УДК 621.52+511.52

Симонян С. О.[1], Айвазян А. А.[2]

[1]Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и автоматизации Национального политехнического университета Армении, Ереван, Армения

[2]Старший техник базовой научно-исследовательской лаборатории системного анализа кафедры информационных технологий и автоматизации Национального политехнического университета Армении, Армения

К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА A(T)·X(T)+ X*(T)·B(T) =C(T)

Рассмотрены однопараметрические сопряженные аналоги матричных уравнений типа Сильвестра. На основе несложных преобразований получено эквивалентное матричное уравнение, содержащее только неизвестную матрицу, подлежащую определению. Далее, использованием аппарата кронекеровых произведений матриц, получено аналитическое решение задачи, ограниченное в практических применениях, однако служащее основой для разработки численно-аналитических методов решения исходной задачи. Предложены последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения, основанные на дифференциальных преобразованиях Г. Е. Пухова. При последовательном численно-аналитическом методе оперируем числовыми рекуррентными процедурами на первом этапе вычислений и аналитическими соотношениями – на втором этапе. При параллельном численно-аналитическом методе оперируем линейной гиперсистемой числовых уравнений на первом этапе вычислений и аналитическими соотношениями – на втором этапе. При всех методах получены соответствующие условия однозначной разрешимости задачи. Рассмотрен модельный пример, для которого при использовании численно-аналитических методов получено точное тейлоровское решение. Предложенные численно-аналитические методы могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий.

Ключевые слова: однопараметрический сопряженный аналог матричного уравнения типа Сильвестра, редукция задачи, аналитический метод решения, дифференциальные преобразования, последовательный и параллельный численно-аналитические методы, модельный пример, условия однозначной разрешимости задачи.

НОМЕНКЛАТУРА

A – числовая матрица порядка m;

B – числовая матрица порядка m;

C – числовая матрица порядка m;

X – неизвестная числовая матрица порядка m, подлежащая определению;

$*$ – знак эрмитова сопряжения матриц;

T – знак транспонирования матриц;

-1 – знак обращения матриц;

X^*– неизвестная числовая матрица порядка m;

t – независимая переменная (параметр, в частности – время);

t_i– изолированные значения независимой переменной;

$A(t)$ – однопараметрическая матрица порядка m;

$B(t)$ – однопараметрическая матрица порядка m;

$C(t)$ – однопараметрическая матрица порядка m;

$X(t)$ – неизвестная однопараметрическая матрица порядка m, подлежащая определению;

$A^*(t)$ – однопараметрическая сопряженная матрица порядка m;

$B^*(t)$ – однопараметрическая сопряженная матрица порядка m;

$C^*(t)$ – однопараметрическая сопряженная матрица порядка m;

$X^*(t)$ – однопараметрическая сопряженная матрица порядка m;

$A^{-1}(t)$ – однопараметрическая обратная матрица порядка m;

$B^{-1}(t)$ – однопараметрическая обратная матрица порядка m;

$B^{-T}(t)$ – однопараметрическая обратно-транспонированная матрица порядка m;

$A^{-*}(t)$ – однопараметрическая обратно-сопряженная матрица порядка m;

$A^{-*T}(t)$ – однопараметрическая обратно-сопряженно-транспонированная матрица порядка m;

$\hat{X}(t)$ – неизвестный однопараметрический гипервектор с размерами m^2x1, порожденный матрицей $X(t)$ при обходе ее по строкам и подлежащий определению;

$\hat{D}_1(t)$ – однопараметрический гипервектор с размерами m^2x1, порожденный матрицей $D_1(t)$ при обходе ее по строкам;

$\overline{\underline{\;\cdot\;}}$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот;

$\otimes$ – знак кронекеровых произведений матриц;

$Rang$ – ранг матриц;

$\exists$ – квантор существования;

$\forall$ – квантор всеобщности;

H – масштабный коэффициент;

t_v – центр аппроксимации;

$\chi_i(\cdot), i=\overline{1,11}$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы;

$K=\overline{0,\infty}$ – целочисленный аргумент;

$A(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$B(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$C(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$A^{\overset{-1}{\vee}}(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$B^{\overset{-1}{\vee}}(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$B^*(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$C^*(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

DOI 10.15588/1607-3274-2016-4-6

$\overset{-*}{A}{}^{\vee}(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$\overset{-*}{B}{}^{\vee}(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$X(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты порядка m;

$D(0,0)$ – числовая гиперматрица порядка m^2;

$\hat{D}_1(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – числовые гипервекторы с размерам $m^2\times 1$;

$\hat{X}(K),\ K=\overline{0,\infty}$ – числовые гипервекторы с размерами $m^2\times 1$;

$D(1,0;0,1)$ – числовая гиперматрица порядка m^2;

$D(2,0;1,1;0,2)$ – числовая гиперматрица порядка m^2;

$D(K,0;...;0,K)$ – числовая гиперматрица порядка m^2;

$D(\bullet)$ – числовая гиперматрица порядка $(K+1)\cdot m^2$;

$\hat{D}_1(\bullet)$ – числовой гипервектор с размерами $(K+1)\cdot m^2\times 1$;

$\hat{X}(\bullet)$ – числовой гипервектор с размерами $(K+1)\cdot m^2\times 1$;

$D_K(\bullet),\ K=\overline{0,\infty}$ – числовые гиперматрицы порядка m^2;

j – мнимая единица.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих теоритических и прикладных исследованиях (линейная алгебра, математическая статистика, математическое программирование, теория дифференциальных уравнений, теория оптимального управления, теория устойчивости и др.) достаточно часто встречаются линейные и нелинейные матричные алгебраические уравнения с заданными числовыми матрицами полного или неполного ранга, решение которых обычно связано со сложными вычислительными проблемами. Такими уравнениями являются, в частности, матричные уравнения Сильвестра, Стейна, Ляпунова, Риккати и др. В последнее время значительное внимание уделяется, так называемым, транспонированным и сопряженным аналогам отмеченных матричных уравнений, внешне похожих на них, однако глубоко различных по природе. Вопросы однозначной разрешимости таких алгебраических матричных уравнений, а также численные алгоритмы для их решения рассмотрены в многочисленных работах различных авторов. Что же касается однопараметрических (функциональных) матричных уравнений отмеченных типов, а также их транспонированным и сопряженным аналогам, то в области разработки методов для их решения наблюдается заметное отставание. Заполнения некоторого пробела в этой области и посвящена настоящая работа, в чем и, в первую очередь, заключается ее актуальность.

Объектом исследования настоящей работы является процесс построения методов для решения однопараметрических (функциональных) сопряженных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра.

Предметом исследования составляют методы решения таких уравнений.

