

ГИБРИДНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПЛОШНЫХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЯВНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Актуальность. Рассмотрена проблема представления сплошных тел в системах автоматизации проектных работ. Объектом исследования является процесс представления сплошных тел в системах автоматизации проектных работ.

Цель работы – разработка гибридной схемы представления сплошных тел, использующей неявные функций, R-операций и параметрические функции.

Метод. Для моделирования сплошных тел в статье предложено гибридное представление. Под абстрактным понятием «сплошное тело» в работе понимаются ограниченные и замкнутые подмножества евклидова пространства, которые моделируют физические тела; под схемой представления – синтаксически и семантически корректное отношение между множеством формальных описаний математических моделей и множеством сплошных тел. В основе гибридного представления идея одновременного использования граничного и функционального представлений. Предполагается, что при граничном представлении, области определяются своими границами, описанными при помощи параметрических функций, а при функциональном представлении – при помощи неявных функций с использованием положений теории R-функций. Для гибридного представления используются функции расстояния со знаком, которые позволяют рассматривать подобласти, описанные параметрическими функциями, как аргументы R-операций (конъюнкции, дизъюнкции или отрицания) при построении единой неявной функции, соответствующей сложному телу. Чтобы в произвольной точке вычислить расстояние со знаком до границы области, ограниченной параметрическими функциями, предложено использовать вспомогательное построение адаптивных дискретных моделей контуров. Расстояние от точки до границы аппроксимируется расстоянием от этой точки до ближайшего дискретного элемента. Для определения знака функции используется тест четности.

Результаты. Разработанная гибридная схема представления реализована в программном продукте, на основе которого решены задачи построения моделей сложных тел.

Выводы. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили корректность и работоспособность предложенного математического обеспечения. Перспективы дальнейших исследований состоят в том, чтобы оптимизировать вычисление функций расстояния со знаком, например, при помощи технологий параллельных вычислений.

Ключевые слова: сплошное тело, неявная функция, R функция, параметрическая функция, дискретная модель, функция расстояния, тест четности, автоматизированное проектирование.

НОМЕНКЛАТУРА

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} - \text{полином Бернштейна};$$

$$e_i = (\mathbf{p}_{i0}; \mathbf{p}_{i1}) - \text{ребро плоского графа};$$

$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ – ортонормированный базис декартовой системы координат двумерного пространства;

$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ – ортонормированный базис декартовой системы координат трехмерного пространства;

$\mathbf{p} = (x_p; y_p)$ – радиус-вектор произвольной точки двумерного пространства;

\mathbf{p}_{i0} – радиус-вектор начала ребра e_i ;

\mathbf{p}_{i1} – координата конца ребра e_i ;

$\mathbf{q} = (x_q; y_q; z_q)$ – радиус-вектор произвольной точки трехмерного пространства;

\mathbf{R}^n – n -мерное координатное пространство;

t – скалярный аргумент;

$tr = (\mathbf{q}_{i0}; \mathbf{q}_{i1}; \mathbf{q}_{i2})$ – треугольник, заданный радиус-векторами вершин (упорядоченной тройкой);

$x(t)$ – непрерывная функция параметра t ;

$y(t)$ – непрерывная функция параметра t ;

$[]^T$ – операция транспонирования;

$\|\mathbf{a}\|$ – евклидова норма вектора \mathbf{a} ;

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ – операция вычисления скалярного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ;

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – операция вычисления векторного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ;

$[t]$ – операция нахождения наибольшего целого, меньшего чем t .

ВВЕДЕНИЕ

Важной частью проектирования сложных технических объектов является исследование их эксплуатационных характеристик. Многие технические объекты и конструкции обладают сложной формой и математические модели, используемые для их исследования, как правило, требуют адекватного описания соответствующей геометрической информации. В современных системах автоматизированного проектирования для описания формы объектов разработаны специальные подсистемы. Основой таких подсистем являются схемы представления (representation schemes) сплошных тел (solids). Под абстрактным понятием «сплошное тело» понимаются ограниченные замкнутые подмножества евклидова пространства, которые моделируют физические тела. Схема представления – это синтаксически и семантически корректное отношение между множеством формальных описаний математических моделей и множеством сплошных тел.

