

МЕТОД ФОНОВОЙ СЕТКИ ДЛЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

В статье рассмотрена проблема построения дискретных моделей на базе треугольных элементов для геометрических областей сложной формы. Для представления геометрических областей используется функциональный подход на базе теории R -функций В. Л. Рвачева. В основе функционального подхода лежит использование неявных функций и логических операций над ними. Использование функционального подхода требует учета его особенностей при построении дискретных моделей. При таком подходе для определения принадлежности точки области необходимо вычислить значение функции в этой точке. Поэтому использование классических методов триангуляции, основанных на использовании множества опорных узлов, менее эффективно. При использовании методов на основе фоновой сетки элементы строятся непосредственно в геометрической области. Внутренние элементы фоновой сетки формируют начальную сетку, затем производится адаптация к границам области. Полученные сетки после сглаживания будут близкими к равномерным при использовании структурированных сеток в качестве фоновых.

Ключевые слова: дискретная модель, сетка, треугольник, R -функция, фоновая сетка.

НОМЕНКЛАТУРА

Ω – некоторая двумерная область;

$F(x, y)$ – неявная функция, представляющая двумерную область;

x – абсцисса точки;

y – ордината точки;

x_i – значение i -й неявной функции;

r_i – внутренний радиус кольцевой области;

r_o – внешний радиус кольцевой области;

m – количество элементов в дискретной модели;

$t_i = (p_{i,0}, p_{i,1}, p_{i,2})$ – вершины i -го треугольного элемента;

$p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ – координаты j -го узла i -го элемента;

$e_{k,l}$ – k -е ребро, инцидентное узлу p_l ;

$\vec{n}(e)$ – операция вычисления нормали к ребру с учетом направления обхода; узлов треугольника, которому принадлежит ребро;

h_x – шаг фоновой сетки вдоль оси абсцисс;

h_y – шаг фоновой сетки вдоль оси ординат;

$\text{deledge}(A, B)$ – операция удаления из сетки ребра, образованного вершинами A и B ;

w – ширина прямоугольной области;

h – высота прямоугольной области;

r – радиус круговой области;

ng – количество полос в модели зубчатого колеса.

ВВЕДЕНИЕ

Важной частью проектирования сложных инженерных объектов и систем является исследование их эксплуатационных характеристик (например, прочности, устойчивости). Для исследования сложных объектов зачастую на практике используют численные методы, в основе которых лежит идея перехода от аналитической модели к ее дискретному аналогу – дискретной модели. Для моделирования объектов постоянной толщины (балок, плит, платин – объектов, объемными эффектами в которых

можно пренебречь) используются двумерные дискретные модели. Одной из наиболее распространенных форм двумерных элементов являются треугольники. При этом для автоматической генерации дискретных моделей необходимо представить информацию о геометрической структуре объекта в «понятной» компьютеру форме. Одним из распространенных здесь является функциональный подход с использованием неявных математических функций и аппарата теории R -функций Рвачева В. Л. для логического конструирования моделей сложных геометрических объектов.

Объектом исследования является процесс построения моделей сложных геометрических объектов.

Предмет исследования составляют методы построения дискретных моделей.

Целью данной работы являлась разработка метода, позволяющего строить дискретные модели двумерных геометрических объектов, представленных функционально.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исходная область Ω представлена неявной действительной функцией $F(x, y)$. Причем $F(x, y) < 0$ во внутренних точках Ω , $F(x, y) > 0$ во внешних для Ω точках и, соответственно, $F(x, y) = 0$ на границе области. Задача состоит в разработке способа построения покрытия треугольниками области Ω .

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Сегодня достаточно развиты методы построения триангуляции Делоне для исходного множества точек, детальный анализ которых проведен в работах А. В. Скворцова [1–2]. Эти методы получили свое применение в задачах компьютерной графики и геоинформационных системах. Однако их применение при функциональном подходе требует построения множества опорных точек, что является самостоятельной сложной задачей.

Также разработаны способы и методы построения триангуляции Делоне для областей, представленных многоугольниками или планарными графами [3–6]. В этой

группе методов наибольшее распространение получили модификации метода Рапперта [5], которые по сути являются способами повышения качества сетки, сгенерированной для исходной области.

Методы подвижного фронта [7–8] основаны на идее послойного заполнения исходной области элементами треугольной формы. Исходной информацией для них является дискретная модель границы области. Данные методы весьма универсальны, однако необходимо отметить их высокую ресурсоемкость и относительно низкую скорость работы.

Другая группа методов генерации сеток базируется на использовании базовой или фоновой сетки с адаптацией приграничных узлов к границам области [9–11]. Фоновая сетка может быть относительно просто сгенерирована (например, структурированная сетка), при этом накладывается единственное требование: размер ячеек на границе должен быть меньше минимальной геометрической особенности области. Для построения неравномерных фоновых сеток используется метод Quadtree [12]. На этапе адаптации здесь распространено использование граничной коррекции узлов [9]. Основным недостатком является возможность получения «плохих» или вырожденных элементов около границы области.

Исследования в области построения R -функций для представления сложных геометрических объектов проведены академиком В. Л. Рвачевым и его учениками [13–15]. Существующие работы [16–17] по решению задачи построения триангуляций геометрических объектов, представленных функционально, основаны на последовательном построении опорного множества точек на границе области и триангуляции Делоне на базе существующих методов.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Функциональный подход предполагает использование неявных математических функций для представления геометрических объектов. Простейшие формы (примитивы) представляются элементарными функциями. Например, функция

$$\text{circle}(x, y, r) \equiv r^2 - x^2 - y^2 \quad (1)$$

соответствует области, ограниченной окружностью радиуса r с центром в начале координат.

