ТЕОРІЯ І МЕТОДИ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

THEORY AND METHODS OF AUTOMATIC CONTROL

УДК 681.5.01

Дорофеев Ю. И.[1], Любчик Л. М.[2]

[1]Канд. техн. наук, доцент кафедры системного анализа и управления, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Украина

[2]Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной математики и математического моделирования, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Украина

РОБАСТНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ НАСОСНЫМИ СТАНЦИЯМИ В СИСТЕМЕ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Предложен подход к решению задачи синтеза стабилизирующего робастного управления запасами воды в системе подачи и распределения воды крупного города. Математическая модель системы подачи и распределения воды представлена в виде нелинейной дискретной модели в пространстве состояний с запаздыванием. Предложена методика факторизации матриц модели, описывающих влияние нелинейных термов, которая позволила представить заданные структурные ограничения в виде линейных матричных неравенств. Для подавления влияния возмущений, моделирующих изменения неизвестного, но ограниченного внешнего спроса, одновременно с обеспечением устойчивости замкнутой системы, применена методика инвариантных эллипсоидов, которая позволила сформулировать задачу в терминах линейных матричных неравенств, а синтез управления свести к последовательности задач одномерной выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования. В качестве примера рассмотрен фрагмент системы подачи и распределения воды города Харьков.

Ключевые слова: система подачи и распределения воды, управление запасами воды, метод инвариантных эллипсоидов, прямой метод Ляпунова, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.

НОМЕНКЛАТУРА

ЛМН – линейное матричное неравенство;

СПРВ – система подачи и распределения воды;

A_1 – матрица динамики;

B_t – матрицы влияния управлений;

C – матрица выходов;

D – допустимое множество значений внешних возмущений;

D_i – диаметр трубы, исходящей из резервуара i ;

E – матрица влияния внешних возмущений;

R_i – радиус резервуара i;

U – допустимое множество значений управляющих воздействий;

X – допустимое множество значений состояний;

$d(k)$ – вектор внешних возмущений в момент времени k;

$d^{\max}$ – вектор верхних граничных значений объемов потребляемой воды и утечек;

$d^{\min}$ – вектор нижних граничных значений объемов потребляемой воды и утечек;

g – ускорение свободного падения;

$h_i(k)$ – напор (давление) воды в узле i в момент времени k;

k – номер дискретного момента времени;

m – количество управляемых гидравлических элементов (насосов и вентилей);

n – количество резервуаров;

q – количество секторов потребления;

$q_{in,i}(k)$ – i-й входящий поток воды в момент времени k;

 DOI 10.15588/1607-3274-2014-2-21

$q_{out,j}(k)$ – j-й исходящий поток воды в момент времени k;

$u(k)$ – вектор управляющих воздействий в момент времени k;

$u^{\max}$ – вектор, определяющий максимальные мощности насосов;

$v_i(k)$ – объем воды в резервуаре i в момент времени k;

$x^{\min}$ – вектор, определяющий минимально допустимые объемы воды в резервуарах;

$x^{\max}$ – вектор, определяющий объемы резервуаров;

z_i – высота расположения центра тяжести узла i;

Δt – период дискретизации;

Λ – целочисленная переменная, кратная Δt, которая определяет максимальное значение интервала времени, необходимого для транспортировки воды между резервуарами сети;

α_K – коэффициент Кориолиса.

ВВЕДЕНИЕ

Система водоснабжения представляет собой жизненно необходимую составляющую существования любого города. Управление системами водоснабжения крупных городов по мере их роста становится предметом пристального внимания специалистов в области автоматического управления. Проблема устойчивого развития и управления системой водоснабжения для города Харьков стоит особенно остро. Предпосылками являются территориальная расположенность города в относительно маловодном районе, большое водопотребление населением и промышленностью, групповое водоснабжение целого ряда прилежащих к мегаполису городов, высокая изношенность инженерных коммуникаций, возросшие требования к качеству водоснабжения со стороны населения.

Современные системы водоснабжения, представляющие собой комплекс сооружений для подъема, очистки и подачи потребителям воды, с точки зрения их функционирования можно представить в виде трех относительно независимых по характеру и критериям управления подсистем [1]: источники водоснабжения и водоприемные сооружения, очистные сооружения, СПРВ.

Наиболее дорогостоящей и сложной среди указанных подсистем является СПРВ, которая имеет специфические характеристики, усложняющие ее анализ и управление:

– СПРВ имеет распределенную крупномасштабную архитектуру;

– резервуары и исполнительные элементы имеют эксплуатационные ограничения;

– для подачи воды в высотные здания необходимо обеспечить определенное давление воды, значение которого нелинейно зависит от объема перекачиваемой воды, что приводит к необходимости использования нелинейных моделей;

– транспортирование воды требует определенных временных затрат, что приводит к необходимости учета запаздываний.

Гидравлические элементы, из которых состоят СПРВ, делятся на две категории: управляемые и неуправляемые. Управляемыми являются насосные станции и вентили. Неуправляемыми элементами являются трубы, резервуары, а также узлы, которые соответствуют точкам сети, где водные потоки объединяются или разделяются. Еще одним элементом моделей СПРВ являются секторы потребления, которые позволяют моделировать объемы спроса на воду со стороны потребителей.

Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования СПРВ необходимо создание запасов питьевой воды. Управление запасами воды заключается в определении объемов воды, которую необходимо закачать в резервуары, и моментов времени, когда необходимо это делать. В системах управления запасами воды предусматривается периодический контроль состояния через равные промежутки времени, а момент принятия решения о пополнении запаса обычно совпадает с началом каждого периода.

В настоящее время в большинстве случаев управление СПРВ осуществляется с помощью эвристических правил и «исторически сложившихся» стратегий, которые являются результатом многолетнего эмпирического опыта. Безусловно, эти стратегии вцелом являются адекватными, однако они не гарантируют оптимальной политики управления в современных крупномасштабных сетях. В связи с этим весьма актуальной является задача разработки оптимальных стратегий управления системами водоснабжения, в основе которых лежат математические модели работы сети и методы современной теории автоматического управления.