В исследованиях по компьютерному моделированию сплошных тел, выполненных в работах А. G. Requicha [1–3], выделены восемь основных схем представления: 1) инженерные чертежи; 2) каркасное представление; 3) представление экземплярами примитивов; 4) воксельное представление; 5) дискретные модели; 6) конструктивная сплошная (блочная) геометрия (Constructive Solid Geometry, CSG); 7) схемы представления разверткой; 8) граничное представление (Vrep);

Анализ приведенных выше «классических» представлений показал, что их практическое применение ограничено или требует значительных усилий для построения моделей сложных геометрических объектов. С точки зрения универсальности одним из наиболее перспективных выглядит функциональное представление, в основе которого использование языка неявных математических функций с конструктивными возможностями теории R-функций, разработанной академиком Рвачевым В. Л. [4–6]. Однако, его использование инженерами весьма затруднительно с точки зрения построения и верификации модели.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Функциональное представление с использованием неявных функций весьма универсально, однако в авиа-, авто- и судостроении весьма распространено использование параметрических кривых или поверхностей (например, поверхностей Безье, β -сплайнов и т. п.), ограничивающих элементы объекта. При этом, построение системы границ (граничного представления) нестандартного объекта (например, с разветвленной структурой технологических отверстий) достаточно трудное. Возможный способ упрощения процесса моделирования геометрических объектов – комбинирование элементов функционального и граничного представлений (гибридное представление), например, путем преобразования граничных моделей в функциональные. Переход от граничного представления примитива (системы параметрических кривых или поверхностей) к эквивалентному функциональному (неявному уравнению) при помощи разрешения соответствующей системы возможен лишь в относительно простых случаях и, следовательно, актуальной является разработка методов решения этой задачи.

В основе граничного представления лежит теорема Жордана-Брауера (обобщение теоремы Жордана для n -мерного пространства), которая гарантирует, что любое $(n-1)$ -мерное подмногообразие в \mathbf{R}^n , гомеоморфное сфере, разбивает пространство на две связные компоненты и является их общей границей. То есть, в двумерном случае плоская простая (не имеющая самопересечений) замкнутая кривая разбивает плоскость на две связные компоненты, одну из которых можно считать внутренней, другую внешней. Аналогично в трехмерном пространстве простая замкнутая поверхность разбивает пространство на две связные компоненты: внутреннюю и внешнюю. Таким образом, можно говорить, что простое ограниченное замкнутое множество $\mathbf{L} \subset \mathbf{R}^n$ представляет некоторый геометрический

объект Ω (при этом \mathbf{L} является границей Ω). При этом справедливо утверждение, что для всякого замкнутого множества \mathbf{L} может быть построено непрерывное неявное уравнение [4], простейший вариант которого – нормальное уравнение

$$\inf_{Y \in \mathbf{L}} \|X - Y\| = 0, \quad X \in \mathbf{R}^n.$$

Функция

$$\text{dist}(X, \mathbf{L}) = \inf_{Y \in \mathbf{L}} \|X - Y\| \quad (1)$$

является расстоянием от точки X до самой ближайшей к ней точки множества \mathbf{L} . Данная функция в произвольной взятой точке X принимает значение, равное радиусу наибольшей гиперсферы с центром в X , полностью заключенной (вписанной) в \mathbf{L} , если X – внутренняя точка \mathbf{L} , и равно радиусу наименьшей гиперсферы с центром в X , касающейся \mathbf{L} , если X – внешняя точка \mathbf{L} .

Предположим, что также дана функция

$$\text{sign}(X, \mathbf{L}) = \begin{cases} +1, & X \in \Omega, \\ -1, & X \notin \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

которая равна $+1$ во внутренних точках \mathbf{L} и равна -1 во внешних точках \mathbf{L} . Соответственно функция

$$\text{distance}(X, \mathbf{L}) = \text{sign}(X, \mathbf{L}) \text{dist}(X, \mathbf{L}) \quad (3)$$

будет больше нуля во внутренних точках \mathbf{L} , равна нулю, если $X \in \mathbf{L}$, и меньше нуля во внешних точках \mathbf{L} . Такая функция неявно определяет геометрический объект Ω . Таким образом, задача состоит в построении функций (1) и (2) при условии, что \mathbf{L} – представленная параметрически замкнутая граница.

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Говорят, что некоторое множество точек Ω задано неявно, если для каждой точки P определен логический предикат $S(P)$ такой, что

$$\Omega = \{P : S(P) = \text{true}\}.$$

Простейшей формой такого предиката является ограничение на знак некоторой действительной функции в виде неравенства $F(P) \geq 0$. Например, функция $\text{usphere}(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$ больше нуля в области, ограниченной единичной сферой, равна нулю на границе этой области и меньше нуля во внешних точках. Функциональное представление на базе неявных функций для более сложных областей можно строить в конструктивной манере, используя логические операции дизъюнкции, конъюнкции или отрицания, которые получили развитие в работах академика Рвачева В. Л. [4–6] и его научной школы. В частности, детальный анализ преобразований координат и суперпозиций с периодическими функциями для функционального представления геометрических объектов с различными типами симметрий выполнен в работах [7–10].