Для логического конструирования неявных функций, соответствующим более сложным областям, используются системы R -функций [13–15]. Наиболее распространенная в практике моделирования геометрических объектов система R -функций \mathfrak{R}_0 имеет вид

$$\begin{aligned} \neg x &\equiv -x; \\ x_1 \wedge x_2 &\equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ x_1 \vee x_2 &\equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Например, функция

$$\text{annular}(x, y, r_i, r_o) \equiv \text{circle}(x, y, r_o) \wedge \neg \text{circle}(x, y, r_i).$$

соответствует кольцевой области (рис. 1а). Аналогично моделируются трехмерные геометрические объекты.

Неявное представление дает правило для проверки принадлежности точки телу, но не позволяет явно перечислить внутренние и граничные узлы. Для получения граничных узлов, как правило, сканируют область с некоторым шагом и затем в ячейках, содержащих и внутренние и внешние точки, использует методы поиска корней функции. Следовательно, с вычислительной точки зрения перспективным представляется разработка методов на базе фоновой сетки, что позволит строить элементы уже на этапе сканирования области.

Общая идея метода заключается в использовании некоторой фоновой сетки, полностью покрывающей исходную область. Фоновая сетка может быть сгенерирована достаточно просто (например, равномерная сетка), но размер ячеек должен быть меньше соответствующих им геометрических особенностей. Затем все внешние ячейки удаляются, а оставшиеся ячейки формируют начальную сетку (рис. 1б). Заключительным этапом является построение элементов в приграничном слое (адаптация к границам, рис. 1в). Этот этап является наиболее сложным. Здесь с учетом особенностей функционального подхода к моделированию перспективным видится техника изоморфизма, предложенная в работе [18] для построения четырехугольников и шестигранников на основе метода суперпозиции.

Пусть фоновая сетка треугольных элементов представлена множеством

$$M_f = \{t_i\}, i = \overline{1, m}.$$

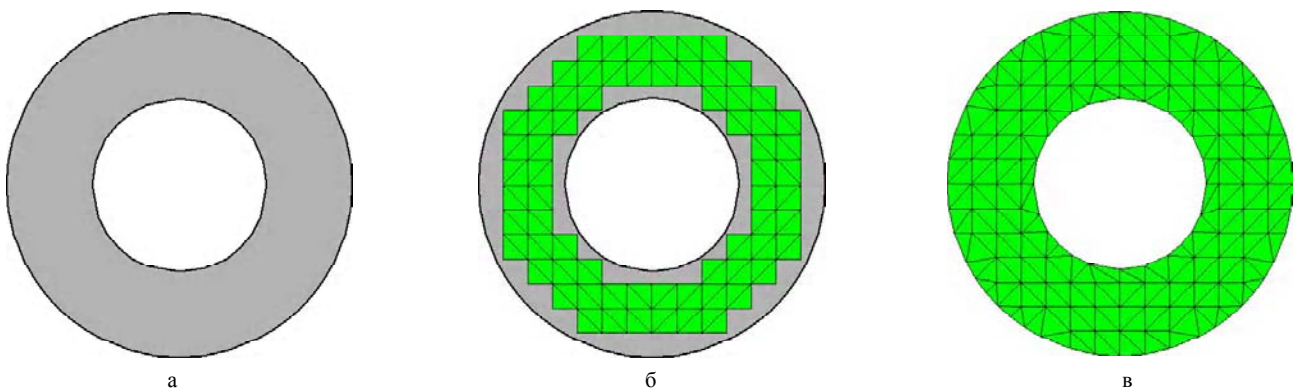


Рисунок 1 – Исходная область, начальная сетка и адаптированная сетка при $r_i = 0,5$ и $r_o = 1$: а – схема области, б – начальная сетка, в – триангуляция

Первым шагом является формирование начальной сетки. Начальную сетку $M_{initial}$ образуют внутренние элементы:

$$M_{initial} = \{i: F(p_{i,j}) > 0, \forall j\}.$$

На втором шаге для каждого узла начальной сетки строится нормаль. Нормаль к узлу начальной сетки определим, как среднее арифметическое нормалей к ребрам (рис. 2), инцидентных в этом узле:

$$n(p_l) = \frac{1}{k} \sum_{p_l \in e_{k,l}} \bar{n}(e_{k,l}).$$

На третьем шаге путем нахождения проекции нормали на границу области строится множество изоморфных точек. Необходимо отметить, что при функциональном представлении для нахождения изоморфных точек могут использоваться методы двоичного поиска, золотого сечения и т. п., осуществляя поиск на отрезке длины $\sqrt{h_x^2 + h_y^2}$. На этом этапе учитываются характерные точки: если на расстоянии Δ от изоморфной находится характерная точка, то в качестве изоморфной используется соответствующая характерная точка.

Четвертым шагом является построение элементов в приграничном слое. В результате третьего шага каждому узлу на границе начальной сетки соответствует изоморфный на границе области, каждому граничному ребру начальной сетки соответствует ребро на границе области. Следовательно, для каждого граничного ребра начальной сетки можно двумя способами построить элементы (меняя направление диагонали, в четырехугольнике, который образуют смежные вершины и изоморфные к ним). Из двух возможных способов формирования треугольников (рис. 3) выберем тот, при котором в треугольниках отношение значений минимального угла к максимальному будет наибольшим.

На четвертом шаге могут появляться вырожденные или «плохие» элементы обусловленные возможностью

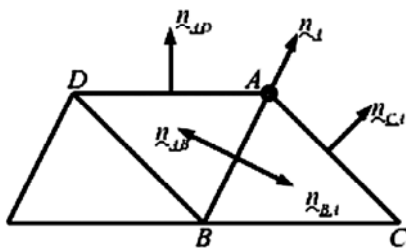


Рисунок 2 – Построение нормали в узле начальной сетки

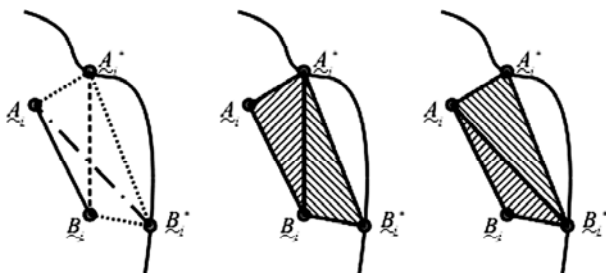


Рисунок 3 – Способы формирования треугольников в приграничном слое

совпадения или близкого (относительно размеров области) расположения изоморфных узлов. Для решения задачи устранения «плохих» элементов в приграничном слое для соседних узлов A и B определим операцию

$$\text{join}(A, B) = \{\text{deledge}(A, B), A = B\},$$

В результате операции $\text{join}(A, B)$ будут удалены треугольники, для которых ребро AB является общим, узел A будет совмещен с узлом B (схема-пример на рис. 4).