Целью настоящей работы является синтез робастной стабилизирующей стратегии управления запасами воды в системе централизованного водоснабжения, гарантирующей полное и своевременное удовлетворение неизвестных, но ограниченных объемов потребления воды при условии минимизации затрат на производство и транспортировку воды с учетом заданных эксплуатационных ограничений.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [2] представлены различные подходы к построению математических моделей СПРВ. В настоящей работе в качестве переменных состояний модели рассматриваются объемы воды в резервуарах, измеряемые в м^3, и величины давления (напора) воды в исходящих из резервуаров потоках, измеряемые в м. Предполагается, что структура СПРВ известна, а состояния доступны непосредственному измерению. В качестве управляющих переменных выступают объемы воды, перекачиваемые через управляемые гидравлические элементы в текущем периоде, измеряемые в м^3. Внешними возмущениями являются объемы потребляемой воды и объемы утечек за период времени Δt, также измеряемые в м^3.

Для любого узла сети можно записать уравнение баланса массы в виде разностного уравнения, учитывающего все входящие и исходящие потоки:

$$v_i(k+1) = v_i(k) + \sum_i q_{in,i}(k) - \sum_j q_{out,j}(k), \quad i = \overline{1,n}.$$

Связь между объемом перекачиваемой воды и напором воды в потоке определяется уравнением Бернулли, которое выражает закон сохранения механической энергии в жидкости и может быть записано для любых двух произвольных узлов сети i и j по ходу потока:

$$h_i(k)+\frac{8\alpha_K\rho}{\pi^2 D_i^4}u_i(k)^2+\rho g z_i=h_j(k)+\frac{8\alpha_K\rho}{\pi^2 D_j^4}d_j(k)^2+\rho g z_j, \quad (1)$$

где $u(k)\in\mathbf{R}^m$; $d(k)\in\mathbf{R}^q$.

Напор воды в потоке, исходящем из резервуара, имеющего форму цилиндра, зависит от объема воды и радиуса резервуара:

$$h_i(k)=\frac{1}{\pi R_i^2}v_i(k). \quad (2)$$

Чтобы избавиться в уравнениях (1) от постоянных величин z введем переменные $\bar h_j(k)=h_j(k)+\rho g(z_j-z_i)$ и запишем уравнения с учетом (2) в следующем виде:

$$\bar h_j(k)=\frac{1}{\pi R_i^2}v_i(k)+F_i u_i^2(k)+H_j d_j^2(k), \quad (3)$$

где $F_i\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $F_1=\frac{8\alpha_K\rho}{\pi^2 D_1^4}\cdot\mathrm{diag}(1,0,...,0)$, ...,

$F_m=\frac{8\alpha_K\rho}{\pi^2 D_m^4}\cdot\mathrm{diag}(0,...,0,1)$, $H_j\in\mathbf{R}^{n\times q}$,

$H_1=-\frac{8\alpha_K\rho}{\pi^2 D_1^4}\cdot\mathrm{diag}(1,0,...,0)$, ..., $H_q=-\frac{8\alpha_K\rho}{\pi^2 D_q^4}\cdot\mathrm{diag}(0,...,0,1)$.

Представим вектор $u2(k)=\{u_i^2(k)\}$, $i=\overline{1,m}$, элементами которого являются значения управляющих воздействий в квадрате, в следующем виде:

$$u2(k)=e_1^u u^{\mathrm T}(k)\cdot E_1^u\cdot u(k)+...+e_m^u u^{\mathrm T}(k)\cdot E_m^u\cdot u(k),$$

где $e_i^u\in\mathbf{R}^{m\times1}$: $e_1^u=(1,0,...,0)^{\mathrm T}$, ..., $e_m^u=(0,...,0,1)^{\mathrm T}$, $E_i^u\in\mathbf{R}^{m\times m}$: $E_1^u=\mathrm{diag}(1,0,...,0)$, ..., $E_m^u=\mathrm{diag}(0,...,0,1)$.

Аналогичным образом представим вектор $d2(k)=\{d_j^2(k)\}$, $j=\overline{1,q}$, элементами которого являются значения внешних возмущений в квадрате:

$$d2(k)=e_1^d d^{\mathrm T}(k)\cdot E_1^d\cdot d(k)+...+e_q^d d^{\mathrm T}(k)\cdot E_q^d\cdot d(k),$$

где $e_i^d\in\mathbf{R}^{q\times1}$: $e_1^d=(1,0,...,0)^{\mathrm T}$, ..., $e_q^d=(0,...,0,1)^{\mathrm T}$, $E_i^d\in\mathbf{R}^{q\times q}$: $E_1^d=\mathrm{diag}(1,0,...,0)$, ..., $E_q^d=\mathrm{diag}(0,...,0,1)$.

Тогда нелинейные слагаемые в уравнениях (3) могут быть представлены в виде кусочно-непрерывных нелинейных функций: первая зависит от дискретного времени и вектора управлений $h_u(k,u):\mathbf{R}^{m+1}\to\mathbf{R}^n$, вторая – от дискретного времени и вектора возмущений $h_d(k,d):\mathbf{R}^{q+1}\to\mathbf{R}^n$:

$$h_u(k,u)=\sum_{i=1}^{m}F_i\cdot u2(k)=\sum_{i=1}^{m}F_i\cdot\Sigma_u(k),$$

$$h_d(k,d)=\sum_{j=1}^{q}H_j\cdot d2(k)=\sum_{j=1}^{q}H_j\cdot\Sigma_d(k),$$

где $\Sigma_u(k)=\sum_{i=1}^{m}e_i^u u^{\mathrm T}(k)E_i^u u(k)$, $\Sigma_d(k)=\sum_{j=1}^{q}e_j^d d^{\mathrm T}(k)E_j^d d(k)$.

Для моделирования запаздываний, связанных с транспортировкой воды от источников до резервуаров, а затем до потребителей, используется модель дискретной задержки, поскольку предполагается, что значения интервалов времени, требуемых для транспортировки воды по каждому участку сети, известны и не меняются в процессе функционирования.