При граничном представлении сплошное тело представляется совокупностью ограничивающих его границ. В двумерном случае область ограничивается кривыми, в трехмерном – поверхностями. Сложные объекты могут быть описаны с использованием фрагментов ориентированных параметрических кривых или поверхностей, а также при помощи логических эйлеровых операций [11–13]. Актуальные научные исследования [14–17] посвящены оптимизации рендеринга поверхностей сплошных тел при использовании граничных моделей в качестве примитивов конструктивной блочной геометрии.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

1. Двумерные области

Пусть простая замкнутая граница некоторой двумерной области представлена параметрической кривой (которая может быть также составной или сплайном)

$$\text{curve}(t) = \mathbf{p} + x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (4)$$

Нахождение расстояния от произвольной точки пространства до ближайшей точки кривой – задача весьма экстенсивная, поэтому заменим кривую $\text{curve}(t)$ ее дискретной моделью для приблизительного вычисления функции (1).

Пусть дискретная модель кривой – это плоский граф, представленный списком n ребер

$$\mathbf{E}_2 = \{e_i = (\mathbf{p}_{i0}; \mathbf{p}_{i1})\}, \quad i = \overline{1, n},$$

тогда функция (1) примет вид

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, y, \text{curve}(t)) &= \text{dist}(\mathbf{p}, \text{curve}(t)) \approx \text{dist}_2(\mathbf{p}, \mathbf{E}_2) = \\ &= \min_{e_i = (\mathbf{p}_{i0}; \mathbf{p}_{i1}) \in \mathbf{E}_2} d_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{p}_{i1}), \end{aligned} \quad (5)$$

В формуле (5) для определения расстояния от точки \mathbf{p} до отрезка, заданного точками \mathbf{p}_{i0} и \mathbf{p}_{i1} (вершины ребра $e_i = (\mathbf{p}_{i0}; \mathbf{p}_{i1})$), использована функция $d_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{p}_{i1})$, которая может быть представлена формулой

$$d_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{p}_{i1}) = \begin{cases} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i0}\|, & \text{если } \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{p}_{i1} - \mathbf{p}_{i0} \rangle \leq 0, \\ \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i1}\|, & \text{если } \langle \mathbf{p}_{i1} - \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{p}_{i1} - \mathbf{p}_{i0} \rangle \leq \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{p}_{i1} - \mathbf{p}_{i0} \rangle, \\ \left\| \mathbf{p} - \left(\mathbf{p}_{i0} + \frac{\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{p}_{i1} - \mathbf{p}_{i0} \rangle}{\langle \mathbf{p}_{i1} - \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{p}_{i1} - \mathbf{p}_{i0} \rangle} (\mathbf{p}_{i1} - \mathbf{p}_{i0}) \right) \right\|, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

Стоит отметить, что функцию (6) можно использовать для нахождения расстояния от точки до отрезка в трехмерном случае [18].

Очевидно, что с увеличением числа ребер в графе \mathbf{E}_2 точность формулы (5) будет увеличиваться. Однако кривизна кривой $\text{curve}(t)$ может быть переменной, следовательно, для достижения наилучшей аппроксимации необходимо обеспечить сгущение ребер в области наибольшей кривизны. В таком случае можно воспользоваться следующим алгоритмом.

Алгоритм nonuniform-curve-mesh

Входные данные:

$\text{curve}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, – формула кривой, описывающая границу; $n \geq 2$ – количество узлов в начальной дискретной модели контура;

Инициализация:

Построим $\mathbf{E}_t = \{e_i = (t_{i0}; t_{i1})\}$, $t_{i0} = t_0 + ih$,

$t_{i1} = t_0 + (i+1)h$, $h = \frac{t_1 - t_0}{n-1}$, $i = \overline{0, n-2}$ – равномерную

дискретную модель кривой $\text{curve}(t)$ в параметрическом пространстве;

Повторять:

Для каждого $e_i = (t_{i0}; t_{i1}) \in \mathbf{E}_t$:

Если отклонение ребра от границы $> \delta$ то удалить

ребро e_i и добавить два новых ребра: $\left(t_{i0}; \frac{t_{i0} + t_{i1}}{2} \right)$ и

$\left(\frac{t_{i0} + t_{i1}}{2}; t_{i1} \right)$;

До тех пор пока были вставки новых ребер;

Вернуть $\mathbf{E}_2 = \{e_i = (\text{curve}(t_{i0}); \text{curve}(t_{i1}))\}$, $i = \overline{1, |\mathbf{E}_t|}$;

В результате будет построена адаптивная дискретная модель, которую можно использовать для аппроксимации по формуле (5).

