# МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

# MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

*УДК 539.3*

Мастиновский Ю. В.

*Канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики, Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье, Украина*

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ДЕМПФИРУЮЩИХ ПОКРЫТИЙ В РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЕ

Создание новых многослойных покрытий узлов и блоков радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), эффективно демпфирующих действие термомеханических нагрузок ударного типа, требует разработки новых удобных для инженерной практики математических моделей. Предлагаемая в данной работе математическая модель и методика расчета позволяет исследовать прохождение и отражение термоупругих волн в многослойном теле, возбуждаемых нестационарным магнитным полем на границе электропроводящего слоя. Также рассматривается задача оценки относительного влияния объемных сил, вызванных действием магнитного поля в электропроводящем неферромагнитном слое на процесс распространения термоупругих волн в полимерных компаундах. Принимается, что скорость распространения тепла конечна. Вводятся допущения, упрощающие полностью связанную систему магнитотермоупругих уравнений, которые позволяют для получения конкретных результатов применить численное решение с использованием метода характеристик. Указывается способ нахождения искомых величин в узловых точках границы раздела слоев. Предлагаемая математическая модель и методика расчета дает возможность, не внося существенных изменений в вычислительную схему, проводить численные эксперименты по исследованию демпфирующих свойств многослойных покрытий с различными геометрическими и механическими параметрами в условиях заданных термомеханических нагружений. Данная методика расчета многослойных разнородных термоупругих конструкций может быть использована для выявления областей, наиболее расположенных к повреждениям.

**Ключевые слова:** магнитное поле, термоупругость, демпфирующее покрытие, напряжения, метод характеристик.

### НОМЕНКЛАТУРА

$a$ – коэффициент температуропроводности;

$c$ – скорость упругой волны;

$c_1$, $c_2$ – безразмерные скорости;

$c_v$ – удельная теплоемкость при постоянной деформации;

$E$ – модуль упругости;

$f$ – составляющая объемной силы;

$g$ – объемная плотность теплового потока;

$J$ – плотность электрического тока;

$p_0$ – интенсивность нормальной сжимающей силы;

$\overline{q}$ – плотность теплового потока;

$T$ – приращение температуры;

$T_0$ – начальная температура;

$u$ – осевое напряжение;

$W$ – удельная мощность источников тепла;

$x$, $t$ – осевая координата и время, соответственно;

$\alpha$ – температурный коэффициент линейного расширения;

$\beta$ – безразмерная составляющая магнитного поля;

$\varepsilon$ – коэффициент связанности;

$\Theta$ – безразмерная температура;

$\kappa$ – теплопроводность;

$\lambda$, $\mu$ – упругие постоянные Ляме;

$\mu_0$ – магнитная проницаемость;

$\nu$ – коэффициент Пуассона;

$\xi$, $\tau$ – безразмерные координата и время, соответственно;

$\rho$ – плотность;

$\sigma$ – безразмерное напряжение;

$\sigma_0$ – удельная электрическая проводимость;

$\sigma_x$ – напряжение;

$\tau_0$ – время релаксации теплового потока.


DOI 10.15588/1607-3274-2015-4-2

## ВВЕДЕНИЕ

Интенсивные механические воздействия при эксплуатации РЭА являются причиной нарушения контактов, коротких замыканий, механических и других видов поломок аппаратуры.

Одним из способов защиты РЭА от вибраций и ударов является заливка блоков или узлов различного рода демпфирующими полимерными компаундами. Демпфирующие свойства этих компаундов зависят от вида механических нагрузок и температуры. При проектировании демпфирующих покрытий возникает необходимость оценки относительного влияния объемных сил, вызванных вихревыми токами в элементах РЭА, на процесс образования и распространения термоупругих волн. Целью данной работы является разработка математической модели и методики расчета демпфирующей способности многослойных конструкций в зависимости от различных геометрических и механических параметров слоев при действии нестационарных нагрузок.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача магнитотермоупругости сформулирована для двухслойной конструкции, представляющей собою два линейно-упругих изотропных скрепленных между собой слоя толщины $h_1$ и $h_2$, имеющих различные механические характеристики. В области $x<0$ создается нестационарное магнитное поле, параллельное плоскости $x=0$, которая является внешней границей первого слоя, материал которого обладает конечной проводимостью без магнитной или электрической поляризации. Считаем, что магнитное поле известно при $x=0$, $t>0$. Таким образом, все неизвестные величины будут зависеть только от $x$ и $t$, и, соответственно, возникнут лишь напряжения $\sigma_{xx} \equiv \sigma_x(x,t)$, перемещения $u_x \equiv u(x,t)$ и температура $T \equiv T(x,t)$. Составляющие магнитного и электрического полей при $x>0$ имеют проекции на оси $x$, $y$, $z$: $\overrightarrow{B}=(0,0,B(x,t))$ и $\overrightarrow{E}=(0,E(x,t),0)$.

