

# РАДИОЕЛЕКТРОНИКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

# РАДИОЕЛЕКТРОНИКА ТА ТЕЛЕКОММУНІКАЦІИ

# RADIO ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.6, 621.396.96

Величко Е. В.

Канд. физ.-мат. наук, доцент, Таврический государственный агротехнологический университет, Украина,  
E-mail: velichko\_ev@i.ua

## ЛОКАЦИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ПРИ ПОМОЩИ УПРОЩЕННЫХ ДАТЧИКОВ

В статье в двумерной постановке изучается процесс движения фронта волны, создаваемой точечным источником. Источник расположен в одном из слоев двухслойной среды с прямолинейной границей раздела сред. Целью является определение положения источника излучения и времени начала излучения по данным датчиков, расположенных во второй среде на одной прямой, параллельной границе раздела сред. При отношении скоростей распространения сигнала в слоях, близком к 0,75, задача сводится к решению системы линейных уравнений. Приведен пример расчета.

**Ключевые слова:** задача локации, двухслойная среда, аппроксимация, фронт волны, упрощенный датчик.

### ВВЕДЕНИЕ

Проблемам определения положения объекта по результатам данных, полученных многопозиционными измерительными системами, посвящено немало исследований. Это объясняется их широким применением в различных областях: радиолокации, сейсмологии, акустике, гидроакустики, физики элементарных частиц, астрономии и других [1]. Многопозиционная радиолокационная станция – это любая система радиолокационных станций или отдельных позиций, разнесенных в пространстве, в которой совместно обрабатывается получаемая информация об объекте наблюдения. Именно благодаря совместной обработке информации о каждой цели, достигаются основные преимущества многопозиционной радиолокационной станции.

В случае пассивной локации обычно изучаются случаи, когда датчики определяют или расстояние до цели, или направление на источник сигнала, или и то и другое [2–5]. При наличии границы раздела сред между источником излучения и датчиком задача становится намного сложнее [1, 8].

Одним из способов снизить стоимость локационных систем и увеличить их надежность является применение

более простых датчиков. В представленной работе рассматривается случай, когда датчики фиксируют только время прихода фронта волны, причем время, когда начал распространяться сигнал, считается неизвестным. Подобные задачи для однородных сред рассматривались в работах [6, 7]. Для многослойных сред публикации, описывающие способы решения поставленной задачи автору неизвестны.

Наиболее близко к тематике статьи примыкает публикация [9], в которой авторы сводили задачу локации в двухслойной среде при помощи упрощенных датчиков к численной нелинейной оптимизации с выбором нулевого приближения в виде решения для однородной среды. При этом, что существенно, считалось, что часть датчиков расположена в той же среде, где и источник сигнала.

### ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскость, разделенную прямой на две полуплоскости, которые отличаются скоростями распространения сигнала (например, акустического). В определенный момент времени в некоторой точке включается источник, от которого во все стороны начинает распространяться круговая волна. На линии раздела сред

волна меняет форму в силу закона Снелиуса. Во второй среде на одной прямой расположены датчики, которые фиксируют время прихода волны. Ставится задача определения источника излучения и времени, когда сигнал начинает распространяться. Количество датчиков  $n \geq 3$ .

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

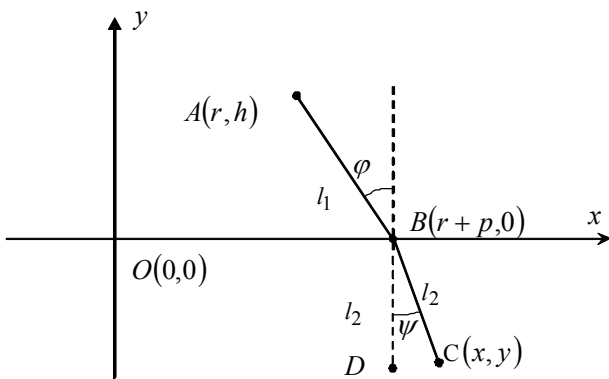
Линия  $y = 0$  является линией раздела сред, причем в области  $y < 0$  скорость волны равна  $v_2$ . Рассмотрим волну, которая в момент времени  $t = T_0$  начинает распространяться с точки  $A(r, h)$  ( $h > 0$ ) со скоростью  $v_1$ . В области  $y < 0$  в точках,  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , находятся датчики. В данной статье ограничимся случаем, когда датчики находятся на прямой  $y = \omega$ , то есть  $y_i = \omega$  при  $i = \overline{1, n}$ . Обычно датчики определяют сдвиг частоты принятого и исходного сигналов, на основании чего делается вывод о расстоянии, пройденном сигналом. В данной статье мы рассматриваем упрощенные датчики, которые определяют только момент времени  $t_i$  прохождения фронта волны. Необходимо по известным величинам  $x_i, y_i, t_i$  найти координаты источника  $A(r, h)$  и время  $T_0$ . При решении задачи считаем, что имеет место закон Снелиуса:

$$\delta = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}.$$

Построим параметрическое уравнение фронта волны, который находится в нижней полуплоскости. Введем следующие обозначения:  $\varphi$  – угол падения волны на границу раздела слоев,  $\psi$  – угол преломления луча,  $l_1$  ( $l_2$ ) – длина пути луча в верхнем (нижнем) слое,  $t_i$  – время, за которое точка фронта волны преодолевает путь  $l_i$ ,  $B$  – точка преломления луча,  $p$  – проекция вектора  $\overline{AB}$  на ось абсцисс,  $C(x, y)$  – положение текущей точки фронта волны в момент времени  $t = t_1 + t_2 + T_0$ . На рис. 1 приведены соответствующие отношения.

С учетом введенных обозначений можем записать следующие равенства:

$$l_1 = v_1 t_1, p = l_1 \sin \varphi = h \cdot \operatorname{tg} \varphi, l_1 = h / \cos \varphi, \sin \psi = \delta \sin \varphi,$$



**Рис. 1.** Схематическое расположение источника сигнала и положение точки фронта волны в некоторый момент времени после преломления

$$\cos \psi = \cos(\arcsin(\delta \sin \varphi)) = \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \varphi}, l_2 = v_2 t_2, \\ t_2 = t - t_1 - T_0 = t - \frac{l_1}{v_1} - T_0 = t - \frac{h}{v_1 \cos \varphi} - T_0.$$

Рассмотрим вспомогательную точку  $D(r + p, -l_2)$ . Вектор  $\overline{BC}$  можно получить из вектора  $\overline{BD}(0, -l_2)$  поворотом на угол  $\psi$ , а, следовательно, его координаты

$$\overline{BC} = (l_2 \sin \psi, -l_2 \cos \psi).$$

Из равенства  $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}$ , получим, что  $C(r + p + l_2 \sin \psi, -l_2 \cos \psi)$ .

Возьмем в качестве параметра угол  $\varphi$  и выразим все величины, которые входят в выражение координат точки  $C$ . В результате получим параметрическое уравнение фронта волны в нижней на полуплоскости:

$$\begin{cases} x = r + h \cdot \operatorname{tg} \varphi + v_2 \left( t - T_0 - \frac{h}{v_1 \cos \varphi} \right) \delta \cdot \sin \varphi, \\ y = -v_2 \left( t - T_0 - \frac{h}{v_1 \cos \varphi} \right) \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \varphi}. \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку фронт волны достигает нижней среды в момент времени  $t = h/v_1 + T_0$ , то в формуле (1) необходимо брать  $t > T_0 + h/v_1$ .

Если  $v_1 > v_2$ , то все лучи, которые достигнут линии раздела сред, перейдут в нижнюю среду. В момент времени  $t$  до границы раздела сред дойдет сигнал, который прошел путь  $l_1 = (t - T_0) \cdot v_1$ , и он будет отвечать максимальному углу падения  $\varphi_{\max}$ , который можно найти из соотношения  $l_1 \cos \varphi_{\max} = h$ . Таким образом, делаем вывод, что

$$\varphi \in \left( -\arccos \frac{h}{(t - T_0)v_1}, \arccos \frac{h}{(t - T_0)v_1} \right).$$

Заметим, что в этом случае

$x_{\max, \min} = r \pm \sqrt{(t - T_0)^2 v_1^2 - h^2}$ , а полуширина фронта волны достигает  $\sqrt{(t - T_0)^2 v_1^2 - h^2}$ .