Например, область, ограниченная замкнутой кривой

Безье $\text{sbezier}(t) = \sum_{i=0}^9 B_i^9(t) P_i$, $0 \leq t \leq 1$, построенной на

последовательности из 10 контрольных точек: $\mathbf{p}_0 = (0; 0)$, $\mathbf{p}_1 = (0; 3)$, $\mathbf{p}_2 = (1; 3)$, $\mathbf{p}_3 = (1; 1)$, $\mathbf{p}_4 = (4; 1)$, $\mathbf{p}_5 = (4; -1)$, $\mathbf{p}_6 = (1; -1)$, $\mathbf{p}_7 = (1; -3)$, $\mathbf{p}_8 = (0; -3)$ и $\mathbf{p}_9 = (0; 0)$, при $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$, $n = 41$ и $\delta = 0,02$ будет представлена дискретной моделью, изображенной на рис. 1.

Граф \mathbf{E}_2 , по сути, является замкнутым многоугольником, аппроксимирующим кривую. В соответствии с теоремой Жордана для построения функции (2) можно воспользоваться тестом четности, возможно, первая реализация которого рассмотрена в работе [19]. Он состоит в том, что из точки P выпускается луч, например, в положительном направлении оси Ox , тогда для определения принадлежности точки многоугольнику достаточно подсчитать число c – количество пересечений луча и ребер графа. Единственный вырожденный случай будет, если луч пересекает ребра в вершине. В таком случае используется такой прием: ребро считается пересеченным, если одна его вершина строго ниже луча, а вторая выше или лежит на луче. В результате функция (2) примет вид

$$\begin{aligned} \text{sign}(x, y, \text{curve}(t)) &= \text{sign}(\mathbf{p}, \text{curve}(t)) \approx \text{sign}_2(\mathbf{p}, \mathbf{E}_2) = \\ &= \begin{cases} +1, & \text{если } c \text{ нечетное,} \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

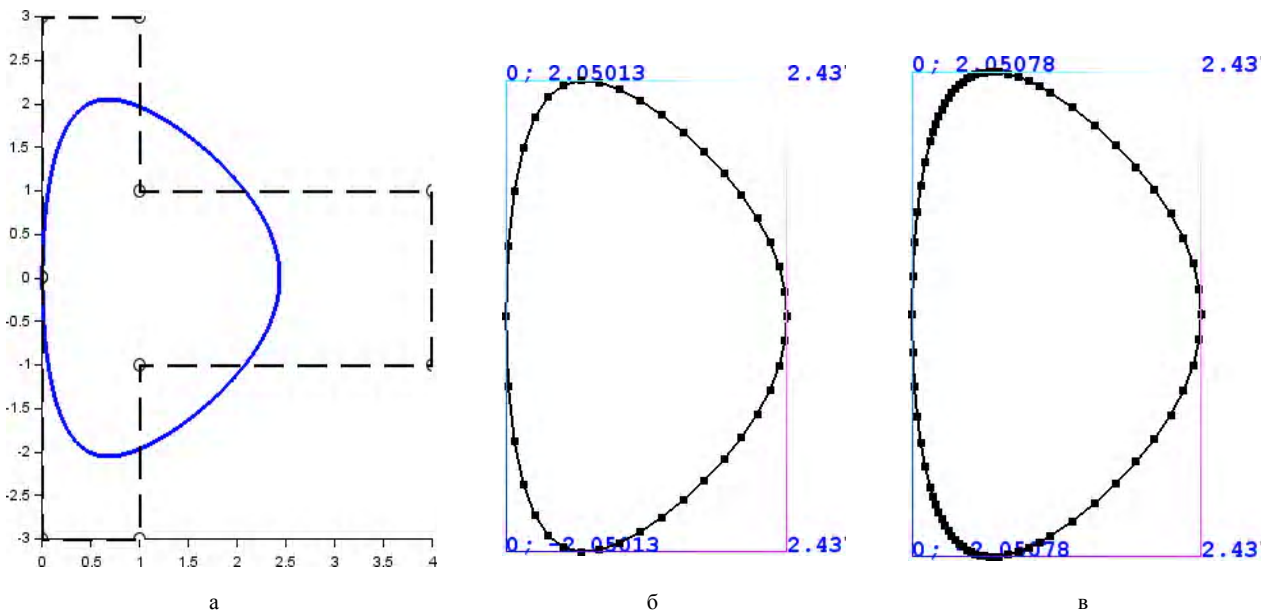


Рисунок 1 – Замкнута крива Бєзьє:

а – вихідна крива і її контрольні точки; б – початкова дискретна модель контура; в – адаптивна дискретна модель контура

Таким образом, абсолютное значение функции (3) может быть определено при помощи формул (5) и (6) с некоторой точностью, определяемой параметрами метода: количеством точек в начальной дискретной модели контура n и параметром точности аппроксимации δ . При этом знак этой функции может быть определен при помощи теста четности (7). Например, для приведенной выше кривой Бєзьє (рис. 1) распределение значений аппроксимации функции (3) при $n = 41$ и $\delta = 0,02$ примет вид, представленный на рис. 2.