С учетом того, что вырожденные или «плохие» элементы при таком подходе могут возникать только в приграничном слое, операция $\text{join}(A, B)$ может применяться только к элементам этого слоя, если расстояние между двумя соседними узлами меньше Δ .

Параметр Δ на третьем и четвертом шагах является ограничением на минимальный размер ребра. Данную величину можно интерпретировать как параметр качества сетки. В общем случае его значение может быть произвольной зависимостью от координат или размеров соседних элементов. Например, в случае, если в качестве фоновой использована равномерная сетка, то можно принять $\Delta = \delta \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, где значение δ в зависимости от задачи изменяется от 0,2 до 0,5.

В случае, если узлы A и B одновременно принадлежат границе, то операция $\text{join}(A, B)$ может быть модифицирована следующим способом: оба узла A и B переносятся в точку пересечения нормали к середине AB с границей области, осуществляя таким образом местное сглаживание.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для тестирования предложенного метода разработан соответствующий модуль в системе автоматизированного проектирования на базе функционального подхода (Свидетельство о регистрации авторского права на произведение № 53829 от 24.02.2014). Разработка выполнена с использованием языка программирования C++ (компилятор GCC) и библиотеки Qt для программирования интерфейса пользователя. В тестовых примерах принято значение параметра метода $\delta = 0,4$.

Для анализа результатов работы предложенного подхода рассмотрим сетки, сгенерированные для чертежей некоторых объектов. Для количественного анализа качества дискретной модели используем две метрики: 1) значение минимального угла элемента; 2) отношение минимального к максимальному углу на элементе. Обе эти метрики взаимосвязаны: наличие острых углов (меньше

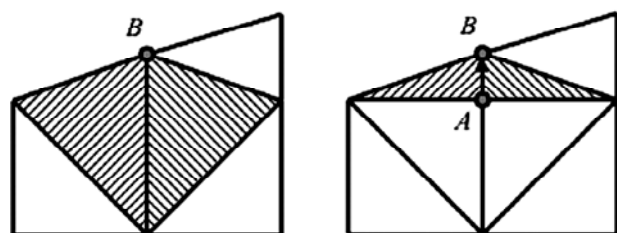


Рисунок 4 – Пример операции $\text{join}(A, B)$

15° отрицательно влияет на вычислительный процесс в методе конечных элементов; при этом чем ближе отношение углов треугольника к единице, тем ближе он к геометрически правильной форме.

1. L-область

Рассмотрим L-область, изображенную на рис. 5а. Эта область может быть представлена функцией

$$lshape(x, y, w, h, a) = \text{rect}\left(x - \frac{w}{2}, y - \frac{a}{2}, w, a\right) \vee \text{rect}\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{h}{2}, a, h\right),$$

где функция

$$\text{rect}(x, y, w, h) = \left(\frac{w^2}{4} - x^2\right) \wedge \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (3)$$

соответствует прямоугольной области, центр масс которой совпадает с началом координат.

При использовании в качестве фоновой равномерной сетки с количеством элементов 9×12 для прямоугольника [0;30]×[0;40] получено, что минимальный угол принимает значения от 27,81° до 45,00° (рис. 5б) при этом соотношение углов находится в диапазоне от 0,28 до 0,63 (рис. 5в).

2. Квадратная пластина с треугольным отверстием в центре

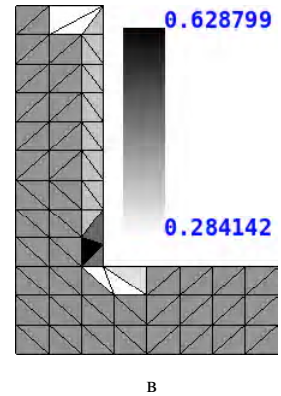
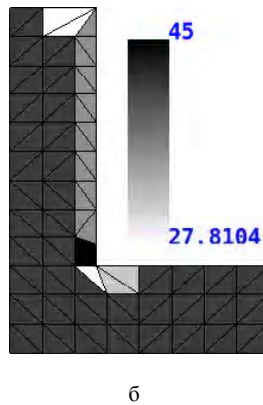
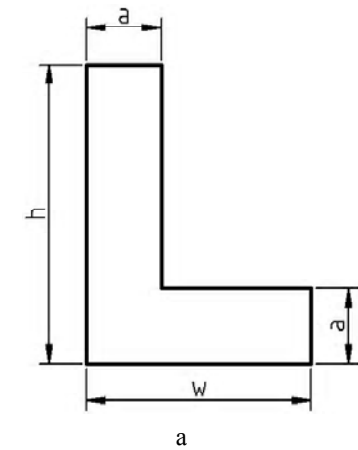


Рисунок 5 – L-область: $w = 30, h = 40, a = 10$: а – чертеж области, б – распределение значений минимального угла, в – распределение соотношения углов

