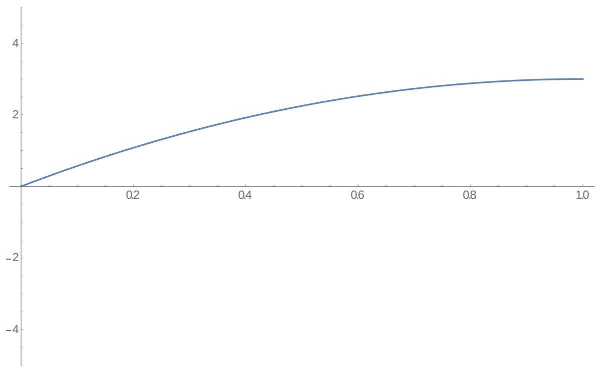

Рис. 1. Графік функції $u(x,t)$ у момент часу $t=0$

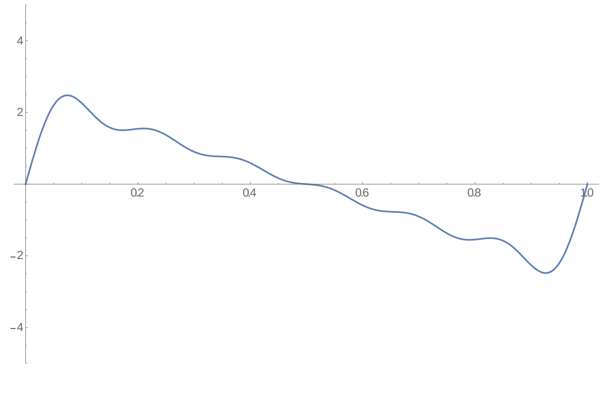

Рис. 2. Графік функції $u(x,t)$ у момент часу $t=1$

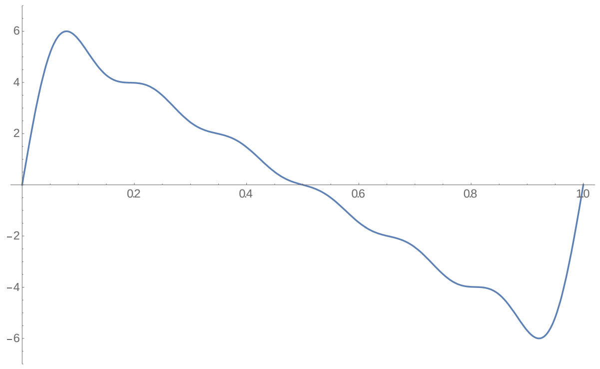

Рис. 3. Графік функції $u(x,t)$ у момент часу $t = 3$

Висновки

Вперше запропоновано для розв'язання початково-крайових задач математичної фізики з нелокальними крайовими умовами застосування проекційного методу Бубнова-Гальоркіна, що надає можливість отримати результати у аналітичному вигляді. Надано пропозиції про вибір координатних функцій для задач з нелокальними умовами. Розроблений метод дозволяє проводити математичне моделювання багатьох технологічних процесів. Цим і визначається наукова новизна та практична значущість роботи.

Література: 1. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294-304. **2.** *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. 688 с. **3.** *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. **4.** *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів: видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. 221 с. **5.** *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.

Transliterated bibliography:

1. *Ionkin N.I.* Reshenie odnojkraevoj zadachi teoriitep-loprovodnosti s neklassicheskimi kraevymi usloviyami // Differencial' nyeuravneniya. 1977. T. 13. № 2. S. 294-304.

2. *Budak B.M., Samarskij A.A., Tihonov A.N.* Sbornik zadach po matematicheskoj fizike. M.: Fizmatlit, 2004. 688 s.

3. *Mihlin S.G.* Variacionnye metody v matematicheskoj fizike. M.: Nauka, 1970. 512 s.

4. *Savula Ya. H.* Chyslovyy analiz zadach matematych-noyifizyky variatsiynymy metodamy. L'viv: vydavnychyytsentr LNU im. I. Franka, 2004. 221 s.

5. *Mihlin S.G.* Chislennaya realizaciya variacionnyh metodov. M.: Nauka, 1966. 432 s.

Надійшла до редколегії 18.04.2017

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Дуба Тетяна Вікторівна, ст. гр. ПМ-13-1 ф-ту інформаційно-аналітичних технологій і менеджменту ХНУРЕ. Наукові інтереси: математична фізика, математичне моделювання, чисельні методи. Захоплення та хобі: мистецтво та література. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (096) 2425488.

Колосова Світлана Василівна, канд. фіз.-мат. наук, проф. кафедри прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи математичної фізики. Захоплення на хобі: театр, мистецтво та література. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021423.

DubaTetyanaVictorivna,Student,gr. PM-13-1 Faculty of information and analytical technologies and management, Kharkiv National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical physics, mathematical modeling, numerical methods. Hobbies and Hobbies: Arts and Literature. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Nauki Ave, 14, tel. (096) 2425488.

Kolosova Svetlana Vasylivna, PhD, prof., Department of Applied Mathematics, KNURE. Scientific interests: mathematical modeling, numerical methods of mathematical physics. Hobbies: theater, art and literature. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Nauki Ave, 14, tel. (057) 7021423.