Если  $v_1 < v_2$ , то для этих двух сред будет существовать угол полного отражения  $\bar{\varphi}$ , такой, что при  $\varphi > \bar{\varphi}$  соответствующие лучи остаются в первой среде. Этот угол можно найти из соотношения  $\delta \sin \bar{\varphi} = 1$ . Равенство  $\bar{\varphi} = \varphi_{\max}$  будет достигаться, если имеет место соотношение

$$\left( \frac{h}{tv_1} \right)^2 + \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 = 1, \text{ то есть при}$$

$$t - T_0 = \bar{t} = \frac{\delta \cdot h}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

Таким образом, в этом случае

$$\varphi \in \begin{cases} \left( -\arccos \frac{h}{tv_1}, \arccos \frac{h}{tv_1} \right) & \text{при } T_0 + \frac{h}{v_1} < t < \bar{t} + T_0, \\ \left( -\arcsin \frac{v_1}{v_2}, \arcsin \frac{v_1}{v_2} \right) & \text{при } t > \bar{t} + T_0. \end{cases}$$

При  $T_0 + \frac{h}{v_1} < t < \bar{t} + T_0$  полуширина фронта волны равна  $\sqrt{(t-T_0)^2 v_1^2 - h^2}$ , а при  $t > \bar{t} + T_0$  она равна  $v_2(t-T_0) - h\sqrt{\delta^2 - 1}$ .

**МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ**

Для приближенного решения задачи локации при фиксированном значении времени  $t$  аппроксимируем кривую, заданную уравнением (1) параболой. Параболу будем строить по трем точкам: двум точкам пересечения кривой с осью  $OY$  и точкой, которая соответствует углу  $\varphi = 0$ . Эти точки имеют координаты:

$$\left( r - \sqrt{(t-T_0)^2 v_1^2 - h^2}; 0 \right), \left( r + \sqrt{(t-T_0)^2 v_1^2 - h^2}; 0 \right), \left( r; -v_2 \left( t - T_0 - \frac{h}{v_1} \right) \right).$$

Уравнение соответствующей параболы имеет вид

$$y = \frac{v_2 x^2}{v_1((t-T_0)v_1 + h)} - \frac{2v_2 x r}{v_1((t-T_0)v_1 + h)} + \frac{v_2(r^2 + h^2 - (t-T_0)^2 v_1^2)}{v_1((t-T_0)v_1 + h)}. \tag{2}$$

Для проверки точности аппроксимации были проведены численные эксперименты. Их результаты показали, что такая аппроксимация будет хорошей, если  $\delta$  близко к 0,75 (рис. 2).

Подставляя в (2) координаты приемников и время получения сигнала, получим систему

$$\omega = \frac{v_2 x_i^2}{v_1((t_i - t_o)v_1 + h)} - \frac{2v_2 x_i r}{v_1((t_i - t_o)v_1 + h)} + \frac{v_2(r^2 + h^2 - (t_i - t_o)^2 v_1^2)}{v_1((t_i - t_o)v_1 + h)}, i = \overline{1, n} \tag{3}$$

для определения неизвестных. Так как неизвестных три, то уравнений (а, следовательно, и количество приемников) должно быть не менее трех. На практике для повышения точности применяют более трех приемников. В этом случае в связи с неточностями измерений система (3) будет, скорее всего, несовместной.