2. Трехмерные области

Пусть простая замкнутая граница некоторой трехмерной области задана M лоскутами (патчами, англ. patches), являющимися параметрическими поверхностями вида:

$$\text{surface}_l(u, v) = \mathbf{q} + x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

$$u_{l0} \leq u \leq u_{l1}, \quad v_{l0} \leq v \leq v_{l1} \quad l = \overline{1, m}.$$

Как и в двумерном случае, лоскуты $\text{surface}_j(u, v)$, в том числе, могут быть сплайнами или составными поверхностями.

Для нахождения расстояния от произвольной точки пространства до ближайшей точки поверхности построим дискретную модель границы области, используя треугольные элементы. К такой дискретной модели предъявляется только требование согласованности узлов (и ребер в порядке их обхода) элементов.

Пусть дискретная модель поверхности – это множество из n треугольных элементов, нормаль к которым (в порядке обхода узлов) направлена наружу геометрического объекта:

$$\mathbf{E}_3 = \{tr_i = (\mathbf{q}_{i0}; \mathbf{q}_{i1}; \mathbf{q}_{i2})\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В таком случае в формуле (1) для приближенного ее вычисления граница \mathbf{L} может быть заменена дискретной моделью \mathbf{E}_3 :

$$\text{dist}(x, y, z, \mathbf{L}) = \text{dist}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) \approx \text{dist}_3(\mathbf{q}, \mathbf{E}_3) =$$

$$= \min_{t_i=(\mathbf{q}_{i0}; \mathbf{q}_{i1}; \mathbf{q}_{i2})} d_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{i0}, \mathbf{q}_{i1}, \mathbf{q}_{i2}) \quad (8)$$

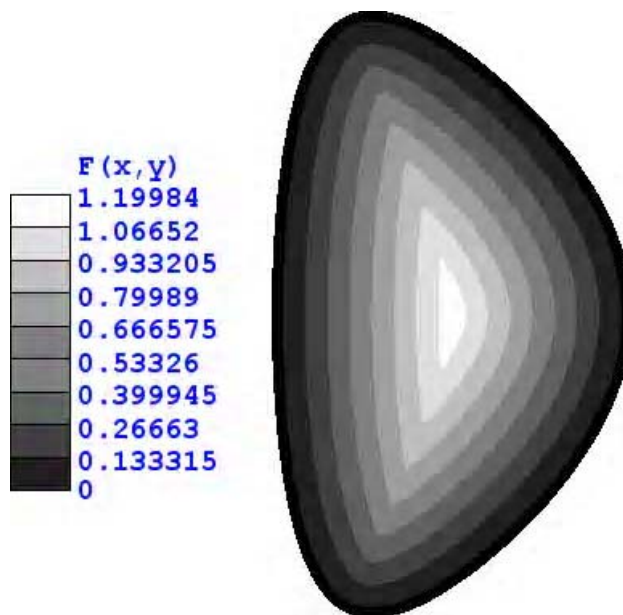


Рисунок 2 – Распределение значений функции (3) в области, ограниченной кривой Бєзьє

В формуле (8) $d_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{i0}, \mathbf{q}_{i1}, \mathbf{q}_{i2})$ – функция для определения расстояния от точки \mathbf{q} до треугольника, заданного точками \mathbf{q}_{i0} , \mathbf{q}_{i1} и \mathbf{q}_{i2} , которая может быть представлена формулой

$$d_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{i0}, \mathbf{q}_{i1}, \mathbf{q}_{i2}) = \begin{cases} |t|, & v_0 \geq 0 \wedge v_1 \geq 0 \wedge v_2 \geq 0, \\ \mathbf{q} - \mathbf{q}_{i0}, & v_0 < 0 \wedge v_1 \geq 0 \wedge v_2 < 0, \\ \mathbf{q} - \mathbf{q}_{i1}, & v_0 < 0 \wedge v_1 < 0 \wedge v_2 \geq 0, \\ \mathbf{q} - \mathbf{q}_{i2}, & v_0 \geq 0 \wedge v_1 < 0 \wedge v_2 < 0, \\ d_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{i0}, \mathbf{q}_{i1}), & v_0 < 0 \wedge v_1 \geq 0 \wedge v_2 \geq 0, \\ d_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{i1}, \mathbf{q}_{i2}), & v_0 \geq 0 \wedge v_1 < 0 \wedge v_2 \geq 0, \\ d_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{i2}, \mathbf{q}_{i0}), & v_0 \geq 0 \wedge v_1 \geq 0 \wedge v_2 < 0. \end{cases} \quad (9)$$