Тогда математическая модель СПРВ может быть представлена в виде нелинейной дискретной модели в пространстве состояний с запаздыванием следующего вида:

$$x(k+1)=A_1x(k)+\sum_{t=0}^{\Lambda}B_t u(k-t)+Ed(k)+h_u^x(k,u)+h_d^x(k,d), \quad (4)$$

где $x(k)=\left[v(k)^{\mathrm T},\bar h(k)^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^{2n}$ – составной вектор состояний модели; $A_1\in\mathbf{R}^{2n\times2n}$; $E\in\mathbf{R}^{2n\times q}$; $B_t\in\mathbf{R}^{2n\times m}$, $t=\overline{0,\Lambda}$; $h_u^x:\mathbf{R}^{m+1}\to\mathbf{R}^{2n}$, $h_d^x:\mathbf{R}^{q+1}\to\mathbf{R}^n$,

$$h_u^x=\begin{bmatrix}0_{n\times m}\\ \sum_{i=1}^{m}F_i\end{bmatrix}\cdot\Sigma_u(k),\quad h_d^x=\begin{bmatrix}0_{n\times q}\\ \sum_{j=1}^{q}H_j\end{bmatrix}\cdot\Sigma_d(k).$$

Очевидно, что структура сети определяется матрицами A_1, B_t, E, методика построения которых изложена в работе [3].

В процессе функционирования системы должны выполняться эксплуатационные ограничения:

$$x(k)\in X=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\ x^{\min}\le x\le x^{\max}\right\},$$

$$u(k)\in U=\left\{u\in\mathbf{R}^m:\ 0\le u\le u^{\max}\right\}, \quad (5)$$

где векторы $x^{\min}$, $x^{\max}$ и $u^{\max}$ считаются заданными.

Предполагается, что векторы внешних возмущений удовлетворяют ограничениям:

$$d(k)\in D=\left\{d\in\mathbf{R}^q:\ d^{\min}\le d\le d^{\max}\right\},$$

где векторы $d^{\min}$ и $d^{\max}$ предполагаются известными.

Преобразуем модель (4) к стандартному виду без запаздываний с помощью расширения вектора состояний [4] путем включения в него векторов предыдущих управляющих воздействий, определяющих объемы воды, находящейся в процессе транспортировки. Вектор состояний расширенной модели будет иметь вид:

$$\xi(k) = \left[v(k)^{\mathbf{T}}, \bar{h}(k)^{\mathbf{T}}, u(k-1)^{\mathbf{T}}, u(k-2)^{\mathbf{T}}, ..., u(k-\Lambda)^{\mathbf{T}}\right]^{\mathbf{T}}.$$

Тогда уравнения расширенной модели сети примут вид:

$$\begin{aligned} &\xi(k+1) = A\xi(k) + Bu(k) + Gd(k) + h_u^{ex}(k,u) + h_d^{ex}(k,d), \\ &x(k) = C\xi(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где $h_u^{ex} : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^N$, $h_d^{ex} : \mathbf{R}^{q+1} \to \mathbf{R}^N$, $N = 2n + \Lambda m$; $h_u^{ex}(k,u) = F\Sigma_u(k)$, $h_d^{ex}(k,d) = H\Sigma_d(k)$; матрицы модели имеют соответствующую блочную структуру:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \dots & B_{\Lambda-1} & B_\Lambda \\ 0_{m\times 2n} & 0_{m\times m} & \dots & 0_{m\times m} & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times 2n} & I_{m\times m} & \dots & 0_{m\times m} & 0_{m\times m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{m\times 2n} & 0_{m\times m} & \dots & I_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ I_{m\times m} \\ 0_{m\times m} \\ \vdots \\ 0_{m\times m} \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} E \\ 0_{m\times q} \\ 0_{m\times q} \\ \vdots \\ 0_{m\times q} \end{bmatrix}, \quad C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} I_{2n\times 2n} \\ 0_{m\times 2n} \\ \vdots \\ 0_{m\times 2n} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ \sum_{i=1}^{m} F_i \\ 0_{\Lambda m\times m} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0_{n\times q} \\ \sum_{j=1}^{q} H_j \\ 0_{\Lambda m\times q} \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что пара матриц (A, B) является стабилизируемой, а нелинейные функции являются ограниченными и удовлетворяют квадратичным неравенствам [5]:

$$h_u^{ex\,\mathrm{T}}(k,u) h_u^{ex}(k,u) \le \alpha_u^2 \Sigma_u^{\mathrm{T}}(k) F^{\mathrm{T}} F \Sigma_u(k) \le$$

$$\le \alpha_u^2 u^{\mathrm{T}}(k) \left(\sum_{i=1}^{m} e_i^u u^{\mathrm{T}}(k) E_i^u \right)^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} F \left(\sum_{i=1}^{m} e_i^u u^{\mathrm{T}}(k) E_i^u \right) u(k) \le$$

$$\le \alpha_u^2 u^{\mathrm{T}}(k) \left(\sum_{i=1}^{m} e_i^u u^{\max} E_i^u \right)^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} F \left(\sum_{i=1}^{m} e_i^u u^{\max} E_i^u \right) u(k) \le$$

$$\le \alpha_u^2 u^{\mathrm{T}}(k) \Sigma_u^{\max\,\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} F \Sigma_u^{\max} u(k),$$

$$h_d^{ex\,\mathrm{T}}(k,d) h_d^{ex}(k,d) \le \alpha_d^2 d^{\mathrm{T}}(k) \Sigma_d^{\max\,\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} H \Sigma_d^{\max} d(k),$$

где $\Sigma_u^{\max} = \sum_{i=1}^{m} e_i^u u^{\max} E_i^u$, $\Sigma_d^{\max} = \sum_{j=1}^{q} e_j^d d^{\max} E_j^d$, $\alpha_u > 0, \alpha_d > 0$ – некоторые скаляры.

Для системы (6) рассматривается задача синтеза робастной относительно неопределенных, но ограниченных внешних воздействий $d(k) \in D$, стратегии управления запасами, обеспечивающей для любого начального состояния $x(0) \in X$ минимизацию критерия качества, который гарантирует безопасность работы системы, а также асимптотическую робастную устойчивость замкнутой системы при условии выполнения заданных ограничений на состояния и управления (5).