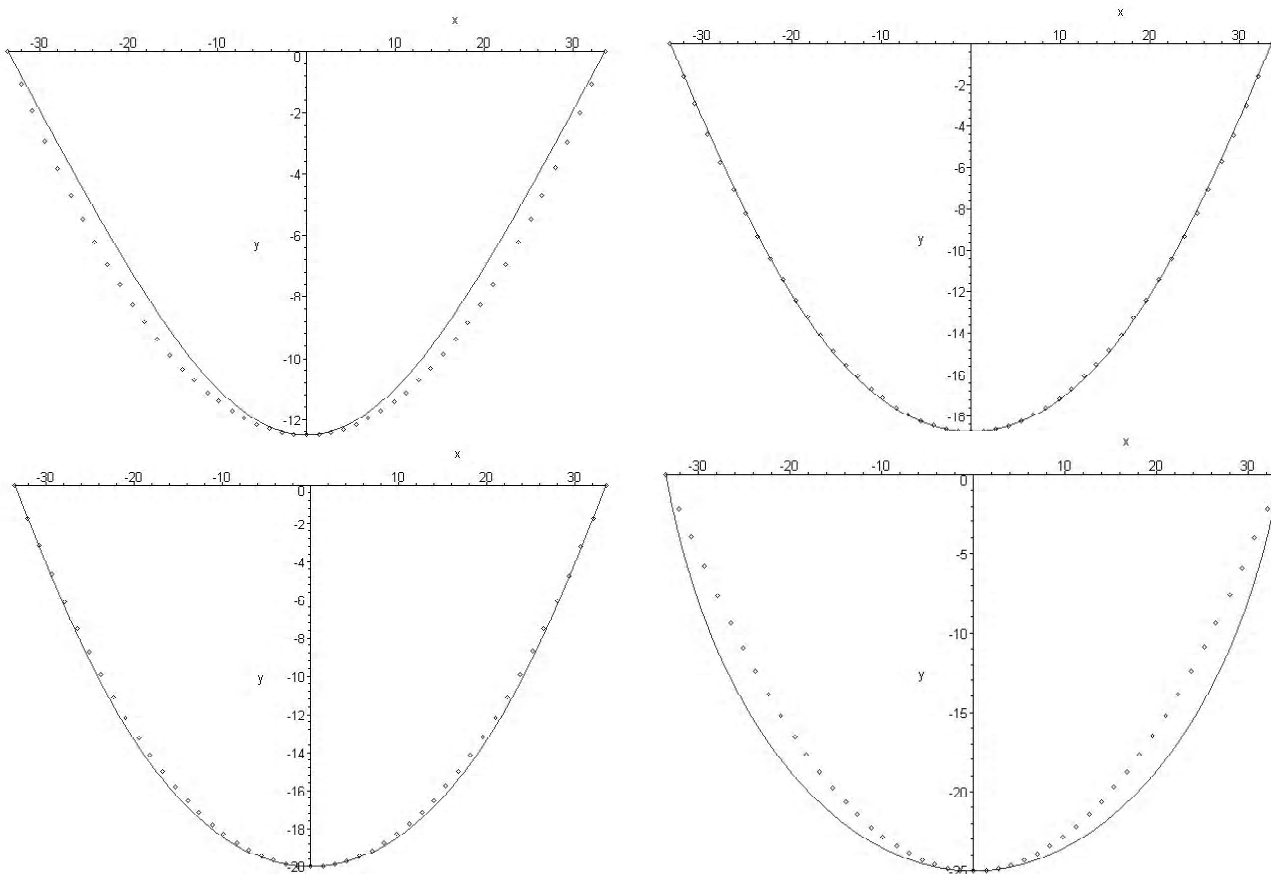


Рис. 2. Сравнение фронта волны во второй среде с параболой для случаев  $\delta = 0,5; 0,75; 0,8; 1$  соответственно

Введем в рассмотрение третью ось, по которой будем откладывать время  $t$ , и рассмотрим геометрическое место точек, которые в этом пространстве образуют фронт волны. Это множество описывается уравнением

$$\omega v_1((t - T_0)v_1 + h) = v_2 x^2 - 2v_2 x r + v_2(r^2 + h^2 - (t - T_0)^2 v_1^2). \quad (4)$$

Перепишем его в виде

$$\alpha x + \beta t + \gamma = v_2 x^2 - v_2 v_1^2 t^2 - \omega v_1^2 t, \quad (5)$$

где

$$\alpha = 2v_2 r, \beta = -2v_2 v_1^2 T_0, \gamma = h\omega v_1 - T_0 \omega v_1^2 - v_2(r^2 + h^2 - T_0^2 v_1^2) \quad (6)$$

Для определения параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  составим функцию невязки

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta t_i + \gamma - v_2 x_i^2 + v_2 v_1^2 t_i^2 + \omega v_1^2 t_i)^2 \rightarrow \min.$$

Находя частные производные и приравнявая их к нулю, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^n t_i x_i + \gamma \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n v_2 x_i^3 - x_i t_i^2 v_1^2 v_2 - \omega v_1^2 t_i x_i, \\ \alpha \sum_{i=1}^n t_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n t_i^2 + \gamma \sum_{i=1}^n t_i + \delta \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n v_2 x_i^2 t_i - t_i^3 v_1^2 v_2 - \omega v_1^2 t_i^2, \\ \alpha \sum_{i=1}^n x_i + \beta \sum_{i=1}^n t_i + \gamma \cdot n = \sum_{i=1}^n v_2 x_i^2 - t_i^2 v_1^2 v_2 - \omega v_1^2 t_i. \end{cases} \quad (7)$$

Решив ее, найдем искомые величины  $r, h, T_0$  по формулам

$$r = \frac{\alpha}{2v_2}, T_0 = \frac{\beta}{-2v_2 v_1^2}, h = \frac{v_1 \omega + \sqrt{v_1^2 \omega^2 - 4v_2(-v_2 T_0^2 v_1^2 + \gamma + T_0 \omega v_1^2 + v_2 r^2)}}{2v_2}, \quad (8)$$

которые есть следствиями соотношений (6).

