МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

УДК 681.3.06

Переварюха А. Ю.

Канд. техн. наук, старший научный сотрудник Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург, Россия

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПУЛЯЦИЙ ОСЕТРОВЫХ КАСПИЯ С ДВУМЯ ВИДАМИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В статье предложена оригинальная компьютерная модель жизненного цикла популяции осетровых рыб Каспийского моря, включенных в «Красную книгу» с 2010 г. В модели реализована событийно-стадийная вычислительная структура, которая включает непрерывные и дискретные составляющие времени. Особенности динамики модели рассмотрены на основе численного решения конечной последовательности задач Коши для системы дифференциальных уравнений убыли численности особей поколений. Получена интересующая ихтиологов функциональная зависимость, которая имеет два локальных экстремума. Установлены возможность притяжения траектории к двум аттракторам и появление переходного апериодического режима. После бифуркации исчезновения двух нетривиальных стационарных точек возникает интервальный аттрактор. Для данного типа аттрактора по классификации Гукенхеймера наблюдается явление граничного кризиса, что для популяций осетровых рыб интерпретируется как угрожающее их существованию событие.

Ключевые слова: компьютерная модель биологических процессов, гибридная система, переходный хаос, бифуркация, вычислительный эксперимент.

НОМЕНКЛАТУРА

a – параметр репродуктивного потенциала;

b – показатель действия лимитирующих факторов;

g – параметр объема доступных кормовых ресурсов;

l – поправка в ограничении скорости развития не связанной с плотностью;

$N(t)$ – текущая численность поколения;

K – критическая биомасса нерестового запаса;

R – пополнение популяции данного сезона;

S – нерестующий запас рыб;

$U(S)$ – функционал действия эффекта Олии;

c – определяет степень выраженности эффекта Олли;

w – параметр скорости размерного развития молоди;

w_D – уровень развития, достижение которого меняет действие факторов смертности;

α – коэффициент зависящей от плотности компенсационной смертности;

β – коэффициент независимой от плотности убыли численности поколения;

ε – окрестность превышения пороговых значений;

λ – средняя плодовитость популяции;

τ – длительность первой критической стадии развития организма рыб.

ВВЕДЕНИЕ

Компьютерные методы моделирования биологических процессов развиваются в рамках нескольких отдельных междисциплинарных направлений. Изначально предложения по формализации популяционной динамики заключались в разработке систем дифференциальных уравнений с различного вида правыми частями, отражающими некоторые теоретические предположения о характере взаимодействия биомассы конкурирующих видов. В дальнейшем из-за потребности в быстром проведении расчетов популярность получили дискретные и матричные способы представления.

Интересы рационального планирования масштабной эксплуатации биоресурсов требовали актуального подхода, несвязанного с проблемами аналитического исследования решений дифференциальных уравнений, но соответствующего появившимся вычислительным мощностям.

DOI 10.15588/1607-3274-2015-1-3

В задачах моделирования сообществ гидробионтов в 1970-х гг. развивались алгоритмические методы, основанные на исследовании дискретных вычислительных структур с применением ЭВМ. Отечественной школой предложено значительное число разнообразных дискретных моделей для промысловой ихтиологии: В. В. Меншуткина, А. Б. Казанского, В. В. Суханова. Развитием подхода стало создание в Ленинградском институте информатики АН СССР в 1989 г. высокоуровнего языка алгоритмических сетей, предназначенного для описания процесса непрограммирующим пользователем без математической подготовки в виде ориентированного «функционального» графа операторов.

Возможности модельного описания и прогнозирования популяционных процессов столкнулись с фундаментальными проблемами теории универсальности поведения нелинейных систем [1]. Дискретно-матричные популяционные модели, ориентированные на вычислительные методы исследования, обладают нетривиальными возможностями изменениями поведения с хаотическими и циклическими режимами.

В статье на основе представлений об экологических особенностях воспроизводства анадромных рыб предлагается новая вычислительная модель динамики численности, обладающая свойством взаимной трансформации двух разных видов апериодического поведения траектории из свойств границы области притяжения аттракторов.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В основе моделей эксплуатируемых популяций рыб лежит формализация баланса воспроизводства и смертности от различных факторов. Естественная убыль на ранних этапах жизни у крупных анадромных рыб очень велика и ее изменения критически сказываются на благополучии популяции. Опыт наблюдений показал, что среднее пополнение R от величины родительского запаса S редко удовлетворительно описывается линейным или кусочно-линейным соотношением: $R = f(S) = aS$, $S < K$ $f(S) = X = \cos t, S > K$.

Пополнением будем считать численность поколения от одного нереста, дожившего до установленного момента. Для разных видов рыб этот момент может определяться достижением промысловых размеров, прохождением периода смолтификации при адаптации к морскому периоду жизни или окончанием полового созревания.