Второй слой не является электропроводящим, и поэтому составляющие магнитного и электрического полей полагаем равными нулю.

Если решается термоупругая задача, то к поверхности $x=0$ прикладываются нормальные сжимающие силы и (или) подводится тепловой поток. Предполагается, что поверхности двухслойной полосы ($x=0$ и $x=h_1+h_2$) теплоизолированы, с изменением температуры в рассматриваемых материалах упругие свойства сохраняются, и что скорость распространения тепла конечна.

Исходной системой уравнений [1, 2] являются уравнения Максвелла и обобщенного закона Ома для определения электромагнитного поля, закон Дюамеля-Неймана – для упругого поля и обобщенное уравнение теплопроводности Фурье для определения температурного поля. Эти уравнения образуют замкнутую систему и являются основными уравнениями магнитотермоупругости.

## 2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Анализ публикаций по нестационарной магнитотермоупругости показывает, что при моделировании процесса «магнитной деформации» обычно пренебрегают термоупругими напряжениями, а в задачах о деформациях при действии лазера рассматривают лишь эффекты термоупругости и абляции [3–5].

В задачах демпфирования колебаний РЭА необходимо учитывать влияние нестационарного магнитного поля на упругую деформацию, обусловленную нагревом тела. Магнитотермоупруние задачи рассматривались [5–7] при различных допущениях о связности упругого, электромагнитного и температурного полей, чаще всего для полубесконечных тел и тел со сферической и цилиндрической симметрией. Решения получены, в основном, с помощью интегральных преобразований. Известны [7, 8] несколько приближенных решений инженерных задач, касающихся термоупругих решений в пластинах и стержнях. В настоящее время наблюдается все возрастающее количество публикаций, в которых рассматриваются связанные задачи термоупругости для многослойных конструкций [7]. Это связано, в частности, с важными задачами разработки и создания демпфирующих композитных материалов с заданными характеристиками.

Имеющиеся в литературе аналитические решения динамических термоупругих задач часто настолько громоздки, что без числовых расчетов не представляется возможным провести оценку напряженного состояния конструкции. Обзор публикаций по обозначенной проблеме показывает, что связанные с ней вопросы разработаны еще недостаточно, в частности отсутствует удобная для инженерной практики модель и методика расчета прикладных магнитотермоупругих задач.

## 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Основные уравнения для поставленной задачи, а также соответствующие определяющие соотношения имеют вид [1, 5, 6]:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=f\,,$$

$$c_v\rho\frac{\partial T}{\partial t}+\alpha T_0(3\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=g\,,$$

$$\sigma_x=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha(3\lambda+2\mu)T\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial t}=0\,,\ -\frac{\partial B}{\partial x}=\mu_0 J\,,$$

$$J=\sigma_0\left(E-B\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Проведем некоторые преобразования и упрощения системы (1). Обобщенное уравнение теплопроводности Фурье получено при неявном предположении, что скорость распространения теплоты является бесконечно большой. При исследованиях высокоскоростных нестационарных процессов, например, при тепловых ударах необходимо учитывать, что теплота распространяется хоть и с очень большой, но конечной скоростью $V$ [9]:

$$V=\left(\kappa/(c_v\rho\tau_0)\right)^{1/2},$$

где $\tau_0$ – время релаксации теплового потока (постоянная времени).

Подставляя значение плотности теплового потока

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_0 \frac{\partial q_x}{\partial x}$$

в уравнение баланса теплоты для одномерной задачи

$$c_\nu \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial t} + W , \qquad (2)$$

получим гиперболическое уравнение переноса теплоты. Если удельная мощность источников тепла $W = 0$, то уравнение (2) запишется так

$$c_\nu \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

Сравнивая с классическим законом теплопроводности Фурье, видим, что при конечной скорости распространения тепла в уравнении теплопроводности следует заменить $\frac{\partial T}{\partial t}$ на сумму $\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$.