### ПРИМЕР РАСЧЕТА

Приведем пример решения модельной задачи. Пусть имеется двухслойная среда, линия раздела которой есть прямая  $y = 0$ . В момент времени  $T_0 = 0$  источник, который находится в точке с координатами  $r = 0, h = 10$ , генерирует волну. Скорость движения в среде  $y > 0$  равна  $v_1 = 5$ , а в среде  $y < 0$  равна  $v_2 = 3,76$ . На прямой  $y = \omega = -4$  находятся пять датчиков, которые фиксируют время прихода волны с точностью до 0,001. Зададим углы падения

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{30}, \varphi_2 = \frac{\pi}{20}, \varphi_3 = \frac{\pi}{10}, \varphi_4 = -\frac{\pi}{15}, \varphi_5 = -\frac{\pi}{25}.$$

Из соотношений (1) найдем  $t_i, x_i$  для каждого из пяти датчиков:

$$t_i = \frac{4}{v_2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2 \sin^2(\varphi_i)}{v_1^2}}} + T_0 + \frac{h}{v_1 \cos(\varphi_i)},$$

$$t_1 \approx 3,079, t_2 \approx 3,095, t_3 \approx 3,198, t_4 \approx 3,121, t_5 \approx 3,085,$$

$$x_i = x_0 + y_0 \operatorname{tg}(\alpha_i) + v_2 \left( t_i - t_0 - \frac{y_0}{v_1 \cos(\alpha_i)} \right) \frac{v_2}{v_1} \sin(\alpha_i),$$

$$x_1 \approx 1,366, x_2 \approx 2,058, x_3 \approx 4,206, x_4 \approx -2,759, x_5 \approx -1,643.$$

После подстановки числовых данных система (7) приобретает вид

$$\begin{cases} 34,103286\alpha + 10,346718\beta + 3,228\gamma = -2683,917198, \\ 10,346718\alpha + 48,544336\beta + 15,578\gamma = -12845,27950, \\ 3,228\alpha + 15,578\beta + 5\gamma = -4122,669751. \end{cases}$$

Ее решение  $\alpha = -0,05793, \beta = -70,684, \gamma = -604,272$ . Воспользовавшись соотношениями (3.20), находим искомое время генерации сигнала  $T_0 = 0,3760388800$  и координаты источника  $r = -0,00770469, h = 10,80661270$ . Сравнивая с заданными величинами видим, что достигается удовлетворительное совпадение.

Для увеличения точности локации нужно или увеличивать количество датчиков, либо повысить их точность. Так, если в рассматриваемой задаче увеличить точность датчиков до 0,0001, то после вычислений получим такие результаты  $T_0 = 0,3634145200, r = -0,001222270000, h = 10,85892864$ .

Если точность оставить равной 0,001, но добавить датчик в точке, которая соответствует углу  $\varphi_6 = \frac{\pi}{35}$  ( $t_6 \approx 3,0744, x_6 \approx 1,1702$ ), то получим следующее решение  $T_0 = 0,3643721200, r = -0,000933660000, h = 10,85497575$ .

Для случаев, когда датчики расположены не на одной прямой, данный метод локации, основанный на аппроксимации фронта волны во второй среде параболой, можно обобщить, что и планируется авторами в дальнейшем. Для случаев, когда коэффициент преломления существенно отличается от 0,75, по всей видимости, нужно применять другие аппроксимации.

### ВЫВОДЫ

В статье в двумерной постановке изучается процесс движения фронта волны, создаваемой точечным источником. Источник расположен в одном из слоев двухслойной среды с прямолинейной границей раздела сред. Целью является определение положения источника излучения и времени начала излучения по данным датчиков, расположенных во второй среде на одной прямой, параллельной границе раздела сред. Считается, что датчики позволяют определить только время прихода сигнала.

При отношении скоростей распространения сигнала в слоях, близком к 0,75, показано, что фронт волны можно хорошо аппроксимировать параболой. Предлагается способ идентификации параметров, определяющих эту параболу, который сводится к решению системы линейных уравнений. По этим характеристикам восстанавливается положение источника и время излучения. Указывается, что датчиков может быть произвольное количество, но не менее трех.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бреховских, Л. М. Акустика слоистых сред / Л. М. Бреховских, О. А. Годин. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. – 1989. – 416 с.
2. Бузуверов, Г. В. Алгоритмы пассивной локации в распределенной сети датчиков по разностно-дальномерному методу / Г. В. Бузуверов, О. И. Герасимов // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – № 5. – С. 12–24.
3. Горицкий, Ю. А. Разнесенные измерительные системы: локация групповых объектов/ Горицкий Ю. А. // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – № 2. – С. 47–57.