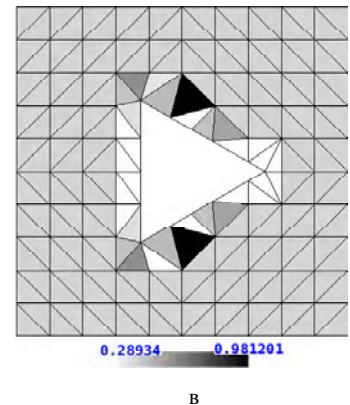
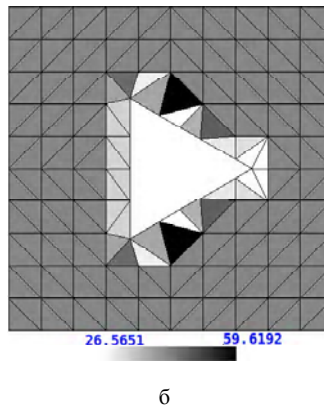
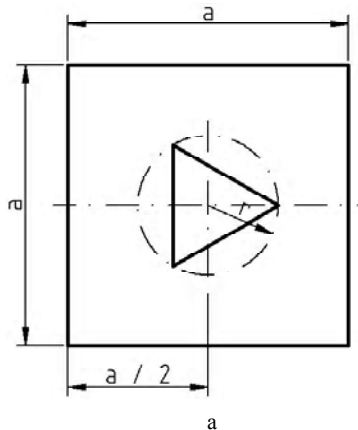


Рисунок 6 – Квадратная пластина: $a = 40, r = 10$: а – чертеж области, б – распределение значений минимального угла, в – распределение соотношения углов

Квадратная пластина с треугольным отверстием в центре (рис. 6а) может быть представлена функцией

$$qplate(x, y, a, r) = \text{rect}(x, y, a, a) \wedge \neg \text{regular}(x, y, r, 3),$$

где функция

$$\text{regular}(x, y, r, n) = [(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)] \wedge \\ \wedge [(y - y_2)(x_3 - x_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2)] \wedge \dots \wedge \\ \wedge [(y - y_n)(x_n - x_{n-1}) - (x - x_n)(y_n - y_{n-1})],$$

$$x_i = r \cos(\alpha_i), \quad y_i = r \sin(\alpha_i), \quad \alpha_i = \frac{2\pi}{n}(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

соответствует правильному n-угольнику с центром в начале координат.

При использовании в качестве фоновой равномерной сетки с количеством элементов 10×10 для квадрата [-20;20]×[-20;20] получено, что минимальный угол принимает значения от 26,57° до 59,62° (рис. 6б) при этом соотношение углов находится в диапазоне от 0,29 до 0,98 (рис. 6в).

3. Гайка

Двумерную область, подобную гайке (рис. 7а), также можно представить при помощи формулы (4):

$$\text{nut}(x, y, r_1, r_2) = \text{regular}(x, y, r_1, 6) \wedge \neg \text{circle}(x, y, r_2).$$

При использовании в качестве фоновой равномерной сетки с количеством элементов 16×16 для квадрата $[-40;40] \times [-40;40]$ получено, что минимальный угол принимает значения от $30,00^\circ$ до $56,93^\circ$ (рис. 7б) при этом соотношение углов находится в диапазоне от 0,29 до 0,86 (рис. 7в).

4. Планка

Контур специальной планки (рис. 8а), может быть представлен формулой

$$\text{planch}(x, y, w, h, R, r) = \left\{ \left[\left(\frac{w}{2} - x^2 \right) \wedge \left[\left[\frac{h}{2} + \left(R - \frac{h}{2} \right) \left(x + \frac{w}{2} \right) \frac{1}{w} \right]^2 - y^2 \right] \right] \vee \text{circle} \left(x - \frac{w}{2}, y, R \right) \right\} \wedge \text{circle} \left(x - \frac{w}{2}, y, r \right).$$

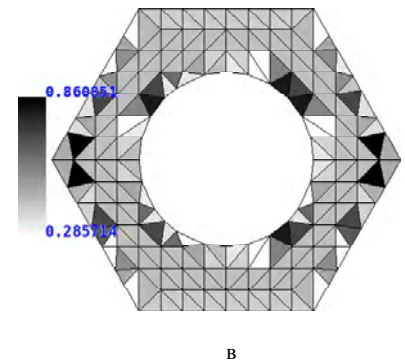
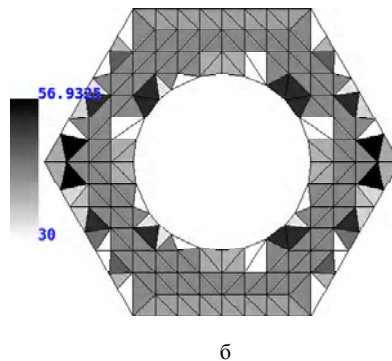
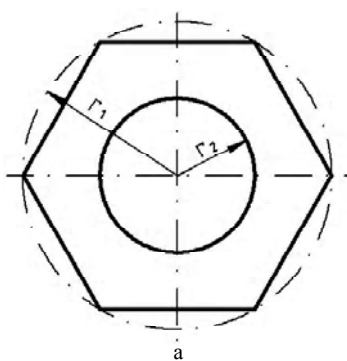


Рисунок 7 – Гайка: $r_1 = 40$, $r_2 = 20$:

а – чертёж области, б – распределение значений минимального угла, в – распределение соотношения углов

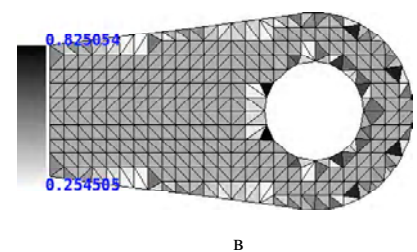
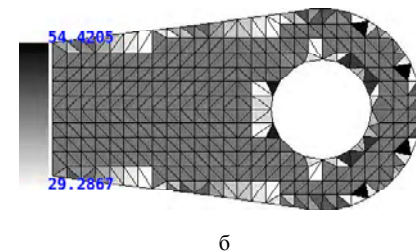
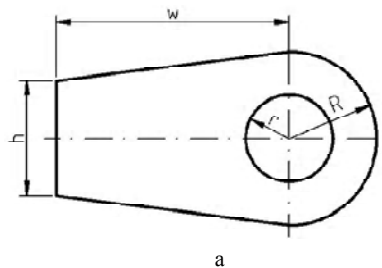


Рисунок 8 – Контур специальной планки при $h = 20$, $w = 40$, $R = 15$ и $r = 7,5$:

а – чертёж области, б – распределение значений минимального угла, в – распределение соотношения углов

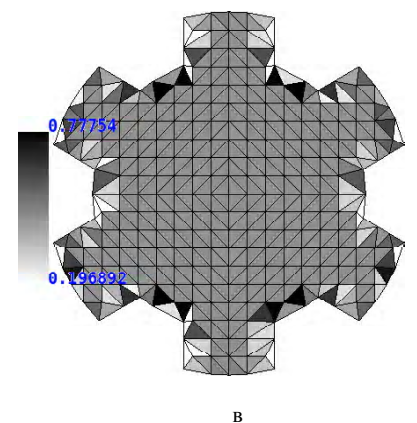
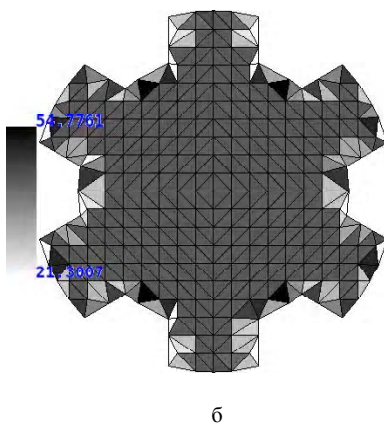
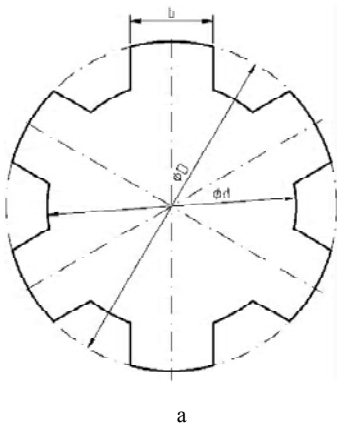


Рисунок 9 – Зубчатое колесо при $D = 80$, $d = 60$, $b = 20$ и $ng = 3$:

а – чертёж области, б – распределение значений минимального угла, в – распределение соотношения углов

При использовании в качестве фоновой равномерной сетки с количеством элементов 27×15 для прямоугольника $[-20;35] \times [-15;15]$ получено, что минимальный угол принимает значения от $29,29^\circ$ до $54,42^\circ$ (рис. 8б) при этом соотношение углов находится в диапазоне от 0,26 до 0,83 (рис. 8в).

5. Зубчатое колесо

Примитивная модель зубчатого колеса (рис. 9), может быть представлена выражением

$$\text{gear}(x, y, D, d, b, ng) = \left\{ \left[\left[\frac{b^2}{4} - (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1) \right] \vee \left[\frac{b^2}{4} - (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2) \right] \vee \dots \vee \left[\frac{b^2}{4} - (x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n) \right] \right] \right\} \wedge \text{circle} \left(x, y, \frac{D}{2} \right) \vee \text{circle} \left(x, y, \frac{d}{2} \right).$$

При использовании в качестве фоновой равномерной сетки с количеством элементов 20×20 для квадрата $[-40;40] \times [-40;40]$ получено, что минимальный угол принимает значения от $21,30^\circ$ до $54,78^\circ$ (рис. 9б) при этом соотношение углов находится в диапазоне от 0,20 до 0,78 (рис. 9в).

6. Прокладка

Модель прокладки (рис. 10а) может быть представлена на базе формул (1) и (3):

$$\text{layer}(x, y) = \left[\text{circle}(x, y, r_1) \vee \text{circle}(x, y + h_2, r_5) \vee \text{rect}\left(x, y + \frac{h_2}{2}, w_2, h_2\right) \right] \wedge \\ \wedge \neg \text{circle}(x, y, r_2) \wedge \neg \text{rect}(x, y - r_2, w_1, 2h_1) \wedge \\ \wedge \neg \text{circle}(x - c_{1,x}, y - c_{1,y}, r_4) \wedge \neg \text{circle}(x - c_{2,x}, y - c_{2,y}, r_4) \wedge \\ \wedge \neg \text{circle}(x - c_{3,x}, y - c_{3,y}, r_4) \wedge \neg \text{circle}(x - c_{4,x}, y - c_{4,y}, r_4) \wedge \\ \neg \text{rect}\left(x, y + h_2 - \frac{h_3}{2}, 2r_6, h_3\right) \wedge \neg \text{circle}(x, y + h_2, r_6) \wedge \neg \text{circle}(x, y + h_2 - h_3, r_6),$$

где параметры $r_1 = \frac{80}{2} = 40$, $r_2 = \frac{40}{2} = 20$, $r_3 = \frac{60}{2} = 30$,
 $r_4 = \frac{10}{2} = 5$, $r_5 = 24$, $r_6 = 14$, $w_1 = 14$, $h_1 = 5$, $w_2 = 2r_5$,

$h_2 = 100$, $h_3 = 48$ соответствуют размерам на чертеже; параметры $c_{1,x} = r_3 \cos(-\pi/4)$, $c_{1,y} = r_3 \sin(-\pi/4)$,
 $c_{2,x} = r_3 \cos(\pi/4)$, $c_{2,y} = r_3 \sin(\pi/4)$, $c_{3,x} = r_3 \cos(3\pi/4)$,
 $c_{3,y} = r_3 \sin(3\pi/4)$, $c_{4,x} = r_3 \cos(5\pi/4)$, $c_{4,y} = r_3 \sin(5\pi/4)$ – центры четырех отверстий.

При использовании в качестве фоновой равномерной сетки с количеством элементов 49×102 для прямоугольника $[-40;40] \times [-124;40]$ получено, что минимальный угол принимает значения от $23,74^\circ$ до $58,75^\circ$ (рис. 10б) при этом соотношение углов находится в диапазоне от 0,24 до 0,95 (рис. 10в).