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Выбор модели управления запасами определяется характером спроса со стороны внешних потребителей. В настоящее время для синтеза стратегии управления запасами с заданной моделью спроса широко применяется метод прогнозирующего управления [6], основанный на решении оптимизационной задачи, в которой последовательность управлений вычисляется в каждый момент времени так, чтобы минимизировать некоторый критерий качества, определяемый прогнозируемыми состояниями системы на некотором временном горизонте. После определения последовательности управляющих воздействий только первый ее элемент используется для управления в текущий момент времени. Затем измеряется новое состояние системы и процедура повторяется, т.е. реализуется принцип отступающего горизонта. Указанный подход позволяет строить управление как в программном виде, так и в виде обратной связи, а также учитывать ограничения на состояния и управления.

Однако, на практике, как правило, отсутствует информация для построения адекватной модели внешнего спроса, которая необходима для синтеза прогнозирующего управления. Одним из подходов к решению задачи управления запасами в условиях неопределенности спроса является использование концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий [7]. При этом соответствующая модель спроса характеризуется интервальной неопределенностью.

В последнее десятилетие сформировался новый подход к рассматриваемой проблематике, основанный на концепции инвариантных множеств. Инвариантные множества широко используются в различных задачах теории автоматического управления в динамических системах при наличии неопределенностей [8]. Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяются эллипсоиды вследствие их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова.

В рамках метода инвариантных эллипсоидов [9] в качестве технического средства используется математический аппарат ЛМН [10]. После того, как были развиты вычислительные методы, основанные на идеях выпуклой оптимизации, и для их реализации были разработаны соответствующие алгоритмы и программное обеспечение, ЛМН стали рассматриваться в качестве общего метода анализа и синтеза линейных систем как в непрерывном, так и в дискретном случае. Однако в большинстве работ, посвященных задаче подавления ограниченных внешних возмущений, техника ЛМН применяется для подавления возмущений, ограниченных в какой-либо норме. Тогда как спецификой задач управления запасами воды является неотрицательность значений переменных и наличие эксплуатационных ограничений, что приводит к необходимости учета несимметричных ограничений на значения внешнего спроса, состояний и управляющих воздействий.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Согласно теореме об аппроксимации произвольных выпуклых множеств, не обладающих свойством симметрии относительно начала координат [11], множество D может быть аппроксимировано эллипсоидом:

$$E(d^*, P_d) = \left\{ d \in \mathbf{R}^q : \left(d(k) - d^*\right)^{\mathrm{T}} P_d^{-1} \left(d(k) - d^*\right) \le 1 \right\},$$

матрица которого P_d и вектор d^*, определяющий координаты центра, определяются на основании известных граничных значений объемов потребляемой воды:

$$P_d = \operatorname{diag}\left(\frac{q^2}{4}(d_1^{\max} - d_1^{\min})^2, \ldots, \frac{q^2}{4}(d_q^{\max} - d_q^{\min})^2 \right),$$

$$d^* = \frac{1}{2}\left(d^{\min} + d^{\max}\right).$$

Аналогично выполним аппроксимацию множества X эллипсоидом максимального объема

$$E(x^*, P_x) = \left\{ x \in \mathbf{R}^{2n} : \left(x(k) - x^*\right)^{\mathrm{T}} P_x^{-1} \left(x(k) - x^*\right) \le 1 \right\}, \quad (7)$$

у которого вектор x^*, определяющий координаты центра, определим позднее, а матрица эллипсоида P_x вычисляется на основании векторов $x^{\min}$ и $x^{\max}$:

$$P_x = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{4}\left(\min\left\{x_1^* - x_1^{\min}, x_1^{\max} - x_1^*\right\}\right)^2, \ldots, \right.$$

$$\left. \ldots, \frac{1}{4}\left(\min\left\{x_n^* - x_n^{\min}, x_n^{\max} - x_n^*\right\}\right)^2 \right).$$

Построим закон управления в виде нестационарной линейной обратной связи по сигналу рассогласования между наличным и страховым уровнями запаса воды:

$$u(k) = K(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right), \quad (8)$$

где $K(k) \in \mathbf{R}^{m \times N}$ – нестационарная матрица коэффициентов обратной связи в момент k.

Значения элементов вектора ξ^*, определяющего уровень страховых запасов воды, вычисляются на основании средних значений объемов потребления с помощью продуктивной модели Леонтьева:

$$\xi^* = \left[v^{*\mathrm{T}}, 0_{1\times n}, \underbrace{v^{*\mathrm{T}}, \ldots, v^{*\mathrm{T}}}_{\Lambda} \right]^{\mathrm{T}},$$

$$v^* = (I - \Pi)^{-1} d^{\mathrm{mean}},$$

$$d_j^{\mathrm{mean}} = \begin{cases} \frac{q}{2}(d_j^{\max} + d_j^{\min}), & j = \overline{1, q}, \\ 0, & j = \overline{q+1, n}, \end{cases} \quad (9)$$

где Π – матрица смежности ориентированного графа, описывающего модель сети.

Значения элементов вектора x^*, определяющего координаты центра эллипсоида (7) будут равны $x^* = \left[v^{*\mathrm{T}}, 0_{1\times n} \right]^{\mathrm{T}}$.

Расширенную модель замкнутой системы для управления (8) представим в виде:

$$\xi(k+1) = A_f(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) + A\xi^* + G\left(d(k) - d^*\right) +$$

$$+ Gd^* + h_u^{ex}(k, u) + h_d^{ex}(k, d),$$

$$x(k) = C\xi(k), \qquad A_f(k) = A + BK(k). \quad (10)$$

Оптимальное управление запасами воды в СПРВ сводится к задаче построения стратегии управления потоками воды от источников к потребителям с целью полного и своевременного удовлетворения спроса на воду при условии оптимизации критериев качества, обеспечивающих безопасность и устойчивость работы системы.

Для безопасного функционирования системы водоснабжения и минимизации утечек, а также поддержания высокого качества воды ее объемы в резервуарах и величины напора не должны превышать максимально возможных и не опускаться ниже минимально допустимых, то есть быть приближенными к значениям, определяющим размер страховых запасов. Для математического выражения данного критерия в виде квадратичной функции в случае бесконечного временного горизонта используется следующее выражение:

$$J_1^{\infty}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} R_{\xi} \left(\xi(k) - \xi^*\right),$$

где $R_{\xi} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ – положительно определенная диагональная весовая матрица, элементы которой определяют штрафы за отклонение текущих значений уровня воды от страховых.