Целью работы является разработка аналитического метода решения сопряженного аналога непрерывного однопараметрического матричного уравнения типа Сильвестра, а также прямых последовательного и параллельного численно-аналитических методов, основанных на аналитическом методе и дифференциальных преобразованиях. Численно-аналитические методы позволят широко использовать возможности средств современных информационных технологий с целью организации эффективных последовательных и параллельных вычислительных процедур при одноименных прямых методах.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется алгебраическое матричное уравнение Сильвестра [2–4] (в частности – Ляпунова [5, 6]):

$$A\cdot X+X\cdot B=C. \tag{1}$$

Транспонированным аналогом последнего является алгебраическое матричное уравнение типа Сильвестра [7–9, 13]:

$$A\cdot X+X^T\cdot B=C, \tag{2}$$

а сопряженным аналогом-алгебраическое матричное уравнение типа Сильвестра [7, 10–12, 14]:

$$A\cdot X+X^*\cdot B=C. \tag{3}$$

Однопараметрическими (функциональными) аналогами алгебраических матричных уравнений (1)–(3) являются соответственно матричные уравнения:

$$A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t), \tag{4}$$

$$A(t)\cdot X(t)+X^T(t)\cdot B(t)=C(t), \tag{5}$$

$$A(t)\cdot X(t)+X^*(t)\cdot B(t)=C(t), \tag{6}$$

Задача настоящего исследования заключается в необходимости разработки методов для решения однопараметрического сопряженного аналога-функционального матричного уравнения типа Сильвестра (6).

2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Для решения алгебраических матричных уравнений типа (1)–(3) в настоящее время разработан широкий набор различных методов [15–20]. Однако для решения однопараметрических матричных уравнений типа (4)–(6) такие методы малочисленны [21–26] или отсутствуют вовсе.

Общий подход к решению матричных уравнений (4)–(6) или им подобных заключается в использовании так называемого метода замороженных коэффициентов [27], при котором обычно выполняется следующая последовательность операций:

– решается некоторое, порожденное исходным функциональным матричным уравнением при фиксированных значениях t_i на рассматриваемом интервале множества однотипных по размерам и структуре, но отличных друг от друга по значениям элементов матриц алгебраических матричных уравнений с использованием какого-либо известного численного метода решения матричных уравнений, например [15–20];

– на основе полученных числовых решений строится аппроксимирующее искомое решение неизвестная матричная функция использованием какого-либо интерполяционного метода теории аппроксимации [28].

Однако очевидно, что такой подход обладает следующими весьма существенными недостатками:

– требует значительных затрат вычислительных ресурсов из-за необходимости решений многих однотипных матричных задач в изолированных точках t_i;

– не задает длину и местоположние интервала изменения независимой переменной t на оси $[0,\infty)$;

– не задает требуемое количество изолированных точек t_i на этом интервале с целью обеспечения необходимой точности решений $X(t)$;

– не указывает на выбор равномерной или неравномерной сетки изолированных точек t_i на рассматриваемом интервале;

– не исключает проблему разветвления исходной задачи при выполнении условий неоднозначности решений рассматриваемых матричных уравнений и др.

В силу отмеченных недостатков метода замороженных коэффициентов и почти полного отсутсвия методов решения однопараметрических (функциональных) задач типа (4)–(6) и, в частности, задачи (6), необходимо разработать специальные методы, обладающие характеристиками, обеспечивающими их эффективное использование при организации соответстующих вычислительных процедур.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Редукция и аналитическое решение задачи. Допустим, что однопараметрические матрицы $A(t)$ и $B(t)$ не вырождены на рассматриваемом интервале параметра t. Тогда умножив уравнение (4) на $A^{-1}(t)$, получим:

$$X(t) = -A^{-1}(t)\cdot X^{*}(t)\cdot B(t) + A^{-1}(t)\cdot C(t),$$

откуда в соответствии с правилами матричного исчисления [1]:

$$X^{*}(t) = -B^{*}(t)\cdot X(t)\cdot A^{-*}(t) + C^{*}(t)\cdot A^{-*}(t). \tag{7}$$

С другой стороны, из (4) имеем:

$$X^{*}(t) = [C(t) - A(t)\cdot X(t)]\cdot B^{-1}(t). \tag{8}$$

Следовательно сопоставление (5) и (6) приводит к следующему:

$$C(t)\cdot B^{-1}(t) - A(t)\cdot X(t)\cdot B^{-1}(t) = C^{*}(t)\cdot A^{-*}(t) - B^{*}(t)\cdot X(t)\cdot A^{-*}(t),$$

откуда

$$A(t)\cdot X(t)\cdot B^{-1}(t) - B^{*}(t)\cdot X(t)\cdot A^{-*}(t) = C(t)\cdot B^{-1}(t) - C^{*}(t)\cdot A^{-*}(t). \tag{9}$$

Таким образом, после несложных преобразований получили эквивалентное (6) достаточно сложное матричное уравнение (9), в которой фигурирует только неизвестная матрица $X(t)$ в отличие от (6), в котором фигурирует не только матрица $X(t)$, но и $X^{*}(t)$, намного усложняющая решение исходной задачи. Последнее обстоятельство и обуславливает глубоко различную природу уравнения (6) от уравнения (4).

Далее, применив аппарат кронекеровых произведений матриц [2] к линейному по отношению матрицы $X(t)_{m\times m}$ матричному уравнению (9), получим линейную по отношению $\hat{X}(t)_{m^2\times 1}$ гиперматрично-гипервекторную систему уравнений:

$$0001\,[A(t)\otimes B^{-T}(t) - B^{*}(t)\otimes A^{-*T}(t)]_{m^2\times m^2}\times$$

$$\times\,\hat{X}(t)_{m^2\times 1} = C(t)\cdot B^{-1}(t) - C^{*}(t)\cdot A^{-*}(t) = \hat{D}_1(t), \tag{10}$$

откуда аналитическое решение последней при выполнении условия гиперрегулярности:

$$rang\,[A(t)\otimes B^{-T}(t) - B^{*}(t)\otimes A^{-*T}(t)] = m^2 \tag{11}$$

будет выглядеть так:

$$\hat{X}(t) = [A(t)\otimes B^{-T}(t) - B^{*}(t)\otimes A^{-*T}(t)]^{-1}\cdot \hat{D}_1(t) = D(t)\cdot \hat{D}_1(t). \tag{12}$$

Замечание 1. Из (12) нетрудно получить условия однозначной разрешимости задачи (6), т.е. одновременное выполнение:

– условия гиперрегулярности (11), (13а)

– условия регулярности:

$$rangA(t) = m \Leftrightarrow \exists A^{-1}(t),\ \forall t, \tag{13б}$$

– условия регулярности:

$$rangB(t) = m \Leftrightarrow \exists B^{-1}(t),\ \forall t. \tag{13в}$$

Очевидно, что аналитическое решение (12) мало пригодно для практических целей, ибо требует определения функциональных обратных матриц $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$ и $[A(t)\otimes B^{-T}(t) - B^{*}(t)\otimes A^{-*T}(t)]^{-1}$. Для этого, конечно, могут быть использованы известные методы, предложенные, в частности, в [29–33] и основанные на дифференциальных преобразованиях. Однако это достаточно обременительно, особенно для третьей (кронекеровой) матрицы. Поэтому необходимо искать другие пути разрешения этой проблемы. К одному из таких возможных подходов и перейдем далее.