В ихтиологии возникло направление исследований, объясняющее закономерности изменения эффективности воспроизводства. Целью предыдущих исследований являлось на основе данных наблюдений определение зависимости для прогнозирования скорости восполнения промысловых запасов [2]. Обобщенная задача представляется противоречивой, т.к. очевидны различия экологических особенностей нереста разных рыб и дискуссия о ее роли при накладывающемся влиянии абиотических факторов имеет долгую историю [3].

Целью данной работы является усовершенствование математических методов исследования процесса восполнения биоресурсов на основе применения современных способов организации гибридной вычислительной структуры моделей.

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Концепция моделей воспроизводства заключается в описании лимитирующих факторов $\nu(S)$, действующих на нерестилищах при повышенной плотности запаса с репродуктивным потенциалом a: $R = aS / \nu(S)$. У. Рикером предложена экспоненциальная форма $\nu(S) = \mathbf{e}^{bS}$, где b показатель действия лимитирующих факторов. Дж. Шепард обосновал применение зависимости по аналогии с логистической моделью: $\nu(S) = 1 + (S / K)^b$, где учтена критическая биомасса запаса K. Анализ моделей проводится в виде функциональных итераций $x_{n+1} = f(x_n)$. Для траектории итераций функции Рикера при возрастании a характерно изменение поведения от устойчивого равновесия R^* к хаосу через каскад Фейгенбаума [4]. Аналогично бифуркации удвоения периода цикла наблюдаются для модели Шепарда. Нами показано ранее, что бифуркационные параметры в двух моделях имеют противоположный смысл, что влечет проблему интерпретации результатов моделирования [5].

Аттрактор, возникающий в результате накопления каскада бифуркаций удвоения, является аналогом канторовского множества (замкнутого множества, не содержащего как внутренних, так и изолированных точек). Структурно хаотический аттрактор представляет собой результат объединения все уменьшающихся субинтервалов, которые составляют точки отрезка за исключением несчетного числа неустойчивых точек всех периодов 2^n и их прообразов. Анализ образования и свойств канторовских множеств является отдельной задачей при исследовании нелинейных дискретных моделей. Теория универсальности изменения поведения отображений, удовлетворяющих критериям теоремы Д. Синжера [6] (SU-отображения), описана достаточно подробно многими авторами, например в книге [7].

Выявление свойства хаотичности важно для оценки адекватности биологических моделей. Обычно для определения хаотичности используется свойство чувствительной зависимости от начальных условий, но на основе работы [8] можно ввести критерий хаотичности отображения отрезка $f : I \to I$ на основе топологической транзитивности: для всех открытых подмножеств $U \subseteq V, U \neq \varnothing$ и $Y \subseteq V, Y \neq \varnothing$ $\exists n \geq 0$, если выполняется $f^n(U) \cap Y \neq \varnothing$, то поведение хаотично.

Помимо хаотизации и соответственно эффекта экспоненциального разбегания близких траекторий в отображениях возможны другие нелинейные эффекты, связанные с окнами периодичности. Отметим, что нелинейные эффекты в динамике делают проблематичной сущностную интерпретацию поведения дискретных популяционных моделей, в особенности не относящихся к SU-семейству.

Сведения о воспроизводстве севрюги на Нижней Волге [9] показали, что наблюдается выраженная неунимодальная зависимость с двумя высокими диапазонами эффективности воспроизводства, между которыми существует промежуток численности запаса, при котором для популяции характерна низкая способность к восстановлению. С биологической точки зрения можно обосновать предположение, что характер зависимости является следствием различия факторов смертности на разных этапах развития молоди осетровых рыб Каспийского моря, размножающихся в бассейне Нижней Волги.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Физиологи выделяют стадии развития молоди по мере формирования органов и характера передвижения. Можно предположить, что изменения происходят по мере размерного развития за счет питания особей, скорость которого представим в уравнении обратно пропорциональной плотности:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k(t)+l}, k<1. \qquad (1)$$

В уравнение (1) включены параметры, ограничивающие скорость развития из-за фиксированого начального объема доступных кормовых ресурсов и поправочный коэффициент для замедления скорости развития не связанного с плотностью особей. Важнейшие изменения, как переход на активное питание и начало самостоятельной миграции можно считать событиями в динамике поколения, что позволит выделить стадии: D_1, D_2, D_3. Таким образом, имеются основания для применения гибридной структуры модели, со структурой, изменяемой при достижении некоторых выделяемых предикатами событий.