На примере кольцевой области, изображенной на рис. 1, исследуем влияние параметров сетки на ее качество. Рассмотрим влияние количества элементов равномерной фоновой сетки (шага сетки) на распределение значений метрик, описанных выше. На рис. 1а показано распределение значений минимального угла элемента, соответственно на рис. 1б показано распределение значений соотношений углов. Из графиков видно, что значения минимального угла для сеток кольцевой области мало зависят от шага (густоты сетки) и колеблются около 30° . Аналогичная ситуация со значениями метрики отношения углов.

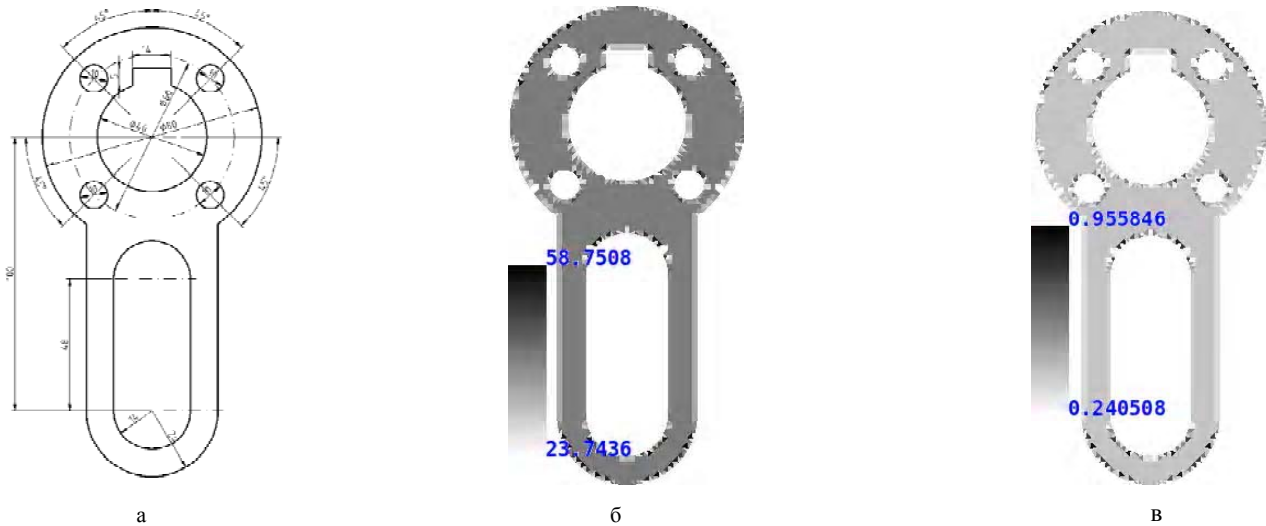


Рисунок 10 – Прокладка:

а – чертеж области, б – распределение значений минимального угла, в – распределение соотношения углов

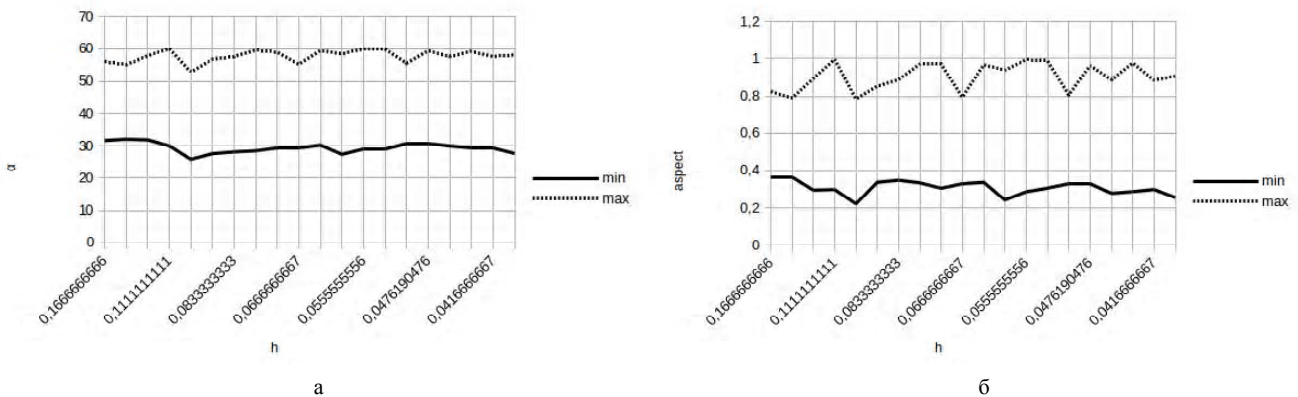


Рисунок 11 – Зависимость распределения метрик от шага сетки:
 а – распределение значений минимального угла, б – распределение соотношения углов

Теперь рассмотрим влияния параметра δ на значения метрики. Варьируем значения δ , считая, что используется равномерная фоновая сетка 16×16 элементов для квадрата $[-1; 1] \times [-1; 1]$. Из рисунка 12 видно, что при $\delta = 0$ возможно появления вырожденных элементов, наибольшее значение минимального угла сетки получается при $0,4 \leq \delta \leq 0,5$, при $\delta > 0,5$ качество сетки ухудшается (при этом визуально выявлены вырожденные элементы).

Для других тестовых примеров получены аналогичные изображенным на рис. 11–12 зависимости метрик от параметров.

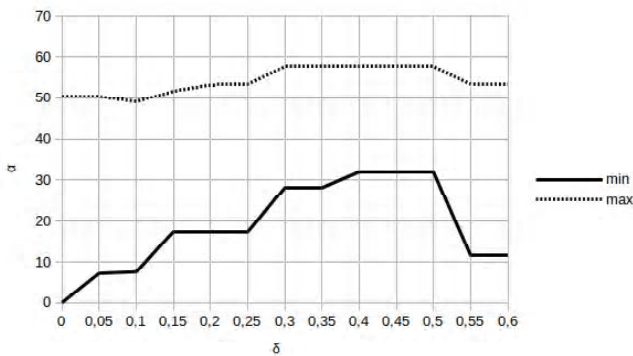


Рисунок 12 – Зависимость распределения значений минимального угла от значения параметра δ

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Как видно из рис. 5–10 полученные сетки по качеству близки к сеткам (наименьшее значение минимального угла в элементе сетки превышает 20 градусов), сгенерированным алгоритмами на основе метода Рапперта. Разработанный метод не требует предварительного анализа исходной области и строит сетку непосредственно на этапе сканирования, что позволяет снизить затраты вычислительных ресурсов.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Предложенный метод в отличие от существующих работ [16–17] для решения задачи построения триангуляций геометрических объектов, представленных функционально, не требует построения опорного множества точек на границе области.