В результате система уравнений (1), связывающая $\sigma_x$, $T$, $B$, принимает вид

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} = \alpha\rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\partial^2 B^2}{\partial x^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{a}(1+\varepsilon) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha T_0}{\kappa} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \frac{1}{\kappa \mu_0 \sigma_0} \left( \frac{\partial B}{\partial x} \right)^2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( B \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial B}{\partial t} . \qquad (5)$$

Здесь $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$; $a = \kappa / c_\nu$; $V^2 = a/(\rho\tau_0)$;

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 T_0 (3\lambda + 2\mu)^2}{c_\nu (\lambda + 2\mu)} = \frac{(1+\nu)\alpha^2 E T_0}{(1-\nu)(1-2\nu) c_\nu} .$$

Для упрощения системы связанных уравнений (3)–(5) опустим нелинейный член в уравнении Максвелла для магнитной индукции (5). Такое упрощение справедливо, если $B$ не зависит от деформаций и температуры. Таким образом, магнитная индукция удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \sigma_0 \mu_0 \frac{\partial B}{\partial t} . \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) известно [5] и для случая ступенчатого задания на границе $x = 0$

$$B(0,t) = \begin{cases} B_0 , \, t \ge 0, \\ 0, \; t < 0, \end{cases}$$

магнитная индукция в полупространстве $x \ge 0$ определяется выражением

$$B(x,t) = B_0 \operatorname{erfc}(mx), \qquad (7)$$

где $m = \frac{1}{2} (\mu_0 \sigma_0 / t)^{1/2}$.

Используя известные соотношения для функции ошибок [8], найдем:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{2 B_0 m}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-m^2 x^2} .$$

Таким образом, магнитная индукция в данной модели превращается в источник возмущений в связанных уравнениях термоупругости.

Вводя в уравнения (3), (4) безразмерные величины

$$\xi = \frac{cx}{a}; \quad \tau = \frac{c^2 t}{a}; \quad \Theta = \alpha T; \quad \sigma = \frac{(1-2\nu)\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x}{3\lambda + 2\mu};$$

$$\beta = \frac{B}{B_0}; \; \gamma = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cdot \frac{1-2\nu}{E}; \; \varphi = \frac{\alpha B_0^2}{k c_\nu}, \; k = a\mu_0\sigma_0; \; c_1^2 = 1;$$

$c_2^2 = \frac{V^2}{c^2}$, получаем для рассматриваемой задачи следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + \gamma \frac{\partial^2 \beta^2}{\partial \xi^2}, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} = (1+\varepsilon) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \varphi \left( \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right)^2 \qquad (9)$$

с начальными условиями

$$\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = 0 \text{ при } \tau = 0 , \; \xi > 0 \qquad (10)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0 , \; \beta = \begin{cases} 1, \, \tau \ge 0, \\ 0, \, \tau < 0 \end{cases} \text{ при } \xi = 0 ; \; \sigma = 0 \text{ при } \xi = 1 . \; (11)$$

В общем случае температурное поле должно удовлетворять условиям конвекции. Однако в данной работе конвекция на поверхности $\xi = 0$ принята равной нулю. Магнитная индукция, входящая в уравнения (8), (9) определяется с помощью выражений

$$\beta = \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{\tau}} \right), \; \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\sqrt{\frac{k}{\pi\tau}} \exp \left( -\frac{k}{4} \cdot \frac{\xi}{\tau} \right).$$

Неизвестные величины и параметры, соответствующие механическим свойствам определенного слоя 1 или 2, в дальнейшем при необходимости будут отмечены нижним индексом $i$ ($i = 1,2$).

Если слой не является электропроводящим, то в системе (8), (9) полагаем $\beta = 0$ и рассматриваем термоупругую задачу с начальными условиями (10), граничными механическими

$$\sigma = -p_0 f(\tau) \text{ при } \xi = 0 ; \; \sigma = 0 \text{ при } \xi = 1 \qquad (12)$$

и граничными тепловыми условиями

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = q\varphi(\tau) \text{ при } \xi = 0 ; \; \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 1 . \qquad (13)$$

Здесь $q = -\overline{q}$, $\overline{q}$ – плотность теплового потока в направлении внешней нормали к поверхности $\xi = 0$; $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ – заданные законы изменения нагрузок.

Кроме того, учитываются условия согласования на границе сопряжения слоев, которые заключаются в равенстве напряжений и смещений, температур и потоков тепла.