Предложение по формализации процесса формирования пополнения заключается в описании убыли начальной численности поколения от вылупления из икринок дифференциальным уравнением на промежутке времени $[0,T]$ в явном виде учитывающих разные факторы смертности и ее изменение по мере развития особей:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t)+U\beta\ )N(t), & t<\tau; \\ -(\alpha_1 N(\tau)/w(\tau)+\beta\ )N(t), & t>\tau, \quad w(t)<w_{D2}; \\ -\alpha_2 w(t)N^2(t)\ , & w(t)<w_{D3}. \end{cases} \qquad (2)$$

В модель (2) включены сразу два коэффициента: смертности, зависящей от плотности, и нейтральной убыли. Длительность первой стадии с эндогенным питанием (для севрюги в среднем составляет 8 суток). Введен условный уровень развития, при достижении которого меняется действие факторов смертности, что интерпретируется экологией обитания молоди при начале самостоятельной миграции. Логично предположить, что отрезок времени в раннем онтогенезе рыб, в котором в наиболее сильно проявляются действия факторов смертности – так называемый «интервал уязвимости», не является постоянным и может растягиваться до некоторого максимального значения при замедлении скорости размерного развития.

От абстрактного «репродуктивного потенциала» разумно перейти к естественному показателю средней плодовитости, оцениваемой по данным мониторинга, т. к. у осетровых нет половых хромосом, и дифференциация происходит эпигамно. Начальные условия для уравнений (1) и (2): $w(0)=w_0$, $N(0)=\lambda S$.

По данным о воспроизводстве волжской севрюги выявлено действие отрицательного эффекта группы (известного в литературе как «Allee effect»), когда при низкой плотности уменьшается вероятность встреч на нерестилищах, что сильно сокращает продуктивность нереста. Потому в правую часть (2) для стадии D_1 вводится функция $U(S)$, которая быстро стремится к единице: $E(U)=[2,1)$, т.к. эффект не может проявляться при исторически оптимальной для промысловой популяции численности запаса:

$$U(S)=1+\exp(-cS^2),\ c<1, \qquad (3)$$

где единственный параметр определяет степень выраженности данного эффекта. Дифференциальное уравнение (1), второе уравнение в виде набора правых частей (2) с функционалом (3) позволят формировать непрерывно-дискретную вычислительную структуру.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Предложенная модель рассчитана на применение современных вычислительных средств, включающих библиотеки производительных численных методов с переменным шагом интегрирования. Тестировать пригодность численных методов для задачи работы с гибридным временем можно по появлению так называемого «эффекта Зенона», когда некорректный алгоритм останавливает время, и система будет бесконечно приближаться к точке перехода, подобно Ахиллесу, пытающемуся догнать черепаху из известной апории греческого философа.

Особенность дискретно-событийном подхода составляют переходы, которые происходят между состояниями моделируемой системы согласно графу всех возможных состояний. В применяемом методе на основе таймированного гибридного автомата переключение реализуется между режимами изменения состояния. Режимам изменения сопоставлен набор форм правой части системы уравнений из (2), алгоритм контроля предикатов определяет выбор решаемой в данный момент задачи Коши с инициализацией новых начальных условий. Промежуток интервала уязвимости разделен на последовательность кадров гибридного модельного времени. Алгоритмическое представление модели реализуется на основе автомата с таймированными и предикативными переходами. Множество решений задач Коши для допустимых $S\in\mathbb{Z}^+$ определит интересующую нас зависимость, называемую в работах ихтиологов «кривой воспроизводства» популяции.

Исследование подобных гибридных моделей можно осуществлять в инструментальной вычислительной среде AnyLogic5 (к сожалению, разработчики отказались от развития данного направления в последующих версиях системы) и разрабатываемой в Санкт-Петербурге среде MvStudium, в новой версии получившей название Rand Model Designer. Программный код выполняемой модели в Rand Model Designer генерируется на основе входного языка записи математической модели и визуальных диаграмм для описания структуры и качественных изменений поведения моделируемой системы и автоматически компилируется, что обуславливает высокую производительность при проведении управляемых вычислительных экспериментов. Входной паскалеобразный алгоритмический язык среды позволяет формировать модель процесса из алгебраических или дифференциальных уравнений и набора предикатов. Особенно ценна для автора возможность выполнять параметрическую оптимизацию моделей с использованием встроенных алгоритмов.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

В вычислительной среде получена неунимодальная «волнообразная» зависимость $R = \varphi(S)$запаса и пополнения, о причинах наблюдения которой для крупных рыб писал Рикер в [10]. Зависимость (рис. 1) без учета действия промысловой смертности характеризуется четырьмя нетривиальными стационарными точками $R_i^*, i = 1...4$, пересечениями кривой с биссектрисой координатного угла $R = S$.

График второй итерации $\varphi(\varphi(S)) \equiv \varphi^2(S)$ показал устойчивость четвертой точки наряду с устойчивостью $R = 0$. Для дискретной динамической системы $R_{n+1} = \varphi(R_n)$ возможны качественно различные варианты поведения в зависимости от вычисленного значения функции в двух точках локальных экстремумов $\min \varphi(R), \max \varphi(R), R_1^* < R < R_3^*$. Наибольший практический интерес представляет выполнение условий существование малой окрестности ε превышения пороговых значений: $\varphi(R_{\max} \pm \varepsilon) > R_3^*, \varphi(R_{\min} \pm \varepsilon) < R_1^*$. При выполнении условий в вычислительных экспериментах фиксируется образование в фазовом пространстве объекта, относящегося к разновидности непритягивающих хаотических множеств.