В формуле (9): $v_0 = \langle \mathbf{n}, [\mathbf{e}_{01}, \mathbf{c}_0] \rangle$, $v_1 = \langle \mathbf{n}, [\mathbf{e}_{12}, \mathbf{c}_1] \rangle$ и $v_2 = \langle \mathbf{n}, [\mathbf{e}_{20}, \mathbf{c}_2] \rangle$ – значения, используемые для определения взаимного расположения точки и вершин треугольника; $\mathbf{e}_{01} = \mathbf{q}_{i1} - \mathbf{q}_{i0}$, $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{q}_{i2} - \mathbf{q}_{i1}$ и $\mathbf{e}_{20} = \mathbf{q}_{i0} - \mathbf{q}_{i2}$ – векторы, образованные сторонами треугольника; $\mathbf{n} = [\mathbf{e}_{01}, -\mathbf{e}_{20}]$ – внешняя нормаль к плоскости треугольника; $l = \frac{\langle \mathbf{q} - \mathbf{q}_{i0}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{n}\|}$ – кратчайшее расстояние от вершины \mathbf{q} до плоскости треугольника; $\mathbf{b} = \mathbf{q} - \frac{l}{\|\mathbf{n}\|} \mathbf{n}$ – радиус-вектор проекции точки \mathbf{q} на плоскость треугольника; $\mathbf{c}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{q}_{i0}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{q}_{i1}$ и $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{q}_{i2}$ – векторы, направленные из вершин треугольника в \mathbf{b} .

С точки зрения рациональности использования необходимых для вычисления формулы (8) компьютерных ресурсов, как и в двумерном случае, граф \mathbf{E}_3 должен быть адаптивным к кривизне границы. Построение такого графа для множества параметрических лоскутов можно выполнить при помощи следующего алгоритма.

Алгоритм nonuniform-surface-mesh

Входные данные:

M – количество лоскутов; $\text{surface}_l(u, v), u_{l0} \leq u \leq u_{l1}, v_{l0} \leq v \leq v_{l1}, l = \overline{1, M}$ – формула поверхности каждого лоскута; $n_l \geq 2$ – количество узлов в начальной дискретной модели контура вдоль абсциссы параметрических координат; $m_l \geq 2$ – количество узлов в начальной дискретной модели контура вдоль ординаты параметрических координат

Инициализация:

$\mathbf{E}_3 = \emptyset$;

Для $l = 1, \dots, M$:

Для $i = 0, \dots, n_l$:

Для $j = 0, \dots, m_l$:

$$\mathbf{p}_{ij} = \left(u_{l0} + i \frac{u_{l1} - u_{l0}}{n_l - 1}; v_{l0} + j \frac{v_{l1} - v_{l0}}{m_l - 1} \right);$$

$\mathbf{E}_{3l} = \emptyset$;

для $i = 0, \dots, n_l - 1$:

для $j = 0, \dots, m_l - 1$:

Если $\mathbf{p}_{ij} \neq \mathbf{p}_{i+1j}$ и $\mathbf{p}_{ij} \neq \mathbf{p}_{i+1j}$ и $\mathbf{p}_{i+1j} \neq \mathbf{p}_{i+1j+1}$, тогда:

$$\mathbf{E}_{3l} = \mathbf{E}_{3l} \cup (\mathbf{p}_{ij}; \mathbf{p}_{i+1j}; \mathbf{p}_{i+1j+1});$$

Если $\mathbf{p}_{ij} \neq \mathbf{p}_{i+1j+1}$ и $\mathbf{p}_{ij} \neq \mathbf{p}_{ij+1}$ и $\mathbf{p}_{ij+1} \neq \mathbf{p}_{i+1j+1}$, тогда:

$$\mathbf{E}_{3l} = \mathbf{E}_{3l} \cup (\mathbf{p}_{ij}; \mathbf{p}_{i+1j+1}; \mathbf{p}_{ij+1});$$

Повторять:

Для каждого $tr = (\mathbf{p}_0; \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2) \in \mathbf{E}_{3l}$:

Если отклонение ребра $\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1$ от границы $> \delta$, тогда в множество \mathbf{E}_{3l} вставить узел с координатами $\frac{\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1}{2}$ и обновить триангуляцию

Иначе если отклонение ребра $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$ от границы $> \delta$ тогда в множество \mathbf{E}_{3l} вставить узел с координатами

$$\frac{\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1}{2} \text{ и обновить триангуляцию}$$

Иначе если отклонение ребра $\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_0$ от границы $> \delta$, тогда в множество \mathbf{E}_{3l} вставить узел с координатами

$$\frac{\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_0}{2} \text{ и обновить триангуляцию;}$$

До тех пор, пока были вставки новых ребер;

$$\mathbf{E}_{tl} = \{tr_i = (\text{surface}(\mathbf{p}_{i0}); \text{surface}(\mathbf{p}_{i1}); \text{surface}(\mathbf{p}_{i2}))\},$$