Последовательный численно-аналитический метод решения. Предположим, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$, а также обратные $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$ и сопряженные $B^{*}(t), C^{*}(t), A^{-*}(t), B^{-*}(t), A^{-*T}(t)$ в центре аппроксимации $t = t_\nu$ обладают аналитическими элементами, для которых имеют место следующие дифференциальные преобразования [1]:

$$A(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteqdot\ A(t) = \chi_1(t, t_\nu, H, A(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{14}$$

$$B(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteqdot\ B(t) = \chi_2(t, t_\nu, H, B(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{15}$$

$$C(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K C\ (t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ C(t)=\chi_3(t,t_\nu,H,C(K),\ K=\overline{0,\infty}),\tag{16}$$

$$\overset{-1}{A}{}^{\vee}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A^{-1}(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ \overset{-1}{A}{}^{\vee}(t)=\chi_4(t,t_\nu,H,\overset{-1}{A}{}^{\vee}(K),K=\overline{0,\infty}),\tag{17}$$

$$\overset{-1}{B}{}^{\vee}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B^{-1}(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ \overset{-1}{B}{}^{\vee}(t)=\chi_5(t,t_\nu,H,\overset{-1}{B}{}^{\vee}(K),K=\overline{0,\infty}),\tag{18}$$

$$B^*(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B^*(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ B^*(t)=\chi_6(t,t_\nu,H,B^*(K),\ K=\overline{0,\infty}),\tag{19}$$

$$C^*(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K C^*(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ C^*(t)=\chi_7(t,t_\nu,H,C^*(K),\ K=\overline{0,\infty}),\tag{20}$$

$$\overset{-*}{A}{}^{\vee}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A^{-*}(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ A^{-*}(t)=\chi_8(t,t_\nu,H,\overset{-*}{A}{}^{\vee}(K),\ K=\overline{0,\infty}).\tag{21}$$

$$\overset{-*}{B}{}^{\vee}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B^{-*}(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ B^{-*}(t)=\chi_9(t,t_\nu,H,\overset{-*}{B}{}^{\vee}(K),\ K=\overline{0,\infty}).\tag{22}$$

$$\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A^{-*T}(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ \overset{-*T}{A}{}^{\vee}(t)=\chi_{10}(t,t_\nu,H,\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(K),K=\overline{0,\infty}),\tag{23}$$

$$X(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{dX^K(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}$$

$$\doteq\ X(t)=\chi_{11}(t,t_\nu,H,X(K),\ K=\overline{0,\infty}).\tag{24}$$

Заметим, что в соотношениях (17), (18) и (21)–(22) матрицы $\overset{-1}{A}{}^{\vee}(K)$, $\overset{-1}{B}{}^{\vee}(K)$, $\overset{-*}{A}{}^{\vee}(K)$, $\overset{-*}{B}{}^{\vee}(K)$ и $\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(K)$-матричные дискреты обратных матриц $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$, $A^{-*}(t)$, $B^{-*}(t)$ и $A^{-*T}(t)$, а не обратные матрицы матричных дискрет $A(K)$, $B(K)$, $A^*(K)$, $B^*(K)$ и $A^{*T}(K)$.

Теперь с учетом (14)–(24) гиперматрично-гипервекторную линейную систему (8) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим:

– при K=0:

$$01\,[A(0)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(0)-B^*(0)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(0)]\times$$
$$\times\hat{X}(0)=D(0,0)\cdot\hat{X}(0)=C(0)\cdot\overset{-1}{B}{}^{\vee}(0)-C^*(0)\cdot\overset{-*}{A}{}^{\vee}(0)=\hat{D}_1(0),\tag{25}$$

откуда

$$\hat{X}(0)=D^{-1}(0,0)\cdot\hat{D}_1(0),\tag{26}$$

$$rang\ \ D(0,0)=m^2;\tag{27}$$

– при K=1:

$$[A(0)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(0)-B^*(0)\otimes\overset{-*}{A}{}^{\vee}(0)]\cdot\hat{X}(1)+$$
$$+[A(1)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(0)+A(0)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(1)-$$
$$01-B^*(1)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(0)-B^*(0)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(1)]\cdot\hat{X}(0)=$$
$$=D(0,0)\cdot\hat{X}(1)+D(1,0;\ 0,1)\cdot\hat{X}(0)=$$
$$=C(1)\cdot\overset{-1}{B}{}^{\vee}(0)+C(0)\cdot\overset{-1}{B}{}^{\vee}(1)-C^*(1)\cdot\overset{-*}{A}{}^{\vee}(0)-C^*(0)\cdot\overset{-*}{A}{}^{\vee}(1)=\hat{D}_1(1),\tag{28}$$

$$\hat{X}(1)=D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(1)-D(1,0;\ 0,1)\cdot\hat{X}(0)];\tag{29}$$

– при K=2:

$$[A(0)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(0)-B^*(0)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(0)]\cdot\hat{X}(2)+[A(1)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(0)+A(0)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(1)-B^*(1)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(0)-$$
$$01-B^*(0)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(1)]\cdot\hat{X}(1)+[A(2)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(0)+A(1)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(1)+A(0)\otimes\overset{-T}{B}{}^{\vee}(2)-B^*(2)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(0)-$$
$$-B^*(1)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(1)-B^*(0)\otimes\overset{-*T}{A}{}^{\vee}(2)]\cdot\hat{X}(0)=D(0,0)\cdot\hat{X}(2)+D(1,0;\ 0,1)\cdot\hat{X}(1)+D(2,0;\ 1,1;0,2)\cdot\hat{X}(0)=$$
$$=C(2)\cdot\overset{-1}{B}{}^{\vee}(0)+C(1)\cdot\overset{-1}{B}{}^{\vee}(1)+C(0)\cdot\overset{-1}{B}{}^{\vee}(2)-C^*(2)\cdot\overset{-*}{A}{}^{\vee}(0)-C^*(1)\cdot\overset{-*}{A}{}^{\vee}(1)-C^*(0)\cdot\overset{-*}{A}{}^{\vee}(2)=\hat{D}_1(2),\tag{30}$$

откуда

$$\hat{X}(2)=D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(2)-D(1,0;\,0,1)\cdot\hat{X}(1)-D(2,0;\,1,1;\,0,2)\cdot\hat{X}(0)];\quad(31)$$

.

.

.