Если для динамической системы существует два аттрактора, то при исследовании необходимо определить границу их областей притяжения. В простейшем случае границей является неустойчивая «репеллерная» точка. В рассматриваемом случае границу составляет все множество прообразов неустойчивых точек R_i^*. Обе области притяжения в локальном диапазоне $[R_1^*, R_3^*]$ представляются несвязным объединением малых интервалов.

В подобных моделях с возникновением нелинейных эффектов возрастает роль точности применяемых вычисленных алгоритмов при компьютерном исследовании. Современные библиотеки инструментальных

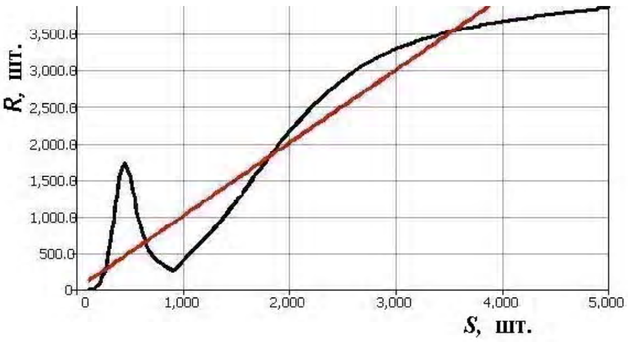
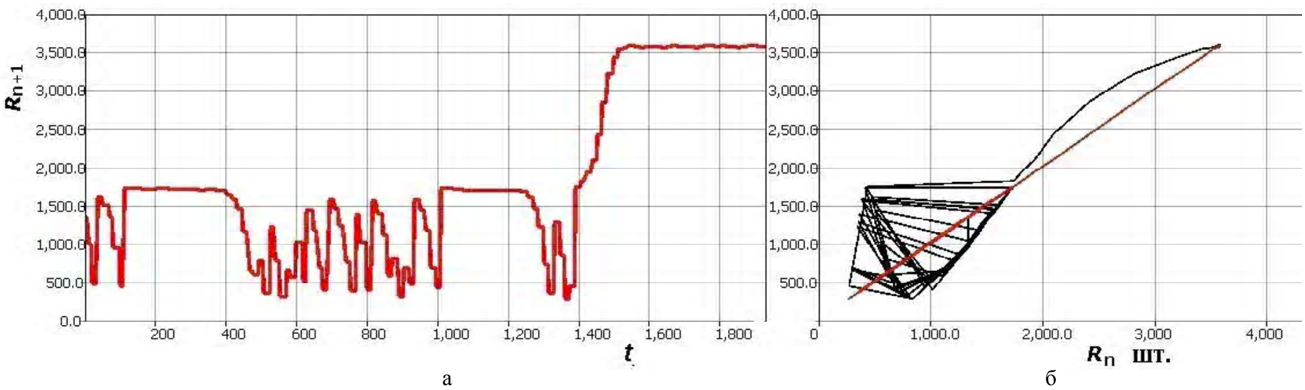


Рисунок 1 – График зависимосты $\varphi(R)$ с четырьмя стационарными точками

средств предоставляют большой выбор методов для экспериментов, но необходимо рационально выбирать подходящий, т. к. результаты могут отличаться при самых незначительных погрешностях из-за фундаментальных свойств фрактальных объектов. Хорошую применимость показала в частности реализация в библиотеке среды Rand Model Designer численного метода Дормана-Принса четвертого порядка, адаптированного для гибридных систем. В подобных задачах приоритет необходимо отдавать точности над скоростью вычислений, потому исследование фрактальных структур в фазовом пространстве и построение бифуркационных диаграмм требует значительных временных затрат.

Нами исследовался случай образования канторовской структуры границы, которая представляет собой всюду разрывное множество точек, приводит к появлению длительного переходного хаотического режима, реализующегося до момента $\varphi^z(R_0) > R_3^*$ (или $\varphi^z(R_0) < R_1^*$), его достижение означает стремительное развитие редкого явления для рыб, неожиданной «вспышки» численности (рис. 2) популяции. Число итераций z пребывания траектории в переходном апериодическом режиме чувствительно зависит от начальных условий [11] и соответственно от точности вычислений.