Экономические затраты обусловлены затратами на химическую обработку воды и на электроэнергию, необходимую для перекачивания воды с помощью насосов. Критерий, учитывающий стоимость производства и транспортировки воды, может быть описан следующим выражением:

$$J_2^{\infty}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{\mathrm{T}}(k) R_u u(k),$$

где $R_u \in \mathbf{R}^{m \times m}$ – положительно определенная диагональная весовая матрица.

Регулирование мощности насосов должно осуществляться плавно, чтобы избежать нежелательных переходных процессов в герметичных трубах, что может привести к их повреждению. Для обеспечения эффекта сглаживания скачков управляющих воздействий предлагается критерий следующего вида:

$$J_3^{\infty}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u^{\mathrm{T}}(k) R_{\Delta} \Delta u(k),$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1),$$

где $R_{\Delta} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ – положительно определенная диагональная весовая матрица.

В результате критерий качества синтезируемой системы управления будет иметь вид:

$$J^{\infty}(k) = J_1^{\infty}(k) + J_2^{\infty}(k) + J_3^{\infty}(k). \qquad (11)$$

Стабилизирующие алгоритмы управления, как правило, основаны на оценивании верхнего граничного значения критерия качества с помощью функции Ляпунова. Определим квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (10):

$$V\left(\xi(k) - \xi^*\right) = \left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} P(k) \left(\xi(k) - \xi^*\right), \qquad (12)$$

где $P(k) = P^{\mathrm{T}}(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ – симметрическая положительно определенная матрица.

В соответствии с прямым методом Ляпунова вычислим первую разность функции (12) по k в силу системы (10) и потребуем выполнения следующего неравенства:

$$V\left(\xi(k+1) - \xi^*\right) - V\left(\xi(k) - \xi^*\right) \le -J^{\infty}(k). \qquad (13)$$

Если неравенство (13) выполняется $\forall k \ge 0$, то функция $V\left(\xi(k) - \xi^*\right)$ определяет верхнее граничное значение критерия (11) [12]:

$$\max_{d(k) \in E(d^*,\, P_d)} J^{\infty}(k) \le V\left(\xi(k) - \xi^*\right). \qquad (14)$$

Управляющие воздействия $u(k)$ будем искать из условия минимизации верхней оценки критерия (11), что позволяет упростить решение задачи. Тогда в соответствии с (14) найдем управляющие воздействия $u(k)$ из условия минимизации функции Ляпунова:

$$u(k) = \arg \min_{u(k) \in U} V\left(\xi(k) - \xi^*\right).$$

В соответствии с методом инвариантных эллипсоидов [8] их можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. Для оценки степени влияния возмущений $d(k)$ на выходы $x(k)$ удобно использовать инвариантные эллипсоиды вида:

$$E(\xi^*, P(k)) = \left\{ \xi \in \mathbf{R}^N : \left(\xi - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} P^{-1}(k) \left(\xi - \xi^*\right) \le 1 \right\}, \qquad (15)$$

которые аппроксимируют множества достижимости замкнутой системы (10) при действии возмущений $d(k) \in E(d^*, P_d)$. В соответствии с [12] введем матричную переменную:

$$Q(k) = \gamma(k) P^{-1}(k), \qquad (16)$$

где $\gamma(k)$ – положительный скаляр.

Тогда задача синтеза робастного стабилизирующего управления заключается в вычислении в каждый дискретный момент времени k матрицы коэффициентов обратной связи $K(k)$, которая стабилизирует замкнутую систему (10) и обеспечивает минимизацию по критерию следа эллипсоида (15). Соответствующий результат представлен следующей теоремой.

Т е о р е м а. Рассмотрим систему (6), замкнутую с помощью закона управления (8) при ограничениях (5), и пусть нестационарные матрицы $P(k) = \gamma(k) Q^{-1}(k)$ и

$$K(k) = Y(k) Q^{-1}(k) \qquad (17)$$

получены в результате решения оптимизационной задачи:

$$\min_{Q(k), Y(k), \alpha_u, \alpha_d, \tau_1, \tau_2, \tau_3} \gamma(k) \qquad (18)$$

при ограничениях на матричные переменные $Q(k) = Q^{\mathrm{T}}(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}$, $Y(k) \in \mathbf{R}^{m \times N}$ и скалярные параметры $\gamma(k)$, α_u, α_d, τ_1, τ_2, τ_3:

$$\gamma(k) > 0, \quad \tau_1 \ge 0, \quad \tau_2 \ge 0, \quad \tau_3 \ge 0, \qquad (19)$$

$$Q(k) \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & \left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\xi(k) - \xi^*\right) & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad (20)$$

$$\begin{bmatrix}
Q(k) & Y^{\mathrm{T}}(k)R_{\Delta}K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta^{\mathrm{T}}(k) & \Theta^{\mathrm{T}}(k) & 0 & Q(k)R_{\xi}^{1/2} & Y^{\mathrm{T}}(k)R_{\Sigma}^{1/2} & Y^{\mathrm{T}}(k)\Sigma_u^{\max\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} \\
K^{\mathrm{T}}R_{\Delta}Y(k) & -\gamma(k)K^{\mathrm{T}}R_{\Delta}K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (A-I)^{\mathrm{T}} & (A-I)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\gamma(k)\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & I & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma(k)\tau_2 I & 0 & 0 & I & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_d^{\max\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H\Sigma_d^{\max} & -\dfrac{\gamma(k)}{\tau_2\alpha_d^2}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Theta(k) & 0 & A-I & I & I & 0 & 0 & I & G^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Theta(k) & 0 & A-I & I & I & 0 & 0 & G & Q(k) & \gamma(k)GP_d^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)P_d^{1/2}G^{\mathrm{T}} & \gamma(k)\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\
R_{\xi}^{1/2}Q(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)I & 0 & 0 \\
R_{\Sigma}^{1/2}Y(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)I & 0 \\
F\Sigma_u^{\max}Y(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\gamma(k)}{\tau_1\alpha_u^2}I
\end{bmatrix} \succeq 0, \quad (21)$$