Недостатком предложенного метода является генерация сеток, близких к равномерным при использовании равномерных фоновых сеток. Однако, для генерации неравномерных сеток могут быть использованы неравномерные фоновые сетки, сгенерированные на основе метода Quadtree [12].

ВЫВОДЫ

В работе решена задача автоматического построения двумерных дискретных моделей для геометрических объектов, представленных функционально.

Научная новизна результатов, полученных в статье, состоит в том, что впервые предложен метод для построения триангуляции двумерных областей, представленных функционально, используя непосредственное построение элементов при сканировании исходной области, что позволяет снизить требования к вычислительным ресурсам.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что разработано программное обеспечение, реализующее предложенный метод, на основе которого решены задачи исследования устойчивости пластин и пологих оболочек с отверстиями нестандартной формы.

Перспективы дальнейших исследований состоят в том, чтобы определить более точно оптимальные значения параметров метода. Также перспективной исследований является обобщение предложенного метода для моделирования трехмерных объектов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках государственной научно-исследовательской темы Запорожского национального университета №3/15 «Математическое моделирование конструкций неоднородной структуры на базе современных информационных технологий» (номер гос. регистрации 0115U000761).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – № 3. – С. 14–39.
2. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и ее применение / А. В. Скворцов. – Томск : Издательство Томского университета, 2002. – 128 с.
3. Bern M. Mesh generation and optimal triangulation / M. Bern, D. Eppstein // Computing in Euclidean Geometry. – 1992. – No. 1. – P. 23–90.
4. Bern M. Triangulating polygons without large angles / M. Bern, D. Dobkin, D. Eppstein // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 1995. – Vol. 5. – P. 171–192. DOI: 10.1142/S0218195995000106
5. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation / J. Ruppert // Journal of Algorithms. – 1995. – Vol. 18, Issue 3. – P. 548–585. DOI: 10.1006/jagm.1995.1021
6. Tournois J. Interleaving Delaunay Refinement and Optimization for 2D Triangle Mesh Generation / J. Tournois, P. Alliez, O. Devillers // The 16th International Meshing Roundtable : International Conference, Washington, 14–17 October 2007 : proceedings. – Washington : Springer, 2008. – P. 83–101. DOI: 10.1.1.94.6288
7. Mavriplis D. J. An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness / D. J. Mavriplis // Journal of Computational Physics. – 1995. – Vol. 117, Issue 1. – P. 90–101. DOI: 10.1.1.136.8268
8. Silva C. T. Greedy Cuts: An Advancing Front Terrain Triangulation Algorithm / C. T. Silva, J. S. B. Mitchell // The 6th ACM International Symposium on Advances in Geographic Information Systems : International Conference, Washington, 2–7 November 1998 : proceedings. – Washington : ACM, 1998. – P. 137–144. DOI: 10.1145/288692.288717
9. Галанин М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей : итерационные методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов. – М. : ИПМ им М. В. Келдыша РАН, 2006. – № 9. – 32 с. – (Препринт / РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша ; 06-01-00421).
10. Naumann U. Combinatorial Scientific Computing / [edited by] U. Naumann, O. Schenk. – Boca Raton, Florida : CRC Press, 2012. – 600 p.
11. Cheng S.-W. Delaunay Mesh Generation / S.-W. Cheng, T. K. Dey, J. R. Shewchuk. – Boca Raton, Florida : CRC Press, 2012. – 387 p. ISBN: 9781584887300
12. Samet H. The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures / H. Samet // ACM Computing Surveys. – 1984. – Vol. 16, Issue 2. – P. 187–260. DOI: 10.1145/356924.356930
13. Рвачев В. Л. Введение в теорию R-функций / В. Л. Рвачев, Т. И. Шейко // Проблемы машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 1–2. – С. 46–58.
14. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве / [К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мачевитый, А. В. Толок, Т. И. Шейко] // Информационные технологии. – 2007. – № 10. – С. 23–32.

15. Максименко-Шейко К. В. R-функції в математическом моделюванні геометрических об'єктів в 3D по інформації в 2D / К. В. Максименко-Шейко, Т. І. Шейко // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 98–104.
16. Лисняк А. А. Спосіб побудови дискретних математических геометрических об'єктів, заданих с помощью R-функцій / А. А. Лисняк // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 1. – С. 59–69.
17. Лисняк А. А. Дискретизация границы трехмерных моделей геометрических об'єктів, заданных с помощью R-функцій / А. А. Лисняк // Радиоелектроніка, інформатика, управління. – 2014. – № 1. – С. 82–88. DOI: 10.15588/1607-3274-2014-1-12
18. Schneiders R. A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders // Engineering with Computers. – 1996. – № 12. – P. 168 177. DOI: 10.1007/BF01198732

Статья поступила в редакцию 14.05.2015.

После доработки 19.05.2015.

Чопоров С. В.