При рассмотрении в модели увеличения промысловой смертности изменяется конфигурация стационарных точек. Для динамической системы возможна обратная касательная бифуркация: слияние R_3^*, R_4^* с исчезновением стационарной точки, при сохранении оставшихся



а б

Рисунок 2 – Выход из режима переходного хаоса: а – временная диаграмма, б – фазовая диаграмма

R_1^*, R_2^*. В таком случае возможны два варианта, определенные смещающемся значением $\varphi_1(R_{\min})$ в точке минимума измененной зависимости (рис. 3). При выполнении условия $\varphi_1(R_{\min}) > R_1^*$ траектории притягиваются к интервальному аттрактору, неустойчивая точка R_1^* служит границей с областью притяжения тривиального равновесия (рис. 4). Тогда после обратной касательной бифуркации траектория моментально переходит к устойчивому апериодическому режиму, что соответствует колебаниям в диапазоне низкой численности популяции без возможности восстановления. Подобная ситуация из-за последствий длительного перелова наблюдается сейчас с осетровыми рыбами Каспийского моря, где промысел не был остановлен своевременно.

В момент достижения $\varphi_1(R_{\min}) < R_1^*$ происходит граничный кризис интервального аттрактора [12]. При подобном кризисе аттрактор соприкасается с границей, теряет свойство инвариантности при сохранении локально-несвязной структуры у вновь появившегося непритягивающего хаотического множества типа «хаотическое седло» по классификации Гребоджи [13]. Единственным аттрактором остается тривиальное равновесие, что описывает неминуемую деградацию популяции после короткого переходного апериодического режима флуктуаций.

При исследовании модели установлена возможность трансформации двух различных хаотических режимов при касательной бифуркации, переходного и устойчивого, связанного с интервальным аттрактором. Данная трансформация интерпретируется как последствие усиления промыслового давления и влечет длительное пребывание популяции в неблагоприятном для промысла

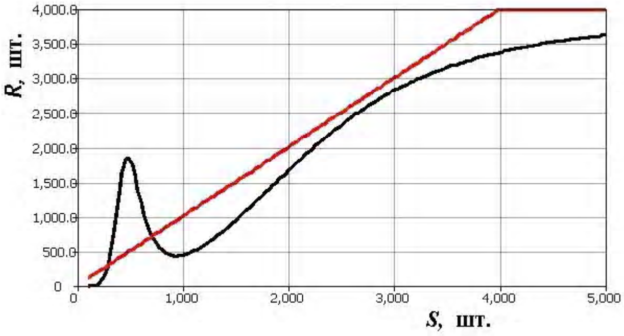


Рисунок 3 – График зависимости $\varphi(R)$ после обратной касательной бифуркации

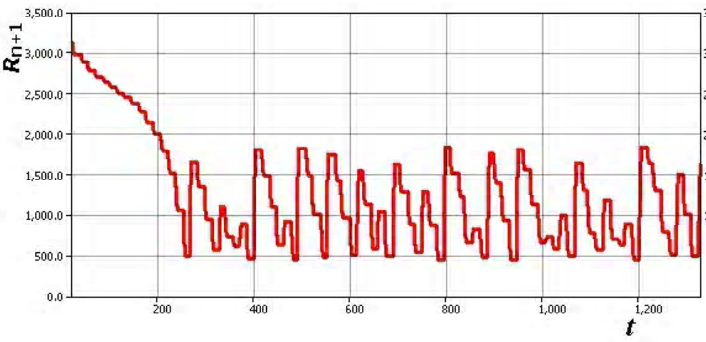
состоянии. В динамической системе мы наблюдаем достаточно необычное поведение, связанное с тем, что обычно в таких моделях имеют дело с двумя топологическими типами аттракторов: устойчивым циклом или канторовским множеством не содержащим ни внутренних, ни изолированных точек и окруженным бесконечным количеством неустойчивых циклических точек. В классификации Дж. Гукенхеймер выделил три типа аттракторов функциональных итераций, и третий тип представляет объединение малых интервалов, обладающих топологической транзитивностью [14].

6 ОБСУЖДЕНИЕ

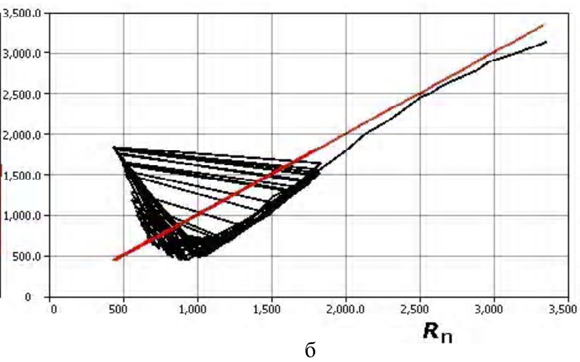
Разработанная модель формирования поколений популяций обладает рядом дополнительных возможностей по сравнению с известными аналогами. В частности, свойства непрерывно-дискретной динамической системы позволят описывать зафиксированные в ряде случаев [15] для промысловых популяций горбуши тихоокеанского побережья Канады изменения, связанные с существованием двух уровней численности популяции: низкого и высокой. При низкой численности популяция испытывает резкие флуктуации, но существует перспектива восстановления высокой численности при прекращении промысла. Лососевые и осетровые виды существенно отличаются длительностью жизненного цикла, однако имеют сходные экологические условия воспроизводства, что позволяет проводить сравнение данных промысловой статистики и устанавливать аналогичные ситуации, которые могут описать разработанные модели.