– при $K=K$:

$$[A(0)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(0)-B^{*}(0)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(0)]\cdot\hat{X}(K)+$$

$$+[A(1)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(0)+A(0)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(1)-B^{*}(1)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(0)-$$

$$-B^{*}(0)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(1)]\cdot\hat{X}(K-1)+[A(2)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(0)+$$

$$+A(1)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(1)+A(0)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(2)-B^{*}(2)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(0)-$$

$$-B^{*}(1)\otimes A^{-*T}(1)-B^{*}(0)\otimes A^{-*T}(2)]\cdot\hat{X}(K-2)+\ldots+$$

$$+[A(K-1)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(0)+A(K-2)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(1)+\ldots$$

$$01\ldots+A(0)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(K-1)-B^{*}(K-1)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(0)-$$

$$-B^{*}(K-2)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(1)-\ldots-B^{*}(0)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(K-1)]\cdot\hat{X}(1)+$$

$$+[A(K)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(0)+A(K-1)\otimes B^{-T}(1)+\ldots+A(0)\otimes$$

$$\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(K)-B^{*}(K)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(0)-B^{*}(K-1)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(1)-\ldots$$

$$\ldots-B^{*}(0)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(K)]\cdot\hat{X}(0)=D(0,0)\otimes\hat{X}(K)+$$

$$+D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(K-1)+D(2,0;1,1;\,0,2)\cdot\hat{X}(K-2)+\ldots$$

$$\ldots+D(K-1,0;\;K-2,1;\ldots;1,K-2;0,K-1)\times$$

$$\times\hat{X}(1)+D(K,0;\ldots;0,K)\cdot\hat{X}(0)=$$

$$=\begin{bmatrix}C(K)\cdot\overset{\vee}{B}^{-1}(0)+C(K-1)\cdot\overset{\vee}{B}^{-1}(1)+\ldots+C(0)\cdot\overset{\vee}{B}^{-1}(K)-\\-C^{*}(K)\cdot\overset{\vee}{A}^{-*}(0)-C^{*}(K-1)\cdot\overset{\vee}{A}^{-*}(1)-\ldots-C(0)^{*}\cdot\overset{\vee}{A}^{-*}(K)\end{bmatrix}=\hat{D}_1(K),\quad(32)$$

откуда

$$\hat{X}(K)=[A(0)\otimes\overset{\vee}{B}^{-T}(0)-B^{*}(0)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(0)]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg[\sum_{\ell=0}^{K}(C(\ell)\cdot\overset{\vee}{B}^{-1}(K-\ell)-C^{*}(\ell)\cdot\overset{\vee}{A}^{-*}(K-\ell))-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{P}\sum_{P=1}^{K}[A(\ell)\overset{\vee}{B}^{-T}(P-\ell)-B^{*}(\ell)\otimes\overset{\vee}{A}^{-*T}(P-\ell)\cdot X(K-P)\Bigg]=$$

$$=D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(K)-D(1,0;0,1)\cdot\hat{X}(K-1)-$$

$$-D(2,0;1,1;0,2)\cdot\hat{X}(K-2)-\ldots-$$

$$-D(K-1,0,K-2,1;\ldots;1,K-2;0,K-1)\times$$

$$\times\hat{X}(1)-D(K,0;\ldots;0,K)\cdot\hat{X}(0)].\quad(33)$$

Таким образом, имея матричные дискреты (26), (29), (31) и (33), в соответствии с правой частью (22) можно найти решение $X(t)$ исходной задачи (6) или матричного уравнения (9).

Замечание 2. Очевидно, что при использовании последовательного численно-аналитического метода для однозначной разрешимости задачи (6) должны быть одновременно выполнены:

– условие гиперрегулярности (27), (34а)

– условия регулярности:

$$rang A^{-1}(K)=m,\quad\forall K=\overline{0,\infty},\quad(34б)$$

– условия регулярности:

$$rang B^{-1}(K)=m,\quad\forall K=\overline{0,\infty}.\quad(34в)$$

Параллельный численно-аналитический метод решения. Объединив соотношения (25), (28), (30) и (32), получим следующее линейное гиперматрично-гипервекторное представление

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}D(0,0)&0&0&0&0&\cdots&0\\\hline D(1,0;0,1)&D(0,0)&0&0&0&\cdots&0\\\hline D(2,0;1,1;0,2)&D(1,0;0,1)&D(0,0)&0&0&\cdots&0\\\hline\ldots&D(2,0;1,1;0,2)&D(1,0;0,1)&D(0,0)&0&\cdots&0\\\hline\ldots&\ldots&D(2,0;1,1;0,2)&D(1,0;0,1)&D(0,0)&\cdots&0\\\hline\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\hline D(K,0,\ldots,0,K)&D(K-1,\ldots,K-1)&D(K-2,\ldots,K-2)&D(K-3,\ldots,K-3)&D(K-4,\ldots,K-4)&\cdots&D(0,0)\end{array}\right]\times\begin{pmatrix}\hat{X}(0)\\\hline\hat{X}(1)\\\hline\hat{X}(2)\\\hline\hat{X}(3)\\\hline\hat{X}(4)\\\hline\vdots\\\hline\hat{X}(K)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{D}_1(0)\\\hline\hat{D}_1(1)\\\hline\hat{D}_1(2)\\\hline\hat{D}_1(3)\\\hline\hat{D}_1(4)\\\hline\vdots\\\hline\hat{D}_1(K)\end{pmatrix}\quad(35)$$

$(K+1)\cdot m^2\times(K+1)\cdot m^2$ $\quad(K+1)\cdot m^2\times1$ $(K+1)\cdot m^2\times1$

или в компактной форме записи

$$D(\bullet)\cdot\hat{X}(\bullet)=\hat{D}_1(\bullet),\quad(36)$$

откуда

$$\hat{X}(\bullet)=D^{-1}(\bullet)\cdot\hat{D}_1(\bullet).\quad(37)$$

Очевидно, что при условии гиперрегулярности (27) из (35) немедленно следует и условие гиперрегулярности

$$rang\,D(\bullet)=(K+1)\cdot m^2\quad(38)$$

задачи (36).

С другой стороны, нетрудно убедиться, что обратная гиперматрица в (37)

$$D^{-1}(\bullet)=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}D_0&0&0&\cdots&0\\\hline D_1&D_0&0&\cdots&0\\\hline D_2&D_1&D_0&\cdots&0\\\hline\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\hline D_K&D_{K-1}&D_{K-2}&\cdots&D_0\end{array}\right],$$

где

$$\begin{cases} D_0 = D^{-1}(0,0) = D^{-1}(0,0)\cdot E = D^{-1}(0,0)\cdot \bar{D}_0, \\ D_1 = -D^{-1}(0,0)\cdot[D(1,0;\ 0,1)\cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0)\cdot \bar{D}_1, \\ D_2 = -D^{-1}(0,0)\cdot[D(2,0;\ 1,1;\ 0,2)\cdot D^{-1}(0;0) - \\ -[D(1,0;\ 0,1)\cdot D^{-1}(0;0)]^2] = D^{-1}(0,0)\cdot \bar{D}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_K = -D^{-1}(0,0)\cdot \sum\limits_{P=1}^{K} D(P)\cdot D_{K-P} = D^{-1}(0,0)\cdot \bar{D}_K. \end{cases}$$

Таким образом, имея гипервектор $\hat{X}(\bullet)$, в соответствии с правой частью (22) можно восстанавливать решение $X(t)$ исходной задачи (6) (или матричного уравнения (9)).