где $\Theta(k) = A(k)Q(k) + BY(k)$, $K = K(k-1)$, $R_{\Sigma} = R_u + R_{\Delta}$,

$$\begin{bmatrix} \gamma(k)P_x & \gamma(k)C \\ \gamma(k)C^{\mathrm{T}} & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (22)$$

$$Y(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) \succeq 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}(k)\left(\left(u^{\max}\right)^{+}\right)^{\mathrm{T}}\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}(k)\left(\left(u^{\max}\right)^{+}\right)^{\mathrm{T}}\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\xi(k)-\xi^*\right)\left(u^{\max}\right)^{+}Y(k) & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (24)$$

где «+» – псевдообращение Мура-Пенроуза.

Если задача (18)–(24) имеет решение, то система (6), замкнутая с помощью закона управления (8), для любого начального состояния $x(0) \in X$ и неопределенного, но ограниченного, внешнего возмущения $d(k) \in E(d^*, P_d)$ является асимптотически робастно устойчивой при ограничениях (5).

Доказательство теоремы аналогично приведенному в работе [13].

Таким образом, задача синтеза робастного стабилизирующего управления запасами воды в СПРВ, описываемой нелинейной дискретной моделью (4) в пространстве состояний, при наличии транспортных запаздываний в условиях неизвестного, но ограниченного внешнего спроса сводится к задаче минимизации линейной функции (18) при ограничениях в виде ЛМН (19)–(24), которая при фиксированных значениях скалярных параметров α_u, α_d, τ_1, τ_2, τ_3 является задачей полуопределенного программирования.

Если оптимизационная задача (18)–(24) имеет решение, то найденное в соответствии с (8), (17) управляющее воздействие применяется для управления СПРВ в текущий момент времени. Затем измеряется новое значение вектора состояний и, в соответствии с принципом отступающего горизонта, задачи полуопределенного программирования и одномерной выпуклой оптимизации решаются в реальном времени для вычисления нового значения матрицы коэффициентов обратной связи и, соответственно, нового управляющего воздействия.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В качестве примера рассмотрим фрагмент СПРВ города Харьков, изображенный на рис. 1. Он состоит из наземного источника, трех насосных станций (u_2, u_4, u_5), двух подкачивающих насосов (u_1, u_3), пяти резервуаров $(v_1,...,v_5)$ и четырех секторов потребления $(d_1,...,d_4)$.

В табл. 1, 2 и 3 приведены значения параметров рассматриваемого фрагмента СПРВ.

Технологическая матрица Π совпадает с матрицей смежности графа $G = (\{1,2,3,4,5\}, \{(2,1),(4,3),(5,2),(5,4)\})$, описывающего модель сети.

Выберем период дискретизации равным 1 час. Пусть заданы значения интервалов, требуемых для перекачивания воды $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = 1$, $\Lambda_5 = 3$, а также граничные значения объемов потребления и утечек воды $d^{\min} = [90, 60, 70, 60]^{\mathrm{T}}$, $d^{\max} = [150, 100, 110, 120]^{\mathrm{T}}$. Моделирование осуществлялось в течение 24 периодов, что соответствует суткам. С целью учета суточных колеба-

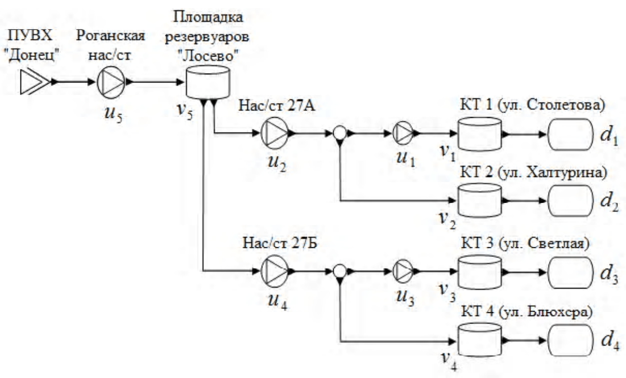


Рисунок 1 – Фрагмент системы подачи и распределения воды города Харьков

Таблица 1 – Характеристики резервуаров

Название	Переменная	Минимальный объем воды (м^3)	Максимальный объем воды (м^3)	Относительная высота z (м)
КТ 1	v_1	50	500	156,40
КТ 2	v_2	50	500	120,98
КТ 3	v_3	50	500	144,91
КТ 4	v_4	50	500	146,97
«Лосево»	v_5	300	3000	180,08

Таблица 2 – Граничные значения напора воды в системе

Название	Переменная	Минимальный напор воды (м)	Максимальный напор воды (м)
КТ 1	h_1	3,5	5,5
КТ 2	h_2	3,0	5,0
КТ 3	h_3	3,5	5,5
КТ 4	h_4	3,0	7,0

Таблица 3 – Характеристики насосов

Название	Переменная	Минимальная мощность (м^3/час)	Максимальная мощность (м^3/час)	Относительная высота z (м)
Насос КТ 1	u_1	0	150	156,40
Нас/ст 27 А	u_2	0	200	160,50
Насос КТ 3	u_3	0	150	144,91
Нас/ст 27 Б	u_4	0	200	162,38
Роганская нас/ст	u_5	0	400	178,08

ний значения объемов потребляемой воды моделировались как нормально распределенные случайные величины с изменяющимся средним значением: $d_1 \to N(m_1, 7)$, $m_1 \in [60, 120]$, $d_2 \to N(m_2, 4)$, $m_2 \in [30, 70]$, $d_3 \to N(m_3, 6)$, $m_3 \in [50, 100]$, $d_4 \to N(m_4, 3)$, $m_4 \in [20, 60]$.