Однако, нелинейные детерминированные модели с возникновением апериодической динамики имеют какое-либо ограничение прогностических возможностей, именуемое в популярной литературе «эффект бабочки». В разработанной модели данный эффект проявляется иначе, чем в классической системе уравнений Э. Лоренца. В режиме переходного хаоса мы не можем предсказать, к какому из альтернативных аттракторов в результате устремится траектория и данное свойство определяется как неопределенность относительно асимптотического состояния динамической системы.

Предложенная модель отличается существенной сложностью и требует специальных способов применения. Интегрировать систему (3) в состав агрегированного полимодельного комплекса многовидового управления биоресурсами проблематично, но у нее имеются другие возможности. Основная идея практического применения



а



б

Рисунок 4 – Притяжение к интервальному аттрактору: а – временная диаграмма, б – фазовая диаграмма разработанных систем непрерывно-дискретных уравнений состоит в организации набора вычислительных модельных сценариев для анализа эффективности эксплуатации водных биоресурсов с учетом экспериментальных результатов теории этапности развития рыб [16] разных видов.

Условием применения подхода является представление стратегии природопользования, вырабатываемой экспертами согласно некоторым внутренним правилам, применяемой для достижения приоритетной цели. Формирование сценариев на основе моделей теории восполнения запасов даст возможность рассматривать не просто динамику отдельной популяции, но оценить концептуальные стратегии управления с точки зрения возрастания экологических рисков. В сценариях перспективно определить способы выделения факторов-предвестников для регулярно отмечаемого последние годы явления резкого снижения численности популяции по всем возрастным группам (так называемого «коллапса» промысловых запасов). Своевременное уменьшение доли изъятия и предосторожный подход оказывается экономически эффективнее стратегии максимизации вылова, так как большие потери приносит всей экономике региона вынужденно вводимый мораторий на промысел в случае подрыва способности биоресурсов к самовосстановлению.

ВЫВОДЫ

В статье рассмотрена популяционная модель, позволяющая оценивать эффективность формирования промысловых запасов рыб и учитывающая изменения выживаемости молоди поколения в раннем онтогенезе осетровых видов.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что впервые предложена непрерывно-событийная вычислительная структура модели репродуктивного процесса, алгоритмически реализованная на основе гибридного автомата, где условия изменения режима изменения состояния определяются на основе вычисления уровня размерного развития.