Канд. техн. наук, доцент кафедри математичного моделювання Запорізького національного університету, Запоріжжя, Україна

МЕТОД ФОНОВОЇ СІТКИ ДЛЯ ТРИАНГУЛЯЦІЇ ДВОВИМІРНИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ФУНКЦІОНАЛЬНОМУ ПІДХОДІ

У статті розглянуто проблема побудови дискретних моделей на базі трикутних елементів для областей геометричних областей складної форми. Для подання геометричних областей використовується функціональний підхід на базі теорії R-функцій В. Л. Рвачова. В основу функціонального підходу покладено ідею використання неявних функцій та логічних операцій над ними. Використання функціонального підходу потребує врахування його особливостей при побудові дискретних моделей. При такому підході для визначення належності точки необхідно обчислити значення функції у цій точці. Тому використання класичних методів триангуляції, основаних на використанні множини опорних вузлів, менш ефективне. При використанні методів на основі фонові сітки елементи будуються безпосередньо в геометричній області. Внутрішні елементи фонові сітки формують початкову сітку, після чого відбувається її адаптація до границь області. Отримані сітки близькі до рівномірних – скінченні елементи приблизно однакового розміру.

Ключові слова: дискретна модель, сітка, трикутник, R-функція, фонові сітка.

Choporov S. V.

PhD, Associate Professor of Mathematical Modelling Department, Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine

BACKGROUND GRID METHOD FOR PLANE SHAPES TRIANGULATION IN FUNCTIONAL APPROACH

In herein paper is described the problem of triangular mesh generation for complex geometrical domain. Functional approach is used for a geometrical object representation. Vladimir Rvachev's R functions are used also. Functional approach is based on implicit functions and logical operations (negation, conjunction and disjunction) over these functions. Logical operation is a special real-value function that at inner point is greater than zero and at outer point is less than zero. Thus standard triangulations techniques, which based on predefined boundary discret model, is less efficient. During background grid method for triangulation, triangles are built in domain directly. Presented method starts with a mesh that can be relatively easy generated (e.g. uniform mesh). Next, initial mesh is defined as a set of all inner elements. The last one generates a layer of elements near boundary (adaptation step). Adaptive method generates meshes that are close to uniform for structured background grids.

Keywords: discret model, mesh, triangle, R-function, background grid.

REFERENCES

- Skvorcov A. V. Obzor algoritmov postroeniya triangulyacii Delone, *Vychislitel'nye metody i programirovanie*, 2002, No. 3, pp. 14–39.
- Skvorcov A. V. Triangulyaciya Delone i eyo primeneniye. Tomsk, Izdatel'stvo Tomskogo universiteta, 2002, 128 p.
- Bern M., Eppstein D. Mesh generation and optimal triangulation, *Computing in Euclidean Geometry*, 1992, No. 1, pp. 23–90.
- Bern M., Dobkin D., Eppstein D. Triangulating polygons without large angles, *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 1995, Volume 5, pp. 171 192. DOI: 10.1142/S0218195995000106
- Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation, *Journal of Algorithms*, 1995, Volume 18, Issue 3, pp. 548–585. DOI:10.1006/jagm.1995.1021
- Tournois J., Alliez P., Devillers O. Interleaving Delaunay Refinement and Optimization for 2D Triangle Mesh Generation, *The 16th International Meshing Roundtable : International Conference, Washington, 14–17 October 2007 : proceedings*. Washington, Springer, 2008, pp. 83–101. DOI: 10.1.1.94.6288
- Mavriplis D. J. An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness, *Journal of Computational Physics*, 1995, Volume 117, Issue 1, pp. 90–101. DOI: 10.1.1.136.8268
- Silva C. T., Mitchell J. S. B. Greedy Cuts: An Advancing Front Terrain Triangulation Algorithm, *The 6th ACM International Symposium on Advances in Geographic Information Systems : International Conference, Washington, 2–7 November 1998 : proceedings*. Washington, ACM, 1998, pp. 137–144. DOI: 10.1145/288692.288717
- Galanin M. P., Shheglov I. A. Razrabotka i realizaciya algoritmov trexmernoj triangulyacii slozhnyx prostranstvennyx oblastej: iteracionnye metody. Moscow, IPM im M. V. Keldysha RAN, 2006, No. 9, 32 p. (Preprint / RAN, IPM im. M. V. Keldysha ; 06 01 00421).
- Naumann U., Schenk O. [edited by] Combinatorial Scientific Computing. Boca Raton, Florida, CRC Press, 2012, 600 p.
- Cheng S.-W., Dey T. K., Shewchuk J. R. Delaunay Mesh Generation. Boca Raton, Florida, CRC Press, 2012, 387 p. ISBN: 9781584887300
- Samet H. The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures, *ACM Computing Surveys*, 1984, Volume 16, Issue, pp. 187–260. DOI: 10.1145/356924.356930
- Rvachev V. L., Shejko T. I. Vvedenie v teoriyu R-funkcij, *Problemy mashinostroeniya*, 2001, Vol. 4, No 1–2, pp. 46–58.
- Maksimenko-Shejko K. V., Macevityj A. M., Tolok A. V., Shejko T. I. R-funkcii i obratnaya zadacha analiticheskoy geometrii v trexmernom prostranstve, *Informacionnye texnologii*, 2007, No. 10, pp. 23–32.
- Maksimenko-Shejko K. V., Shejko T. I. R-funkcii v matematicheskom modelirovanii geometricheskix ob'ektov v 3D po informacii v 2D, *Visnyk Zaporiz'kogo nacional'nogo universytetu: Zbirnyk naukovykh prac'. Fyzyko-matematychni nauky*, 2010, No. 1, pp. 98–104.
- Lisnyak A. A. Sposob postroeniya diskretnyx matematicheskix geometricheskix obektov, zadannyx s pomoshh'yu R-funkcij, *Visnyk Zaporiz'kogo nacional'nogo universytetu: Zbirnyk naukovykh statej. Fyzyko-matematychni nauky*, 2013, No. 1, pp. 59–69.
- Lisnyak A. A. Diskretizaciya granicy trexmernyx modelej geometricheskix ob'ektov, zadannyx s pomoshh'yu R-funkcij, *Radioelektronika, informatyka, upravlinnja*, 2014, No.1, pp. 82–88. DOI: 10.15588/1607-3274-2014-1-12
- Schneiders R. A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes, *Engineering with Computers*, 1996, No. 12, pp. 168–177. DOI: 10.1007/BF01198732