Замечание 3. Очевидно, что при использовании параллельного численно-аналитического метода для однозначной разрешимости задачи (6) должны быть одновременно выполнены:

– условие гиперрегулярности (38), (39а)
– условия регулярности(34 б), (39б)
– условия регулярности(34 в) (39в)

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

С целью проверки работаспособности предложенных последовательного и параллельного численно-аналитических методов они были программно реализованы в среде MATLAB [34] на модельном примере-матричного уравнения вида (6), где

$$A(t) = \begin{bmatrix} j & 0 \\ t & (1+t) \end{bmatrix},\ . B(t) = \begin{bmatrix} (1+t) & 1 \\ j & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} (t - jt) & -j \\ 0 & (1 - j + t - jt^2) \end{bmatrix}.$$

При этом, как нетрудно вычислить, матрицы

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ \dfrac{jt}{1+t} & \dfrac{1}{1+t} \end{bmatrix},\ B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 1 & (1+t)j \end{bmatrix}.$$

Тогда при $t_v = 1$, H=1 получено, что

$$A(0) = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A(K) = [0],\ \forall K \ge 2;$$

$$A^{-1}(0) = \overset{-1}{A}{}^{\vee}(0) = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0,5j & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$\overset{-1}{A}{}^{\vee}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,25j & -0,25 \end{bmatrix},\ \overset{-1}{A}{}^{\vee}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,125 & 0,125 \end{bmatrix};$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ j & 0 \end{bmatrix},\quad B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B(K) = [0],\ \forall K \ge 2;$$

$$B^{-1}(0) = \overset{-1}{B}{}^{\vee}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 1 & 2j \end{bmatrix},\quad \overset{-1}{B}{}^{\vee}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix},$$

$$\overset{-1}{B}{}^{\vee}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 1-j & -j \\ 0 & 2-2j \end{bmatrix},\ C(1) = \begin{bmatrix} 1-j & 0 \\ 0 & 1-2j \end{bmatrix},$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix},\ C(K) = [0],\ \forall K \ge 3,$$

а для дискрет сопряженных матриц

$$A^{-*}(0) = \begin{bmatrix} j & -0,5j \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix},\ \overset{-*}{A}(1) = \begin{bmatrix} 0 & -0,25j \\ 0 & -0,25 \end{bmatrix},$$

$$\overset{-*}{A}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0,125j \\ 0 & 0,125 \end{bmatrix};$$

$$B^*(0) = \begin{bmatrix} 2 & -j \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B^*(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B^*(K) = [0],\ \forall K \ge 2;$$

$$C^*(0) = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ j & 2+2j \end{bmatrix},\ C^*(1) = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1+2j \end{bmatrix},$$

$$C^*(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix},\ C(K) = [0],\ \forall K \ge 3.$$

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее, при представленных матричных дискретах имеем:

$$D(0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc} -2j & j & -1 & 0 \\ 1+j & -3 & 0,5 & 0,5j \\ \hline -j & 1 & 0 & 2 \\ -0,5j & -0,5+2j & -2j & 4j \end{array}\right],$$

$$D^{-1}(0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,0147+0,3529j & -0,0882 & 0,0294+0,375j & -0,1765+0,0147j \\ -0,1765+0,0735j & -0,3529-0,0294j & -0,0074+0,1765j & -0,0441 \\ \hline -0,3676-0,1471j & 0,0294-0,1765j & 0,5735-0,0662j & 0,0294+0,3088j \\ -0,0882-0,0441j & 0,1765-0,0294j & 0,3162-0,0735j & 0,0147-0,0882j \end{array}\right],$$

$$\hat{D}_1(0)=\begin{pmatrix}1-2j\\ 0,5-0,5j\\ \hdashline 3-2j\\ 2,5+3j\end{pmatrix},$$

$$D(1,0;\ 0,1)=\left[\begin{array}{cc|cc}-j & 0 & 0 & 0\\ j & -1 & 0,25 & -0,25j\\ \hline 0 & 1 & 0 & 1\\ -0,75j & 0,25+3j & -j & 4j\end{array}\right],$$

$$\hat{D}_1(1)=\begin{pmatrix}1-j\\ -0,75-0,25j\\ \hdashline 1-2j\\ 5,75+3,5j\end{pmatrix},\quad \hat{X}(1)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \hdashline 0\\ -j\end{pmatrix},$$

$$D(2,0;\ 1,1;0,2)=\left[\begin{array}{cc|cc}\multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & 0\\ & & -0,125 & 0,125j\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ -0,125j & -0,125+j & 0 & j\end{array}\right],$$

$$\hat{D}_1(2)=\begin{pmatrix}0\\ -0,125+0,125j\\ \hdashline -j\\ 4,125+0,75j\end{pmatrix},\quad \hat{X}(2)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \hdashline 0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$\hat{X}(K)=(0),\quad \forall K\geq 2.$$

При применении параллельного численно-аналитического метода

$$D_0=\left[\begin{array}{cc|cc}-0.0147+0.3529j & -0,0882 & 0,0294+0,375j & -0,1765+0,0147j\\ -0,1765+0,0735j & -0,3529-0,0294j & -0,0074+0,1765j & -0,0441\\ \hline -0,3676-0,1471j & 0,0294-0,1765j & 0,5735-0,0662j & 0,0294+0,3088j\\ -0,0882-0,0441j & 0,1765-0,0294j & 0,3162-0,0735j & 0,0147-0,0882j\end{array}\right],$$

$$D_1=\left[\begin{array}{cc|cc}0,0026-0,1211j & 0,0303 & 0,0095-0,1507j & 0,1488-0,0026j\\ -0,0277-0,0424j & 0,1211-0,0095j & 0,0050-0,1488j & 0,0372\\ \hline 0,1531-0,0182j & 0,0095+0,1488j & 0,2223-0,0435j & 0,0095-0,0839j\\ 0,2067+0,0078j & 0,0277+0,0493j & -0,0815+0,0277j & -0,0026+0,1185j\end{array}\right],$$

$$\hat{X}(0)=D_0\cdot\hat{D}_1(0)=\left((1+j)\quad j\ \vdots\ 0\quad (1-j)\right)^T,$$

$$\hat{X}(1)=D_1\cdot\hat{D}_1(0)+D_0\cdot\hat{D}_1(1)=\left(0\quad 0\ \vdots\ 0\quad -j\right)^T,$$

$$\hat{X}(2)=D_2\cdot\hat{D}_1(0)+D_1\cdot\hat{D}_1(1)+D_0\cdot\hat{D}_1(2)=\left(0\quad 0\ \vdots\ 0\quad 0\right)^T,$$

$$\hat{X}(K)=[0],\ \forall K\geq 2.$$

Итак при использовании обратных дифференциально-тейлоровских преобразований решение задачи будет выглядеть так:

$$X(t)=X(0)+X(t)\cdot(t-1)=$$

$$=\begin{bmatrix}1+j & j\\ 0 & 1-j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -j\end{bmatrix}\cdot(t-1)=\begin{bmatrix}(1+j) & j\\ 0 & (1-jt)\end{bmatrix},$$

в абсолютной точности которого легко убедиться подстановкой его в исходное матричное уравнение.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Таким образом можно констатировать, что предложенные численно-аналитические методы обладают определенными достоинствами и недостатками.

В числе достоинств этих методов можно отметить следующее:

– последовательный численно-аналитический метод достаточно прост при реализации рекуррентных численных процедур;

– параллельный численно-аналитический метод обладает высокой вычислительной эффективностью в связи с возможностью организации поточных численных процедур.