Практическая ценность полученных результатов заключается в том, что получена традиционно используемая в промысловой ихтиологии функциональная зависимость запаса и пополнения отражающая действие известного в экологии эффекта Олли [17], известного так же как эффект агрегированной группы. Задача моделирования явления оказалась важной не только для динамики млекопитающих и крупных рыб, но и для ситуации инвазии насекомых вредителей [18]. Проявление данного эффекта для промысловой популяции может выразиться в резком сокращении эффективности воспроизводства при чрезмерной эксплуатации и, как следствие, стремительной деградации биоресурсов, неожиданной для определяющих допустимый уровень изъятия специалистов. Подобный сценарий реализовался с популяциями каспийский осетровых рыб в конце 1980-х гг. на фоне организованного искусственного выпуска молоди, ожидаемая эффективность которого оказалась завышенной, как и планировавшиеся объемы оптимального вылова.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен разработчикам среды Rand Model Designer за возможность научного использования программного обеспечения. Исследования выполнены в рамках проекта Российского фонда фундаментальных исследований «Разработка методов вычислительного моделирования динамики подвергавшихся чрезмерному промысловому изъятию популяций рыб и оценки эффективности мер по их искусственному восстановлению на основе событийно-управляемых модельных сценариев» (грант Российского фонда фундаментальных исследований № 15-07-01230, руководитель – проф. В. В. Михайлов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vul E. B. Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism Sinai / E. B. Vul, K. M. Khanin // Russian Mathematical Surveys. – 1984. – Vol. 39, № 3. – P. 1–40. DOI: 10.1070/RM1984v039n03ABEH003162
2. Touzeau S. On the stock-recruitment relationships in fish population models / S. Touzeau, J.-L. Gouz // Environmental modeling and Assessment. – 1998. – №3. – P. 87–93.
3. Mikkelsen N. How can the stock recruitment relationship of the Barents Sea capelin (*Mallotus villosus*) be improved by incorporating biotic and abiotic factors / N. Mikkelsen, T. Pedersen // Polar Research. – 2004. –№ 1. – P. 19–26.
4. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems / M. J. Feigenbaum // Physica D. – 1983. – Vol. 7, № 1–3. – P. 16–39. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90112-4
5. Perevaryukha A. Yu. Cyclic and unstable chaotic dynamics in models of two populations of sturgeon fish / A. Yu. Perevaryukha // Numerical Analysis and Applications. – 2012. – Vol. 5, № 3. – P. 254–264. DOI: 10.1134/S199542391203007X
6. Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval / D. Singer // SIAM journal of applied math. – 1978. – Vol. 35. – P. 260–268. DOI: 10.1137/0135020
7. Guckenheimer J. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields / J. Guckenheimer, P. Holmes. – Springer-Verlag, 1983. – 453 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1140-2
8. Vellekoop M. On intervals, transitivity = chaos / M. Vellekoop, R. Berglund // The American Mathematical Monthly. – 1994. – Vol. 101, № 4. – P. 353–355. DOI: 10.2307/2975629
9. Veshchev P. V. Efficiency of natural reproduction of sturgeons in the Lower Volga under current conditions / P.V. Veshchev, G. I. Guteneva, R. S. Mukhanova // Russian Journal of Ecology. – 2012. – T. 43, № 2. – P. 142–147. DOI: 10.1134/S1067413612020154
10. Ricker W. E. Stock and recruitment / W. E. Ricker // Journal Fisheries research board of Canada. – 1954. – Vol. 11, № 5. – P. 559–623. DOI: 10.1139/f54-039
11. Paar V. Sensitive dependence of lifetimes of chaotic transient on numerical accuracy for a model with dry friction and frequency dependent driving amplitude / V. Paar, N. Pavin // Modern Physics Letters B. – 1996. – Vol. 10, № 4. – P.153–159. DOI: 10.1142/S0217984996000183
12. Grebogi C. Chaotic attractors in crisis / C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke // Physical Review Letters. – 1982. – Vol. 48, № 22. – P. 1507–1510. DOI: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1507
13. Grebogi C. Chaos, strange attractors and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics / C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke // Science. – 1987. – Vol. 238, № 4827. – P. 632-638. DOI: 10.1126/science.238.4827.632
14. Bruin H. Topological conditions for the existence of absorbing cantor sets / H. Bruin // Transactions of the American mathematical society. – 1998. – Vol. 350, № 6. – P. 2229–2263. DOI: 0002-9947(98)02109-6
15. Minto C. Survival variability and population density in fish populations / C. Minto, R. A. Myers, W. Blanchard // Nature. – 2008. – Vol. 452. – P. 344–348. DOI: 10.1038/nature06605
16. Еремеева Е. Ф. Теория этапности развития и ее значение в рыбоводстве / Е. Ф. Еремеева, А. И. Смирнов // Теоретические основы рыбоводства. – М. : Наука, 1965. – С. 129–138.

17. Gascoigne J. C. Allee effects in marine systems / J. C. Gascoigne, R. N. Lipcius // Marine Ecology Progress Series. – 2004. – Vol. 269. – P. 49–59. DOI: 10.3354/meps269049
18. Kuussaari M. Allee effect and population dynamics in the Glanville fritillary butterfly / M. Kuussaari // Oikos. – 1998. – Vol. 82. – P. 384–392. DOI: 10.1098/rspb.2004.2995

Статья поступила в редакцию 30.09.2014.
После доработки 14.10.2014.

Переварюха А. Ю.
Канд. техн. наук, старший науковий співробітник Санкт-Петербурзького інституту інформатики і автоматизації РАН, Санкт-Петербург, Росія

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОПУЛЯЦІЇ ОСЕТРОВИХ КАСПІЙСЬКОГО МОРЯ З ДВОМА ТИПАМИ ВИНИКНЕННЯ АПЕРІОДИЧНИХ КОЛИВАНЬ

У статті запропонована оригінальна комп'ютерна модель життєвого циклу популяції осетрових риб Каспійського моря, що з 2010 р. внесені до «Червоної книги». У моделі реалізовано подійно-стадійну обчислювальну структуру, яка містить безперервні і дискретні складові часу. Особливості динаміки нової моделі розглянуті на основі чисельного розв'язку кінцевої послідовності задач Коші для системи рівнянь, яка описує убуток чисельності особин поколінь. Отримана функціональна залежність, яка становить інтерес для іхтіологів та має два локальних екстремуми. Встановлена можливість тяжіння траєкторії до двох аттракторів і виникнення перехідного аперіодичного режиму. Після біфуркації зникнення двох нетривіальних стаціонарних точок виникає інтервальний аттрактор. Для даного типу аттрактора за класифікацією Гукенхеймера спостерігається явище граничної кризи, що для популяцій осетрових риб інтерпретується як подія, що загрожує їхньому подальшому існуванню.

Ключові слова: комп'ютерна модель біологічних процесів, гібридна система, перехідний хаос, біфуркація, обчислювальний експеримент.