Величко О. В.

Канд. физ.-мат. наук, доцент, Таврійський державний агротехнологічний університет, Україна

### ЛОКАЦІЯ В ДВОШАРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ ЗА ДОПОМОГОЮ СПРОЩЕНИХ ДАТЧИКІВ

В статті в двовимірній постановці вивчається процес руху фронту хвилі, яка генерується точковим джерелом. Джерело розташовано в одному із шарів двошарового середовища з прямолінійною межею розділу середовищ. Метою є визначення положення джерела випромінювання та часу початку випромінювання за даними датчиків, розташованих в другому середовищі на одній прямій, яка паралельна межі розділу. При відношенні швидкостей близькому до 0,75, задача зведена до розв'язування системи лінійних рівнянь. Наведено приклад розрахунку.

**Ключові слова:** задача локації, двошарове середовище, апроксимація, фронт хвилі, спрощений датчик.

Velichko H. V.

Candidate of Physico-mathematical Sciences, PhD Associate Professor, Taurida State University of Agrotechnological, Ukraine

### LOCATION IN THE TWO-LAYER MEDIUM WITH THE HELPOF SIMPLIFIED DETECTORS

The article deals with the process of the wave front motion in two dimensions. The point source, which creates the wave, is situated in one of the layers of two-layer medium with the straight-line boundary between the mediums. The objects of the article are the location of the emitting source and the determination of the starting time of the emission, with the help of the data, given by the detectors. The detectors are situated in the second medium on the straight-line, which is parallel to the boundary between mediums. It is assumed that the detectors determine only the time of arrival. For the case when the ratio between the signal propagation speeds in the layers is approximately equal to 0,75, it is shown that the wave front can be approximated by the parabola. The proposed technique of the identification of the parameters, which define the parabola, reduces itself to the solution of the system of the linear equations. The position of the source and the time of the emission are determined with the help of these characteristics. It is assumed that one may use any number of the detectors, but not less than three. The numerical example has been given.

**Keywords:** location problem, two-layer medium, approximation, wave front, simplified detector.

### REFERENCES

1. Brehovskih L. M., Godin O. A. Akustika sloistyh sred. Moscow, Nauka, Gl. red. fiz-mat. lit, 1989, 416 p.
2. Buzuverov G. V., Gerasimov O. I. Algoritmy passivnoj lokacii v raspredelennoj seti datchikov po raznostno-dal'nomernomu metodu. *Informacionno-izmeritel'nye i upravljajushhie sistemy*, 2008, No. 5, pp. 12–24.
3. Gorickij Ju. A. Raznesennye izmeritel'nye sistemy: lokacija gruppovyh ob'ektov. *Exponenta Pro. Matematika v prilozhenijah*, 2003, No. 2, pp. 47–57.
4. Karavaev V. V., Sazonov V. V. Statisticheskaja teorija passivnoj lokacii [Tekst]. Moscow, Radio i svjaz', 1987, 237 p.
5. Chernjak V. S. Mnogopozicionnaja radiolokacija. Moscow, Radio i svjaz', 1993, 416 p.

4. *Karavaev, V. V.* Статистическая теория пассивной локации [Текст] / В.В. Караваев, В.В. Сазонов. – М.: Радио и связь, 1987. – 237 с.
5. *Черняк, В. С.* Многопозиционная радиолокация/ Виктор Соломонович Черняк. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.
6. *Величко, О. В.* Розв'язок задачі локації в області з прямолінійною частиною межі / О. В. Величко, А. Г. Кривохата // Вісник ТДТУ. – 2009. – Т. 14. – № 4. – С. 127–131.
7. *Матковский, А. П.* Вычисление координат излучателя по измеренным временным задержкам // Методы и средства анализа пространственно-временных полей : сб.науч.тр. – Львов : ВНИИМИУС, 1987. – С. 89–92.
8. *Давидович, М. В.* Обнаружение объектов в многослойной среде методом волноводного зонда // Биомедицинская радиоэлектроника. Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. – 2009. – №6. – С. 69–77.
9. *Яскевич, С. В.* Локация событий с одновременным уточнением параметров модели двухслойной среды, для случая, когда расстановка приемников пересекает границу / С. В. Яскевич, Ф. Андерссон, А. А. Дучков // Интерэкспо гео-сибирь. – 2011. – Т.2. – № 1. – С. 54–58.

Стаття надійшла до редакції 14.01.2012.

Після доробки 28.01.2012.