Значения страховых уровней запаса воды, вычисленные в соответствии с (9), равны $v^* = [364, 588, 276, 446, 1034]^{\mathrm{T}}$. Выберем начальные условия $v(0) = [400, 500, 400, 500, 2000]^{\mathrm{T}}$ и значения элементов диагональных весовых матриц $r_\xi = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$, $r_u = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$, $r_\Delta = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Моделирование выполнено в среде MATLAB. Численное решение задачи (18)–(24) получено с помощью свободно распространяемого пакета CVX [14]. Графики переходных процессов для узла 1 при $\alpha_u = \alpha_d = 0{,}15$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ и стохастическом внешнем спросе приведены на рис. 2. На рис. 3 представлена фазовая траектория в пространстве состояний, определенном для резервуаров 1, 2 и 3.

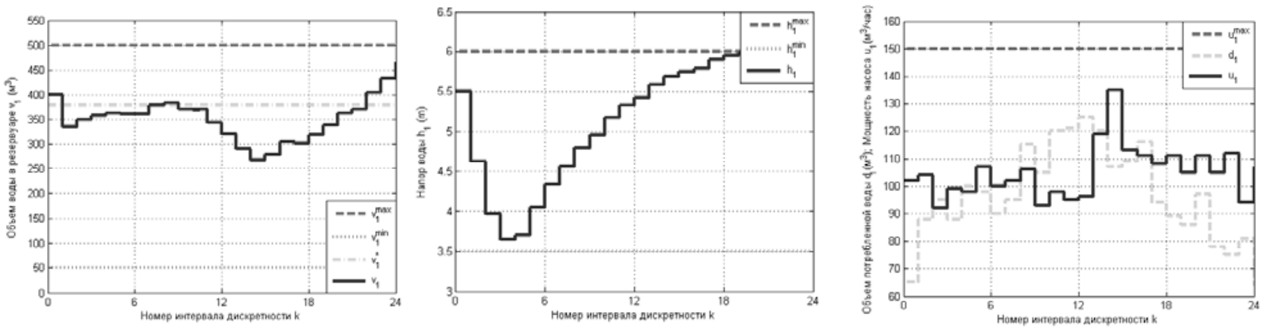
6 ОБСУЖДЕНИЕ

Значения весовых матриц R_ξ, R_u, R_Δ были выбраны из условия разрешимости оптимизационной задачи (18)–(24) и определяют размер эллипсоида, аппроксимирующего мно-жество достижимости замкнутой системы (10) при действии возмущений $d(k) \in E(d^*, P_d)$.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод об эффективности предложенного подхода к решению задачи синтеза робастной стабилизирующей стратегии управления запасами воды в СПРВ, поскольку значения объемов воды в резервуарах, а также напора воды в трубах в условиях стохастически изменяющихся объемов потребления воды находятся в пределах заданных ограничений, а объемы перекачиваемой воды не превышают максимальных возможностей насосов.

ВЫВОДЫ

В работе предложен подход к решению задачи построения робастного стабилизирующего управления запасами воды в централизованной системе подачи и распределения воды. Основными особенностями рассмотренной задачи являются: нелинейность математической модели; неопределенность, но ограниченность внешнего спроса на воду; наличие запаздываний, связанных с транспортировкой воды; наличие эксплуатационных ограничений на значения состояний и управлений.



а б в

Рисунок 2 – Графики переходных процессов в системе подачи и распределения воды:
а – значения объема воды в резервуаре 1; б – значения напора воды в потоке, исходящем из резервуара 1;
в – значения объема потребленной воды в секторе 1 и объема воды, перекачанной насосом 1

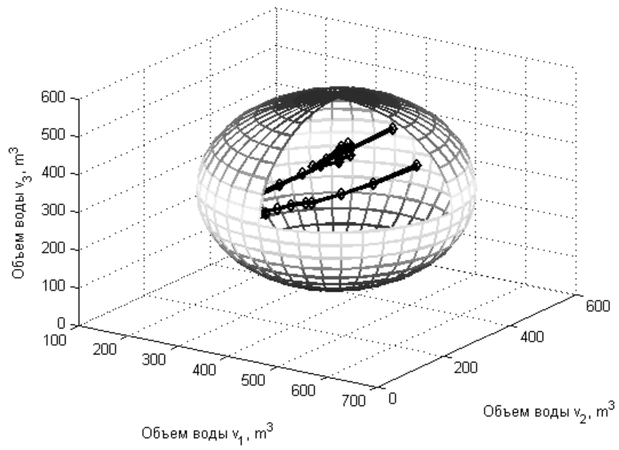


Рисунок 3 – Фазовая траектория и инвариантный эллипсоид, полученный на последнем шаге, для резервуаров 1, 2 и 3

Для подавления влияния возмущений, моделирующих изменения внешнего спроса, одновременно с обеспечением устойчивости замкнутой системы, применена методика инвариантных эллипсоидов, которая позволила сформулировать задачу в терминах линейных матричных неравенств, а синтез управления свести к последовательности задач одномерной выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования.

Полученное управление зависит от выбранного значения уровня страховых запасов воды. В рамках предложенного подхода возможен выбор оптимальных значений страховых запасов, поскольку полученное решение задачи синтеза робастного управления задает, фактически, алгоритмическую зависимость между уровнем страховых запасов и оптимальным значением критерия качества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросов В. А. Управление региональными системами водоснабжения / В. А. Петросов. – Харьков : Основа, 1999. – 320 с.
2. Brdys M. A. Operational control of water systems: structures, algorithms, and applications / M. A. Brdys, B. Ulanicki. – London: Prentice Hall, 1994. – 364 p.
3. Дорофеев Ю. И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 16–27.
4. Blanchini F. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi and W. Ukovich // IEEE Transaction on Robotics and Automation, Special Issue on Automation of Manufacturing Systems. – 2000. – Vol. RA-16. – No. 3. – P. 313–317.
5. Stipanovic D. M. Robust stability and stabilization of discrete-time non-linear systems: the LMI approach / D. M. Stipanovic, D. D. Siljak // International Journal of Control. – 2001. – Vol. 74. – P. 873–979.
6. Bemporad A. Robust model predictive control: a survey / A. Bemporad, M. Morari // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 1999. – Vol. 245. – P. 207–226.
7. Bertsekas D. P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / D. P. Bertsekas, I. Rhodes // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117–128.
8. Blanchini F. Set theoretic methods in control / F. Blanchini, S. Miani. – Boston : Birkhauser, 2007. – 504 p.
9. Хлебников М. В. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) / М. В. Хлебников, Б. Т. Поляк, В. М. Кунцевич // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 11. – С. 9–59.
10. Linear matrix inequalities in system and control theory / [S. Boyd, El. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan]. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 187 p.
11. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф. Л. Черноусько. – М. : Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1988. – 320 с.
12. Kothare M. V. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities / M. V. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari // Automatica. – 1996. – Vol. 32 № 10. – P. 1361–1379.
13. Lyubchyk L. M. Robust model predictive control of constrained supply networks via invariant ellipsoids technique / L. M. Lyubchyk, Y. I. Dorofieiev, A. A. Nikulchenko // Proc. IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management and Control MIM'2013. – 2013. – P. 1618–1623.
14. Grant M. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta [Electronic resource] / M. Grant, S. Boyd // Acces mode: http://cvxr.com/cvx.