Perevaryukha A. Yu.,
PhD., Senior Researcher of St. Petersburg Institute for Informatics and Automation, St. Petersburg, Russia

COMPUTER MODELING OF STURGEON POPULATION OF THE CASPIAN SEA WITH TWO TYPES OF APERIODIC OSCILLATIONS

The article suggests the original computer model of the life cycle of sturgeon populations of the Caspian Sea, currently included in the «Red Book» since 2010. In our model was implemented event-stage computing structure that includes continuous and discrete components of the time. Features of the dynamics of the new model considered by us on the basis of the numerical solution of a finite sequence of the Cauchy problem for the system of equations describing the subsided of number of individuals in generations. As a result, we obtained the functional dependence, which be of interest to ichthyologists and which has two local extrema. The possibility of attraction of the trajectory to the two attractors and the appearance an aperiodic transition regime is established. After the bifurcation of the disappearance of two nontrivial stationary points arises an interval attractor. For this type of attractor on the Guckenheimer classification is observed the phenomenon of boundary crisis that for the sturgeon populations is interpreted as an event that threat to their continued existence.

Keywords: computer model of biological processes, hybrid system, transient chaos, bifurcation, computational experiment.

REFERENCES

1. Vul E. B., Khanin K. M. Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism Sinai, *Russian Mathematical Surveys*, 1984, Vol. 39, No. 3, pp. 1–40. DOI: 10.1070/RM1984v039n03ABEH003162
2. Touzeau S., Gouz J.-L. On the stock-recruitment relationships in fish population models, *Environmental modeling and Assessment,* 1998, No. 3, P. 87–93.
3. Mikkelsen N., Pedersen T. How can the stock recruitment relationship of the Barents Sea capelin (*Mallotus villosus*) be improved by incorporating biotic and abiotic factors, *Polar Research*, 2004, No. 1, pp. 19–26.
4. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems, *Physica D.,* 1983, Vol. 7, No. 1–3, pp. 16–39. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90112-4
5. Perevaryukha A. Yu. Cyclic and unstable chaotic dynamics in models of two populations of sturgeon fish, *Numerical Analysis and Applications,* 2012, Vol. 5, No. 3, pp. 254–264. DOI: 10.1134/S199542391203007X
6. Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval, *SIAM journal of applied math,* 1978, V. 35, pp. 260–268. DOI: 10.1137/0135020
7. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields. Springer-Verlag, 1983, 453 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1140-2
8. Vellekoop M., Berglund R. On intervals, transitivity = chaos, *The American Mathematical Monthly*, 1994, Vol. 101, No. 4, pp. 353–355. DOI: 10.2307/2975629
9. Veshchev P. V., Guteneva G. I., Mukhanova R. S. Efficiency of natural reproduction of sturgeons in the Lower Volga under current conditions, *Russian Journal of Ecology*, 2012, Vol. 43, No. 2, pp. 142–147. DOI: 10.1134/S1067413612020154
10. Ricker W. E. Stock and recruitment, *Journal Fisheries research board of Canada,* 1954, Vol. 11, No. 5, pp. 559–623. DOI: 10.1139/f54-039
11. Paar V., Pavin N. Sensitive dependence of lifetimes of chaotic transient on numerical accuracy for a model with dry friction and frequency dependent driving amplitude, *Modern Physics Letters B,* 1996, Vol. 10, No. 4, P.153–159. DOI: 10.1142/S0217984996000183
12. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaotic attractors in crisis, *Physical Review Letters,* 1982, Vol. 48, No. 22, pp. 1507–1510. DOI: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1507
13. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaos, strange attractors and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics, *Science*, 1987, Vol. 238, No. 4827, pp. 632–638. DOI: 10.1126/science.238.4827.632
14. Bruin H. Topological conditions for the existence of absorbing cantor sets, *Transactions of the American mathematical society*, 1998, Vol. 350, No. 6, pp. 2229–2263. DOI: 0002-9947(98)02109-6
15. Minto C., Myers R. A., Blanchard W. Survival variability and population density in fish populations, *Nature,* 2008, Vol. 452, P. 344–348. DOI: 10.1038/nature06605
16. Eremeeva E. F., Smirnov A. I. Teoriya etapnosti razvitiya i eYo znachenie v ryibovodstve, *Teoreticheskie osnovyi ryibovods*tva. Moscow, Nauka, 1965, pp. 129–138.
17. Gascoigne J. C., Lipcius R. N. Allee effects in marine systems, *Marine Ecology Progress Series*, 2004, Vol. 269, pp. 49–59. DOI: 10.3354/meps269049
18. Kuussaari M. Allee effect and population dynamics in the Glanville fritillary butterfly, *Oikos*,1998, Vol. 82, pp. 384–392. DOI: 10.1098/rspb.2004.2995