В числе недостатков этих методов можно отметить:

– необходимость выполнения большого объема вычислений, что обусловлено, скорее всего, сложностью решаемого класса задач, нежели характеристиками самых численно-аналитических методов;

– при параллельном численно-аналитическом методе с целью увеличения точности решения исходной задачи при небольшом увеличении значения целочисленного аргумента K (что, по сути, эквивалентно увеличению слагамых в соответсвующем ряде Тейлора) происходит значительное увеличение размерности гиперсистемы (35) с вытекающими отсюда хорошо известными отрицательными последствиями [35].

Замечание 4. При рассмотренном простом модельном примере с целью демонстрации вычислительных характеристик предложенных методов мы воспользовались точными аналитическими соотношениями $A^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$ и их матричными дискретами $\overset{-1}{A}{}^{\vee}(K)$ и $\overset{-1}{B}{}^{\vee}(K)$, $\forall K=\overline{0,\infty}$. Однако, как отмечено выше, определение и дальнейшее использование таких матриц на практике связано с большими вычислительными трудностями, и обычно приходится оперировать их аппроксимированными (приближенными) представлениями.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе для решения однопараметрических сопряженных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра предложены аналитический, а также приближенные последовательный и параллельный численно-аналитический методы. Последние основаны на дифференциальных преобразованиях и позволяют решение исходной непрерывной задачи свести к некоторым рекуррентным численным процедурам, эффективно реализуемыми средствами современных информационных технологий [34–36] и восстановлению сравнительно легко непрерывного решения $X(t)$ на основе некоторого обратного дифференциального преобразования (22).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в Базовой научно-исследовательской лаборатории «Системного анализа» при кафедре «Информационных технологий и автоматизации» Национального политехнического университета Армении в рамках научно-исследовательской темы «Разработка и исследование дифференциальных моделей решения задач системного анализа» (номер 10-4/1-13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений / Г. Е. Пухов. – К. : Наукова думка, 1984. – 420 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 2010. – 560 с.
3. Мамонов С. С. Решение матричных уравнений / С. С. Мамонов // Вестник Ряз. гос. ун-та им. С. А. Есенина. – 2009. – Вып. 21, № 1. – С. 115–136.
4. Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра / С. М. Чуйко // Вестник Одесского национального университета. Сер. : Математика и механика. – 2014. – Т.19:1, № 21. – С. 49–57.
5. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова / С. М. Чуйко // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Серия : Математика, прикладная математика и механика. – 2014. – № 1120. – С. 85–94.
6. Чуйко С. М. О решении обобщенного матричного уравнения Ляпунова / С. М. Чуйко // Чебышевский сб. – 2015.– Т.16, Вып. 1. – С. 52–66.
7. Икрамов Х. Д. Матричные уравнения $A'+X+X^{T}{}'+C=B$ и $A'+X+X^{*}{}'+C=B$ / Х. Д. Икрамов, Ю. О. Воронцов // Доклады РАН. – 2013. – Т. 449, № 5. – С. 513–515.
8. Piao F. X. The solution to matrix equation $A'+X+X^{T}{}'+C=B$ / F. X. Piao, Q. L. Zhang, Z. F. Wang // Journal of the Franklin Institute. – 2007. – № 344. – P. 1056–1062.
9. Fernando D. T. The solution of the equation $X'+A+A'+X^{T}=0$ and its application to the theory of orbits / D. T. Fernando, M. D. Frolian // Linear Algebra and its Application. – 2011. – № 434. – P. 44–67.
10. Djordjevic D. S. Explicit solution of the operator equation $A'+X^{*}+X^{*}{}'+A=B$ / D. S. Djordjevic // J. Comput. Appl. Math. – 2007, № 200. – P. 701–704.
11. Zhao Linlin Solution of the operator equation $A'+X+X^{*}{}'+B=C$ / L. Zhao // Pur and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 28, №4. – P. 469–474.
12. Wang Zi-Wen A matrix function with applications / Z.-W. Wang // Communication on Applied Mathematics and Computation. – 2014. – Vol. 28, № 4. – P. 449–453.
13. Икрамов Х. Д. Об однозначной разрешимости матричного уравнения $A'+X+X^{T}{}'+C=B$ в сингулярном случае / Х. Д. Икрамов, Ю. О. Воронцов // Доклады РАН. – 2011. – Т. 438, № 5. – С. 599–602.
14. Воронцов Ю. О. Об условиях однозначной разрешимости матричного уравнения $A'+X+X^{*}{}'+B=C$ / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 775–783.
15. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений / Х. Д. Икрамов. – М. : Наука, 1984. – 190 с.
16. Воронцов Ю. О. Численный алгоритм для решения матричного уравнения $A\cdot X+X^{T}\cdot B=C$ / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 5. – С. 739–747.
17. Воронцов Ю. О. О численном решении матричных уравнений $A\cdot X+X^{T}\cdot B=C$ и $X+A\cdot X^{T}\cdot B=C$ с прямоугольными коэффицентами A и B / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2012. – Т. 405. – С. 54–58.
18. Воронцов Ю. О. Численный алгоритм для ршения матричного уравнения $A\cdot X+X^{*}\cdot B=C$ / Ю. О. Воронцов // Вестник Московского Университета. – 2013. – № 1. – С. 3–9.
19. Воронцов Ю. О. Численные алгоритмы для решения матричных уравнений $A\cdot X+X^{T}\cdot C=B$ и $A\cdot X+X^{*}\cdot C=B$ / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 6. – С. 843–852.
20. Воронцов Ю. О. Численное решение матричных уравнений $A\cdot X+X^{T}\cdot C=B$ и $A\cdot X+X^{*}\cdot C=B$ в самосопряженном случае / Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 2. – С. 179–182.
21. Симонян С. О. Методы решения однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра $A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t)$ / С. О. Симонян // Известия НАН РА и НПУА. – 2015. – Сер. Т. Н., Т. LXVIII. – № 3. – С. 370–380.
22. Симонян С. О. Декомпозиционные методы решения однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра $A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t)$ / С. О. Симонян // Известия НАН РА и НПУА. – 2015. – Сер.ТН. – Т. LXVIII, № 4. – С. 497–510.
23. Симонян С. О. Методы решения линейных однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа $A^{T}(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot A(t)=C(t)$ / С. О. Симонян // Вестник ИАА. – 2015. – Т. 15. – С. 216–224.
24. Симонян С. О. К решению однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра $A(t)\cdot X(t)+X^{T}(t)\cdot B(t)=C(t)$ / С. О. Симонян // Известия НАН РА и НПУА, Сер. ТН. – 2016. – Т. LXIX, № 1. – С. 49–60.
25. Симонян С. О. К решению однопараметрических матричных уравнений типа Стейна $A(t)\cdot X(t)\cdot B(t)–X(t)=C(t)$ / С. О. Симонян // Вестник НПУА. Сер. «Информационные технологии, электроника, радиотехника». – 2015. – № 2. – С. 32–43.
26. Симонян С. О. Декомпозиционные методы решения однопараметрических матричных уравнений типа Стейна $A(t)'+X(t)'+B(t)–X(t)=C(t)$ / С. О. Симонян // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. – 2016. – Т. LXIX, № 2. – С. 176–191.
27. Симонян С. О. Прикладные аспекты применения ДТ-преобразований при построении траектроий равновесных состояный динамических систем / С. О. Симонян // Электрон. моделирование. – 1993. – Т. 15, № 2. – С. 58–65.
28. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. –М. : С.Пб. : Физмат-лит, 2002. – 632 с.