$i = \overline{1, |\mathbf{E}_{3l}|}$;

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_3 \cup \mathbf{E}_{tl};$$

Вернуть \mathbf{E}_3 ;

Операция вставки узла и обновления триангуляции в простейшем случае предполагает удаление треугольников, соседних в обрабатываемом ребре, и добавление новых соединением вершин образовавшегося многоугольника со вставляемым в середину ребра узлом. В результате выполнения алгоритма будет построена адаптивная к кривизне поверхности дискретная модель (некоторые примеры адаптации приведены рис. 3), которую можно использовать для аппроксимации по формуле (8)

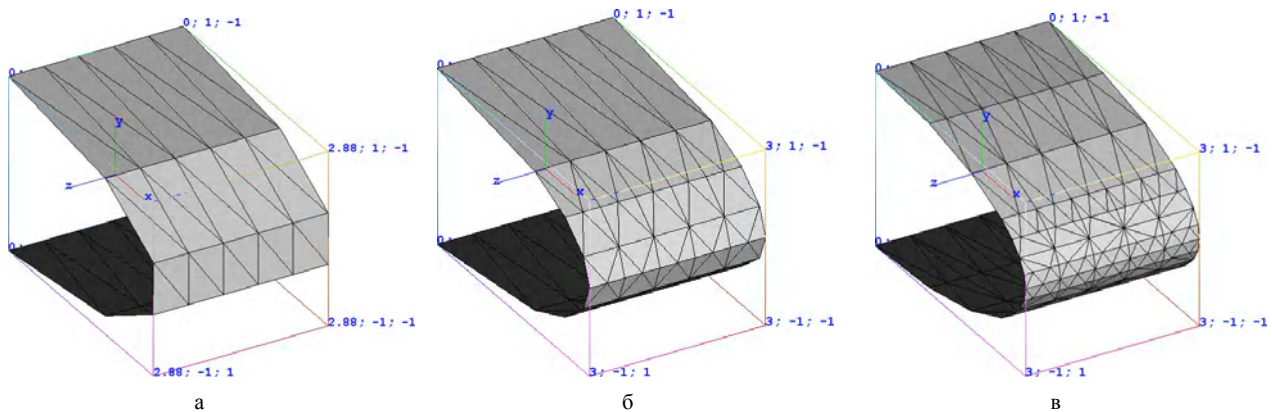


Рисунок 3 – Дискретизация лоскута при $n_l = 6, m_l = 6$: а – без адаптации к кривизне; б – адаптация к кривизне при $\delta = 0,1$; в – адаптация к кривизне при $\delta = 0,05$

Результатом работы алгоритма nonuniform-surface-mesh, входными данными которого являются лоскуты ограниченной замкнутой поверхности, будет замкнутый многогранник с треугольными гранями. Для определения знака функции расстояния в точке $\mathbf{q} = (x_q; y_q; z_q)$ на первом шаге строятся многоугольники, образованные сечением многогранника плоскостью $z = z_q$ (аналогично двумерному случаю для устранения возможных вырожденных случаев, определенных касанием плоскостью треугольника, считается, что треугольник пересекается плоскостью, если хотя бы один узел строго глубже и хотя бы один ближе или в плоскости $z = z_q$). Затем используется процедура подсчета числа c – пересечений луча и многоугольника, полностью эквивалентная двумерному случаю. В результате функция определения знака примет вид (7).

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Если исходной кривой будет, например, многоугольник, определенный замкнутой ломанной $\text{segments}(t) = (1-w)\mathbf{p}_i + w\mathbf{p}_{i+1}$, $w = t - i$, $i = \lfloor t \rfloor$, $0 \leq t \leq 12$ с последовательностью вершин $\mathbf{p}_0 = (0; 0)$, $\mathbf{p}_1 = (3; 0)$, $\mathbf{p}_2 = (3; 2)$, $\mathbf{p}_3 = (2; 2)$, $\mathbf{p}_4 = (2; 1)$, $\mathbf{p}_5 = (1; 1)$, $\mathbf{p}_6 = (1; 4)$, $\mathbf{p}_7 = (2; 4)$, $\mathbf{p}_8 = (2; 3)$, $\mathbf{p}_9 = (3; 3)$, $\mathbf{p}_{10} = (3; 5)$, $\mathbf{p}_{11} = (0; 5)$, $\mathbf{p}_{12} = (0; 0)$, при $t_0 = 0$, $t_1 = 12$ и $n = 13$ (значение параметра δ в данном случае не влияет на результат), то распределение значений функции (3) примет вид, представленный на рис. 4.