## 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Аналитические решения динамических задач термоупругости настолько громоздки [4, 7, 8], что без численных расчетов провести оценку напряженного состояния исследуемого объекта становится невозможно. В данной работе для решения системы гиперболических уравнений второго порядка (8)–(11) применяется прямое численное решение с использованием метода характеристик. В замкнутом виде получены уравнения характеристик и характеристические соотношения. Семейства характеристик системы (8), (9) и соотношения на них определяются следующими равенствами:

– вдоль $\dfrac{d\xi}{d\tau} = \pm 1$, выполняются соотношения

$$\pm d\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\right) \pm \gamma \frac{\partial^2\beta^2}{\partial\xi^2} d\xi - d\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right) = 0,$$

– вдоль $\dfrac{d\xi}{d\tau} = \pm c_2$, выполняются соотношения

$$d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}\right) \mp c_2 d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right) \pm c_2\left((1+\varepsilon)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \varphi\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2\right) d\xi = 0.$$

Для проведения расчетов в области слоев 1 и 2 строится сетка, образованная семейством характеристик $d\xi / d\tau = \pm 1$ (принимается $c = \max\{c|_1, c|_2\}$). Фактически это необходимо, поскольку другие характеристические линии имеют более крутой наклон. Для вычислений неизвестных во внутренних узлах сетки и на границе используется стандартная процедура [10, 11]. Решение в точках контакта различных слоев строится следующим образом [12]. Формально, точка, принадлежащая линии раздела слоев, рассматривается как бы состоящей из двух точек: одна из них принадлежит слою 1, другая – слою 2. Когда точка принадлежит слою 1, исключается интегрирование вдоль характеристик, проходящих вне слоя 1. С другой стороны, эта точка принадлежит слою 2, и с ней поступают аналогично, как в предыдущем случае. Полученные равенства дополняются условиями контакта. С подробностями численного интегрирования вдоль сетки характеристик можно ознакомиться в работах [10, 11].

## 5 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для проверки работы математической модели и вычислительной схемы проведены расчеты поставленной задачи для тела с механическими и теплофизическими свойствами, соответствующими алюминию: $c = 6{,}32 \cdot 10^3$ м/с; $\tau_0 = 10^{-11}$ с; $\varepsilon = 3{,}56 \cdot 10^{-2}$; $k = 4{,}13 \cdot 10^{-3}$;

$n = 2\alpha(3\lambda + 2\mu)/(\sigma_0\mu_0\kappa) = 800$.

## 6 РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчеты показали, что вихревые токи в алюминии вызывают сжимающие напряжения, а термоупругие напряжения распространяются в виде волн растяжения-сжатия. Термоупругие волны вызывают скачок напряжений, связанный со скачком температуры на границе. Решения для полупространства по связанной и несвязанной теориям в начальные моменты времени мало отличаются друг от друга. Лишь с течением времени влияние термического взаимодействия становится заметным.

## 7 ОБСУЖДЕНИЕ

Рассматривался также случаи действия теплового удара. Результаты вычислений для слоя из стали и слоя из полимерного материала, механические и теплофизические свойства которых приводятся в книге [8], хорошо согласуются с результатами [6, 8]. Для двухслойной конструкции из рассматриваемых материалов нагрузки (12), (13) задавались в виде

$$f(\tau) = \tau / \exp(\tau), \text{ а } \varphi(\tau) = 0.$$

Безразмерная ширина первого слоя равна 0,5, а второго – 0,125. Коэффициенты $\varepsilon|_1 = 0{,}0114$, $\varepsilon|_2 = 0{,}482$. Для $\tau_0 = 10^{-9}[c]$ скорость $c_2 = 0{,}03$. Полученные распределения напряжений по толщине двухслойной конструкции для различных моментов времени показали, что головная часть волны сжатия при переходу через поверхность раздела $\xi = 0{,}5$ частично отражается и распространяется при $\tau > 0{,}5$ в первом слое как волна растяжения.

## ВЫВОДЫ

Как и следовало ожидать, область сопряжения составляющих разнородной полосы наиболее предрасположены к повреждениям, так как вблизи поверхности соединения составляющих конструкции термоупругие волны напряжения в процессе отражения дифракции испытывают конечный разрыв и становятся растягивающими.