29. Бадалян Л. А. Разработка методов определения псевдообратных нестационарных матриц и автоматизация вычислительных процедур : автореф. дис. ... к.т.н.: 05.13.02 «Системы автоматизации» / Л. А. Бадалян. – Ереван, 2007. – 21 с.
30. Симонян А. С. Разработка численно-аналитических методов определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза и автоматизация вычислительных процедур: автореф. дис. ... к.т.н.: 05.13.02 «Системы автоматизации» / А. С. Симонян. – Ереван, 2013. – 24 с.
31. Симонян С.О. Параллельные вычислительные методы определения параметрических обобщенных обратных матриц / С. О. Симонян // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323, №5. – С. 10–15.
32. Методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (I) / [Симонян С. О., Адамян Г. В., Симонян А. С. и др.] // Вестник ГИУА. Сер. «Информационные технологии, Электроника, Радиотехника». –2014. – Вып. 17, Том 1. – С. 20–28.
33. Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц (II) / [Симонян С. О., Адамян Г. В., Симонян А. С. и др.] // Известия НАН РА и ГИУА. – 2014. – Сер. ТН. – Т. LXVII, № 4. – С. 425–433.
34. Дьяконов В. П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК Пресс, 2016. – 976 с.
35. Воеводин В. В. Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. – С. Пб. : «БХВ-Петербург», 2004. – 608 с.
36. Stroustrup B. The C++ programming language. 4th edition / B. Stroustrup. – Boston : Addison-Wesley Professional, 2013. – 1368 p.

Статья поступила в редакцию 13.04.2016.
После доработки 28.04.2016.

Симонян С. О.[1], Айвазян А. А.[2]

[1]Д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій і автоматизації Національного політехнічного університету Вірменії, Єреван, Вірменія

[2]Старший технік базової науково-дослідної лабораторії системного аналізу кафедри інформаційних технологій і автоматизації Національного політехнічного університету Вірменії, Вірменія

ДО РОЗВ’ЯЗКУ ОДНОПАРАМЕТРИЧНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ A (t)·X (t) + X * (t)·B (t) = C (t)

Розглянуто однопараметричні сполучені аналоги матричних рівнянь типу Сильвестра. На основі нескладних перетворень отримано еквівалентне матричне рівняння, що містить тільки невідому матрицю, яка підлягає визначенню. Далі, використанням апарату кронекерових добутків матриць, отримано аналітичний розв’язок задачі, який обмежений в практичних застосуваннях, однак служить основою для розробки чисельно-аналітичних методів розв’язання початкової задачі. Запропоновані послідовний та паралельний чисельно-аналітичні методи розв’язання, засновані на диференціальних перетвореннях Г. Є. Пухова. При послідовному чисельно-аналітичному методі оперуємо числовими рекурентними процедурами на першому етапі обчислень та аналітичними співвідношеннями – на другому етапі. При паралельному чисельно-аналітичному методі оперуємо лінійною гіперсистемою числових рівнянь на першому етапі обчислень та аналітичними співвідношеннями – на другому етапі. При всіх методах отримані відповідні умови однозначної вирішуваності задачі. Розглянуто модельний приклад, для якого при використанні чисельно-аналітичних методів отримано точний тейлоровський розв’язок. Запропоновані чисельно-аналітичні методи можуть бути ефективно реалізовані засобами сучасних інформаційних технологій.

Ключові слова: однопараметричний сполучений аналог матричного рівняння типу Сильвестра, редукція задачі, аналітичний метод розв’язку, диференціальні перетворення, послідовний та паралельний чисельно-аналітичні методи, модельний приклад, умови однозначної розв’язності задачі.

Simonyan S. H.[1], Ayvazyan A. A.[2]

[1]Dr. Sc., Prof., Head of the Chair «Information Technologies and Automation» (IT and A) of National Polytechnic University of Armenia

[2]Senior technician, Base scientific research laboratory «System analysis» of Chair «Information Technologies and Automation» the department of National Polytechnic University of Armenia

TO THE SOLUTION OF ONE-PARAMETRIC MATRIX EQUATIONS OF A(T)·X(T)+ X*(T) ·B(T) =C(T) TYPE

We consider the one-parameter conjugated analogs of Sylvester type matrix equations. On the basis of simple transformations we obtain the equivalent matrix equation containing only the unknown matrix which should be determined. Next, using the apparatus of Kronecker products of matrices, the analytical solution of the problem was obtained, which is limited in practical applications, but serves as a basis for the development of numerical-analytical methods for solving the original problem. Serial and parallel numerical and analytical solution methods are proposed based on the differential transformations G. E. Pukhov. With sequential numerical-analytical method we operate with numeric recursive procedures in the first stage of the calculation, and analytical relations – in the second stage. In parallel numerical-analytical method we operate with linear hypersystem of numerical equations in the first stage of the calculation, and analytical relations – in the second stage. For all the methods the relevant conditions for the unique solvability of the problem were obtained. A model example was considered for which using numerical and analytical methods an exact solution of the Taylor was obtained. The proposed numerical-analytical techniques can be efficiently implemented by means of modern information technology.

Keywords: one-parametric conjugated analogue of parameter matrix equation of Sylvester type, reduction of the problem, an analytical method of solution, differential transformations, serial and parallel methods, model example, conditions for the unique solvability of the problem.

REFERENCES

1. Puhov G. E. Differencial’nye preobrazovanija funkcij i uravnenij. Kiev, Naukova dumka, 1984, 420 p.
2. Gantmaher F.R. Teorija matric. Moscow, Nauka, 2010, 560 p.
3. Mamonov S. S. Reshenie matrichnyh uravnenij, *Vestnik Rjaz. gos. un-ta im. S. A. Esenina. Rjazan*’, 2009, Vyp. 21, No. 1, pp. 115–136.
4. Chujko S. M. O reshenii matrichnogo uravnenija Sil’vestra, *Vestnik Odesskogo nacional’nogo universiteta. Ser.: Matematika i mehanik,* 2014, Vol. 19:1, No. 21, pp. 49–57.
5. Chujko S. M. O reshenii matrichnyh uravnenij Ljapunova, *Vestnik Har’kovskogo nacional’nogo universiteta im. V.N. Karazina. Serija: Matematika, prikladnaja matematika i mehanika*, 2014, No. 1120, pp. 85–94.
6. Chujko S. M. O reshenii obobshhennogo matrichnogo uravnenija Ljapunova, *Chebyshevskij sb*., 2015, Vol. 16, Vyp. 1, pp. 52–66.
7. Ikramov H. D., Voroncov Ju. O. Matrichnye uravnenija A·X+XT·C=B i A·X+X*·C=B, *Doklady RAN*, 2013, Vol. 449, No. 5, pp. 513–515.