Статья поступила в редакцию 09.09.2014.
После доработки 23.09.2014.

Дорофєєв Ю. І.[1], Любчик Л. М.[2]
[1]Канд. техн. наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна
[2]Д-р техн. наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна

РОБАСТНЕ ПРИДУШЕННЯ ЗБУРЕНЬ ПРИ УПРАВЛІННІ НАСОСНИМИ СТАЦІЯМИ В СИСТЕМІ ЦЕНТРАЛІЗОВАНОГО ВОДОПОСТАЧАННЯ

Запропоновано підхід до вирішення задачі побудови стабілізуючого робастного управління запасами води в системі подачі і розподілу води великого міста. Математична модель системи подачі і розподілу води подана у вигляді нелінійної дискретної моделі в просторі станів із запізненням. Запропоновано методику факторизації матриць моделі, що описують вплив нелінійних термів, яка дозволила подати задані структурні обмеження у вигляді лінійних матричних нерівностей. Для придушення впливу збурень, що моделюють зміни невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту, одночасно із забезпеченням стійкості замкнутої системи, застосована методика інваріантних еліпсоїдів, яка дозволила сформулювати задачу в термінах лінійних матричних нерівностей, а синтез управління звести до послідовності задач одновимірної опуклою оптимізації та напіввизначеного програмування. Як приклад розглянуто фрагмент системи водопостачання міста Харків.

Ключові слова: система подачі і розподілу води, управління запасами води, метод інваріантних еліпсоїдів, прямий метод Ляпунова, лінійна матрична нерівність, задача напіввизначеного програмування.

Dorofieiev Yu. I.[1], Lyubchyk L. M.[2]
[1]PhD, Associate Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Ukraine
[2]Dr. Sc., Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Ukraine

ROBUST DISTURBANCES REJECTION IN PUMPING STATIONS CONTROL FOR CENTRALIZED DRINKING WATER DISTRIBUTION SYSTEM

An approach to solving the problem of stabilizing robust water inventory control synthesis for drinking water distribution system of a large city is proposed. The mathematical model of drinking water distribution system is presented in the form of a nonlinear discrete state-space model with time-delay. The technique of model matrix factorization describing the influence of nonlinear terms, which allowed to introduce structural constraints in the form of linear matrix inequalities, is proposed. To suppress the disturbances influence simulating unknown but bounded external demand, while ensuring robust stability of the closed-loop system, is used the invariant ellipsoids technique, which allowed to formulate the control problem in terms of linear matrix inequalities. As a result the control synthesis problem is reduced to a sequence of one-dimensional convex optimization problems and semi-definite programming. As an example, a fragment of the Kharkiv drinking water distribution system is consider.

Keywords: drinking water distribution system, water inventory control, invariant ellipsoids method, Lyapunov's direct method, linear matrix inequality, semi-definite programming.

REFERENCES

1. Petrosov V. A. Upravlenie regional'nimi sistemami vodosnabzhenija. Khar'kov, Osnova, 1999, 320 p.
2. Brdys M. A., Ulanicki B. Operational control of water systems: structures, algorithms, and applications. London, Prentice Hall, 1994, 364 p.
3. Dorofieiev Yu. I., Nikulchenko A. A. Postroenie matematicheskih modelej upravliaemih setej postavok s uchetom zapazdivanij potokov, *System Research & Information Technologies*, 2013, No. 1, pp. 16–27.
4. Blanchini F., Pesenti R., Rinaldi F., Ukovich W. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays, *IEEE Transaction on Robotics and Automation, Special Issue on Automation of Manufacturing Systems*, 2000, Vol. RA-16, No. 3, pp. 313–317.
5. Stipanovic D. M., Siljak D. D. Robust stability and stabilization of discrete-time non-linear systems: the LMI approach, *International Journal of Control*, 2001, Vol. 74, pp. 873–979.
6. Bemporad A., Morari M. Robust model predictive control: a survey, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 1999, Vol. 245, pp. 207–226.
7. Bertsekas D. P., Rhodes I. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1971, Vol. 16, pp. 117–128.
8. Blanchini F., Miani S. Set theoretic methods in control. Boston, Birkhauser, 2007, 504 p.
9. Hlebnikov M. V., Poljak B. T., Kuncevich V. M. Optimizacija linejnih sistem pri ogranichennih vneshnih vozmuschenijah (tehnika invariantnih ellipsoidov), *Automation and Remote Control*, 2011, № 11, pp. 9–59.
10. Boyd S., Ghaoui El., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory, Philadelphia, SIAM, 1994, 187 p.
11. Chernous'ko F. L. Ocenivanie fazovogo sostojanija dinamicheskih sistem. Metod ellipsoidov. Moscow, Nauka, 1988, 320 p.
12. Kothare M. V., Balakrishnan V., Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities, Automatica, 1996, Vol. 32(10), pp. 1361–1379.
13. Lyubchyk L. M., Dorofieiev Y. I., Nikulchenko A. A. Robust model predictive control of constrained supply networks via invariant ellipsoids technique, Proc. IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management and Control MIM'2013, 2013, pp. 1618–1623.
14. Grant M., Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. Acces mode: http://cvxr.com/cvx.