Предложенная математическая модель и методика расчета термоупругого деформирования конструкций, вызванного действием нестационарного магнитного поля, позволяют, не меняя вычислительной схемы для внутренних узлов сетки, получить конкретные результаты для различных начальных и граничных условий, т.е. проводить численные эксперименты. Варьируя геометрические и механические параметры, можно в условиях заданных нагрузок на основе анализа проходящих и отраженных термоупругих волн подбирать материалы с необходимыми демпфирующими характеристиками.

Результаты численных расчетов для частных случаев согласуются с данными, полученными другими методами [5–7].

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в Запорожском национальном техническом университете в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы «Разработка математических моделей и методик исследования механических систем под действием сложных нагрузок» (НДР 04612 ДР 0112U5348).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Партон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М. : Наука. Главн. ред. физ.-матем. лит., 1981. – 588 с.

2. Селезов И. Т. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах / И. Т. Селезов, С. В. Корсунский. – Киев : Наукова думка, 1991. – 200 с.
3. Шамровский А. Д. Термоупругие волны и скорость их распространения в динамической задаче взаимосвязанной термоупругости / А. Д. Шамровский, Г. В. Меркотян // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Выпуск № 7 (53), том 5. – С. 41–45.
4. Bala Kiran. A Review of Two-Temperature Thermo-Elasticity / Kiran Bala // International Journal of Modern Engineering Research (IJMER). – 2012. – Vol. 2, Issue 6.– pp. 4224–4227.
5. Moon F. C. Magnetically induced stress waves in a conducting solid – theory and experiment / F. C. Moon, S. Chattopadhyay // Transactions of the ASME. – 1974. – 41, Ser. E, № 3. – P. 641–646.
6. El-Bary A. A. Numerical Solution of Electro-magneto-thermo-mechanic Shock Problem / A. A. El-Bary // Commutational Methods in Science and Technology. – 2006. – Vol. 12 (2) – pp. 101–108.
7. Ezzat M. Generalized magneto-thermo-elasticity in a perfectly conducting mediem / M. Ezzat, H. Youssef // International Journal of Solids and Structures. – 2005. – Vol. 42. – pp. 6319–6334.
8. Коваленко А. Д. Термоупругость. / А. Д. Коваленко // Киев : Вища школа, 1975. – 216 с.
9. Беляев Н. М. Методы теории теплопроводности. В 2-х частях. / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. Ч. 1. – М. : Высш. школа, 1982. – 237 с.
10. Сагамонян А. Я. Волны напряжений в сплошных средах / А. Я. Сагамонян // М.: Изд-во МГУ – 1985 – 416 с.
11. Chou P. C. A Unified Approach One-Dimensional Elastic Waves by the Method of Characteristics / P. C. Chou, R. W. Mortimer // Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34, No. 3 – pp. 745–750.
12. Данильченко Д. В. Нестационарные волны в составной цилиндрической оболочке / Д. В. Данильченко, Ю. В. Мастиновский // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2004. – № 1. – С. 105–107.

Статья поступила в редакцию 20.10.2015.
После доработки 25.10.2015.

Мастиновський Ю. В.
Канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики, Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя, Україна

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ДЕМПФУЮЧИХ ПОКРИТТІВ У РАДІОЕЛЕКТРОННІЙ АПАРАТУРІ**

Створення нових багатошарових покриттів вузлів і блоків радіоелектронної апаратури (РЕА), що ефективно демпфують дію термомеханічних навантажень ударного типу, вимагає розробки нових зручних для інженерної практики математичних моделей. Запропонована в даній роботі математична модель і методика розрахунків дозволяє досліджувати проходження і відбиття термопружних хвиль у багатошаровому тілі, що збуджуються нестаціонарним магнітним полем на межі електропровідного шару. Також розглядається задача оцінки відносного впливу об'ємних сил, спричинених дією магнітного поля в електропровідному шарі на процес розповсюдження хвиль в полімерних компаундах. Швидкість розповсюдження тепла вважається скінченною. Вводяться припущення, що спрощують повністю зв'язану систему магнетотермопружних рівнянь, котрі дозволять для отримання конкретних результатів застосувати числове розв'язання з використанням методу характеристик. Вказано спосіб знаходження шуканих величин у вузлових точках межі поділу шарів. Запропонована математична модель та методика розрахунку дає можливість, не вносячи суттєвих змін у розрахункову схему, проводити числові експерименти з дослідження демпфувальних якостей багатошарових покриттів з різними геометричними і механічними параметрами в умовах заданих термомеханічних навантажень. Дана методика розрахунку багатошарових покриттів різнорідних термопружних конструкцій може бути використана для виявлення ділянок, найбільш схильних до пошкоджень.
**Ключові слова:** магнітне поле, термопружність, демпфувальні покриття, напруження, метод характеристик.