8. Piao F. X., Zhang Q. L., Wang Z. F. The solution to matrix equation A·X+XT·C=B, *Journal of the Franklin Institute*, 2007, No. 344, pp. 1056–1062.
9. Fernando D. T., Frolian M. D. The solution of the equation X·A+A·XT =0 and its application to the theory of orbits, *Linear Algebra and its Application,* 2011, No. 434, pp. 44–67.
10. Djordjevic D. S. Explicit solution of the operator equation A· X*+X*·A=B, *J. Comput. Appl. Math*, 2007, No. 200, pp. 701–704.
11. Zhao Linlin Solution of the operator equation A·X+X*·B=C, *Pur and Applied Mathematics*, 2012, Vol. 28, No. 4, pp. 469–474.
12. Wang Zi-wen A matrix function with applications, *Communication on Applied Mathematics and Computation*, 2014, Vol. 28, No. 4, pp. 449–453.
13. Ikramov H. D., Voroncov Ju.O. Ob odnoznachnoj razreshimosti matrichnogo uravnenija A·X+XT·C=B v singuljarnom sluchae, *Doklady RAN*, 2011, Vol. 438, No. 5, pp. 599–602.
14. Voroncov Ju.O., Ikramov H. D. Ob uslovijah odnoznachnoj razreshimosti matrichnogo uravnenija A·X+X*·B=C, *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2012, Vol. 52, No. 5, pp. 775–783.
15. Ikramov H. D. Chislennoe reshenie matrichnyh uravnenij. Moscow, Nauka, 1984, 190 p.
16. Voroncov Ju. O., Ikramov H. D. Chislennyj algoritm dlja reshenija matrichnogo uravnenija A·X+XT·B=C, *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2011, Vol. 5, No. 5, pp. 739–747.
17. Voroncov Ju. O., Ikramov H. D. O chislennom reshenii matrichnyh uravnenij A·X+XT·B=C i X+A·XT·B=C s prjamougol'nymi kojefficentami A i B, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, 2012, Vol. 405, pp. 54–58.
18. Voroncov Ju.O. Chislennyj algoritm dlja rshenija matrichnogo uravnenija A·X+X*· B=C, *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, 2013, No. 1, pp. 3–9.
19. Voroncov Ju. O., Ikramov H. D. Chislennye algoritmy dlja reshenija matrichnyh uravnenij AX+XT·C=B i A·X+X*·C=B, *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2013, Vol. 53, No. 6, pp. 843–852.
20. Voroncov Ju. O., Ikramov H. D. Chislennoe reshenie matrichnyh uravnenij A·X+XT·C=B i A·X+X*·C=B v samosoprjazhennom sluchae, *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2014, Vol. 54, No. 2, pp. 179–182.
21. Simonjan S. O. Metody reshenija odnoparametricheskih matrichnyh nepreryvnyh uravnenij tipa Sil'vestra A(t)·X(t)+ +X(t)·B(t)=C(t), *Izvestija NAN RA i NPUA*, 2015, Ser. T.N., Vol. LXVIII, No. 3, pp. 370–380.
22. Simonjan S. O. Dekompozicionnye metody reshenija odnoparametricheskih matrichnyh nepreryvnyh uravnenij tipa Sil'vestra A(t)·X(t)+X(t)·B(t)=C(t), *Izvestija NAN RA i NPUA,* 2015, Ser.TH, Vol. LXVIII, No. 4, pp. 497–510.
23. Simonjan S. O. Metody reshenija linejnyh odnoparametricheskih matrichnyh nepreryvnyh uravnenij tipa AT(t)·X(t)+X(t)·A(t)=C(t), *Vestnik IAA*, 2015, Vol. 15, pp. 216–224.
24. Simonjan S. O. K resheniju odnoparametricheskih transponirovannyh analogov matrichnyh uravnenij tipa Sil'vestra A(t)·X(t)+XT(t)·B(t)=C(t), *Izvestija NAN RA i NPUA,* Ser. TN, 2016, Vol. LXIX, No. 1, pp. 49–60.
25. Simonjan S. O. K resheniju odnoparametricheskih matrichnyh uravnenij tipa Stejna A(t)·X(t)·B(t)–X(t)=C(t), *Vestnik NPUA. Ser. «Informacionnye tehnologii, jelektronika, radiotehnika»,* 2015, No. 2, pp. 32–43.
26. Simonjan S. O. Dekompozicionnye metody reshenija odnoparametricheskih matrichnyh uravnenij tipa Stejna A(t)·X(t)·B(t)–X(t)=C(t), *Izvestija NAN RA i NPUA*, Ser. TH, 2016, T.LXIX, No. 2, pp. 176–191.
27. Simonjan S. O. Prikladnye aspekty primenenija DT-preobrazovanij pri postroenii traektroij ravnovesnyh sostojanyj dinamicheskih sistem, *Jelektron. Modelirovanie*, 1993, Vol. 15, No. 2, pp. 58–65.
28. Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Chislennye metody. Moscow, SPb, fizmat-lit, 2002, 632 p.
29. Badaljan L. A. Razrabotka metodov opredelenija psevdoobratnyh nestacionarnyh matric i avtomatizacija vychislitel'nyh procedur : avtoref. dis. ... k.t.n.: 05.13.02 «Sistemy avtomatizacii». Erevan, 2007, 21 p.
30. Simonjan A. S. Razrabotka chislenno-analiticheskih metodov opredelenija parametricheskih obobshhennyh obratnyh matric Mura-Penrouza i avtomatizacija vychislitel'nyh procedur: avtoref. dis. ... k.t.n.: 05.13.02 «Sistemy avtomatizacii», Erevan, 2013, 24 p.
31. Simonjan S. O. Parallel'nye vychislitel'nye metody opredelenija parametricheskih obobshhennyh obratnyh matric, *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta,* 2013, Vol. 323, No. 5, pp. 10–15.
32. Simonjan S. O., Adamjan G.V., Simonjan A. S. i dr Metody opredelenija kompleksnyh odnoparametricheskih obobshhennyh obratnyh matric Mura-Penrouza (I), Vestnik GIUA. Ser. «Informacionnye tehnologii, Jelektronika, Radiotehnika», 2014, Vyp. 17, Tom 1, pp. 20–28.
33. Simonjan S. O., Adamjan G. V., Simonjan A. S. i dr. Dekompozicionnye metody opredelenija kompleksnyh odnoparametricheskih obobshhennyh obratnyh matric (II), *Izvestija NAN RA i GIUA*, 2014, Ser. TH, T.LXVII, No. 4, pp. 425–433.
34. D'jakonov V. P. MATLAB i SIMULINK dlja radioinzhenerov. Moscow, DMK Press. 2016, 976 p.
35. Voevodin V. V., Voevodin Vl. V. Parallel'nye vychislenija. Sankt-Perterburg «BHV-Peterburg», 2004, 608 p.
36. Stroustrup B. The C++ programming language. 4th edition. Addison-Wesley Professional, 2013, 1368 p.