Mastinovskiy Y. V.
PhD, Associate Professor, Head of Applied Mathematics Department, Zaporozhye National Technical University, Zaporozhye, Ukraine

**MATHEMATICAL MODEL OF NON-STSTIONARY THERMO-ELASTIC DEFORMATION OF MULTYLAYER DAMPHING COATINGS IN ELECTRONICS**

Generation of new multilayer coatings of units and blocks in electronics for effective damping of thermo-mechanical impact loads requires the development of mathematical models suitable for engineering practice. Mathematical model and calculation method proposed in this paper allows investigate the passing and reflection of thermo-elastic waves in a multilayer body excited by non-stationary magnetic field at the conductive layer boundary. Also, the problem of estimating relative influence of volume forces induced by the magnetic field in the electrically conductive non-ferromagnetic layer on the wave propagation in thermo-elastic polymer compounds was considered. It is assumed that the velocity of heat propagation is finite. Assumptions are introduced to simplify the fully coupled system of magneto-thermo-elastic equations that allow applying the numerical solution based on the method of characteristics for obtaining concrete results. A method for finding required quantities at the nodal points of the boundary between the layers is indicated. The suggested mathematical model and calculation method makes it possible, without making any significant changes in the computing system, to carry out numerical experiments on researching the damping properties of multilayer coatings with different geometrical and mechanical parameters under the conditions of the thermo-mechanical loadings. This calculation method of heterogeneous multilayer thermo-elastic structures can be used to identify the areas most disposed to the damage.
**Keywords:** magnetic field, thermo-elasticity, damping coatings, stresses, method of characteristics.

## REFERENCES

1. Parton V. Z. Metody magnitnoy teoriyi uprugosty. Moscow, Nauka. Glavn. red. phys.- mat. lit., 1981, 588 p.
2. Selezov I. T. Nestatsionarnsye i nelineyniye volny v elektroprovodyaschikh sredakh. Kiev, Naukova dumka, 1991, 200 p.
3. Shamrovskiy A. D., Maekjtyan G. V. Termouprugiye volny i skorost ikh rasprostraneniya v dinamicheskoy zadache vzaimosvyazannoy termouprugosti, *Vostochno-yevropeiskiy zhurnal peredovykh technologiy.* 2011, Vypusk № 7 (53), Vol. 5, pp. 41–45.
4. Bala Kiran A Review of Two-Temperature Thermoelasticity, *International Journal of Modern Engineering Research (IJMER)*, 2012, Vol. 2, Issue 6, pp. 4224–4227.
5. Moon F. C., Chattopadhyay S. Magnetically induced stress waves in a conducting solid – theory and experiment, *Transactions of the ASME*, 1974, 41, Ser. E, No. 3, pp. 641–646.
6. El-Bary A. A. Numerical Solution of Electro-magneto-thermo-mechanic Shock Problem, Commutational Methods in Science and Technology, Vol. 12 (2), 2006, pp. 101–108.
7. Ezzat M., Youssef H. Generalized magneto-thermo-elasticity in a perfectly conducting mediem, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, 2005, pp. 6319–6334.
8. Kovalenko A. D. Termouprugost. Kiev, Vyscha shkola, 1975, 216 p.
9. Belyayev N. M., Ryadno A. A. Metody teoriyi termouprugosty. V 2-kh chastyakh. Ch.1. Moscow, Vyssh. Shkola, 1982, 237 p.
10. Sagamonyan A. Y. Volhy napryazheniy v sploshnykh sredakh. Moscow, Izd-vo MGU, 1985, 416 p.
11. Chou P. C., Mortimer R. W. A Unified Approach One-Dimensional Elastic Waves by the Method of Characteristics, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, No. 3, 1967, pp. 745–750.
12. Danilchenko D. V., Mastinovsky Y. V. Nestatsionarnyye volny v sostavnoy tsilindricheskoy obolochke, *Novi materialy i technolohiyi v metallurhiyi ta mashinobuduvanni.* Zaporizhzhya, ZNTU, 2004, No. 1, pp. 105–107.