В работах [20, 21] рассмотрены особенности моделирования профилей крыльев с использованием кривых Безье. Полученные в этих работах результаты позволяют исследовать аэродинамические свойства, но в задачах исследования прочности необходимо учитывать также технологические отверстия. Например, симметричный профиль НАСА 0011 (рис. 5) может быть представлен составной кривой [20]

$$\text{naca}_{0011}(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^5 \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{t}_i, & 0 \leq t \leq 1, \\ \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} (t-1)^i (2-t)^{n-i} \mathbf{b}_i, & 1 < t \leq 2, \end{cases}$$

с контрольными точками: $\mathbf{t}_0 = (0; 0)$, $\mathbf{t}_1 = (1,14034; 2,44284)$, $\mathbf{t}_2 = (11,1025; 3,65375)$, $\mathbf{t}_3 = (30,8809; 1,13309)$, $\mathbf{t}_4 = (39,9276; 0,09712)$, $\mathbf{t}_5 = (40; 0)$ (верхний изгиб крыла) и $\mathbf{b}_0 = (0; 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1,14034; -2,44284)$, $\mathbf{b}_2 = (11,1025; -3,65375)$, $\mathbf{b}_3 = (30,8809; -1,13309)$, $\mathbf{b}_4 = (39,9276; -0,09712)$, $\mathbf{b}_5 = (40; 0)$ (нижний изгиб крыла).

Стоит отметить, что функции вида (3), построенные для контуров двумерных областей, могут быть использованы в качестве операндов (примитивов) R-операций вместе с рассмотренными выше неявными функциями. Например, профиль крыла с тремя технологическими отверстиями (рис. 6) можно представить функцией

$$f_{\text{naca}}(x, y) = \text{distance}(x, y, \text{naca}_{0011}(t)) \wedge \neg \text{rectangle}(x - x_1, y, w_1, h_1) \wedge \neg \text{circle}(x - x_2, y, r_2) \wedge \neg \text{rectangle}(x - x_3, y, w_3, w_3),$$

где функция $\text{rectangle}(x; y; w; h) = \left[1 - \left(\frac{2x}{w}\right)^2\right] \wedge \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$,

$w > 0$, $h > 0$ соответствует области, ограниченной прямоугольником шириной w и высотой h с центром в начале координат; функция $\text{circle}(x; y; r) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2}$

представляет область, ограниченную окружностью радиуса r с центром в начале координат; $x_1, x_2, x_3, w_1, h_1, r_2, w_3$ – параметры положения и размеров отверстий.

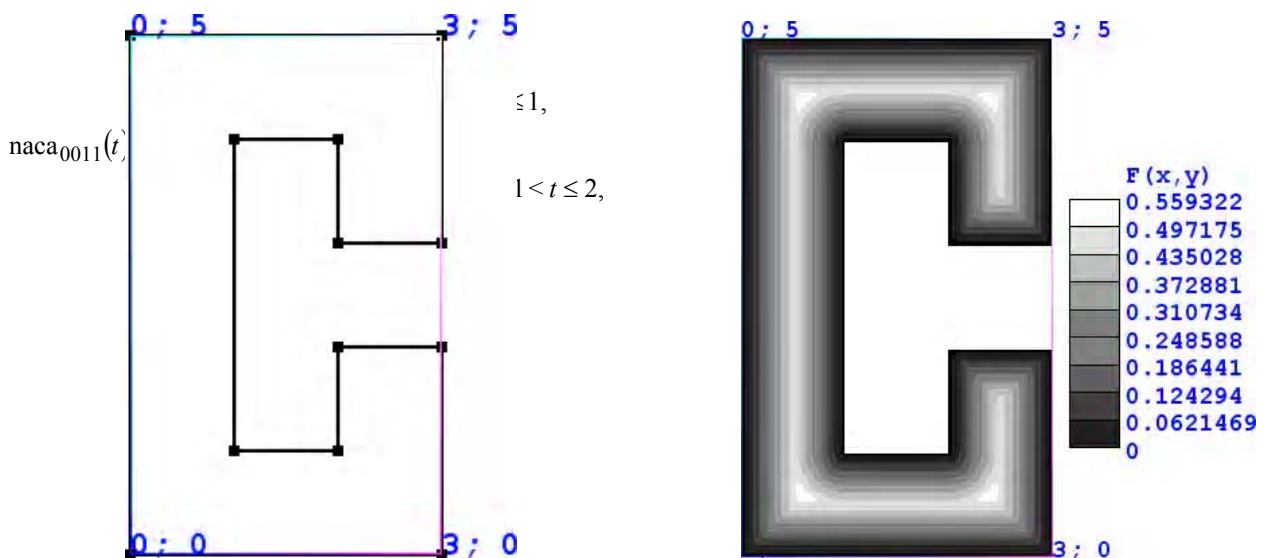


Рисунок 4 – Распределение значений функции (3) для многоугольника

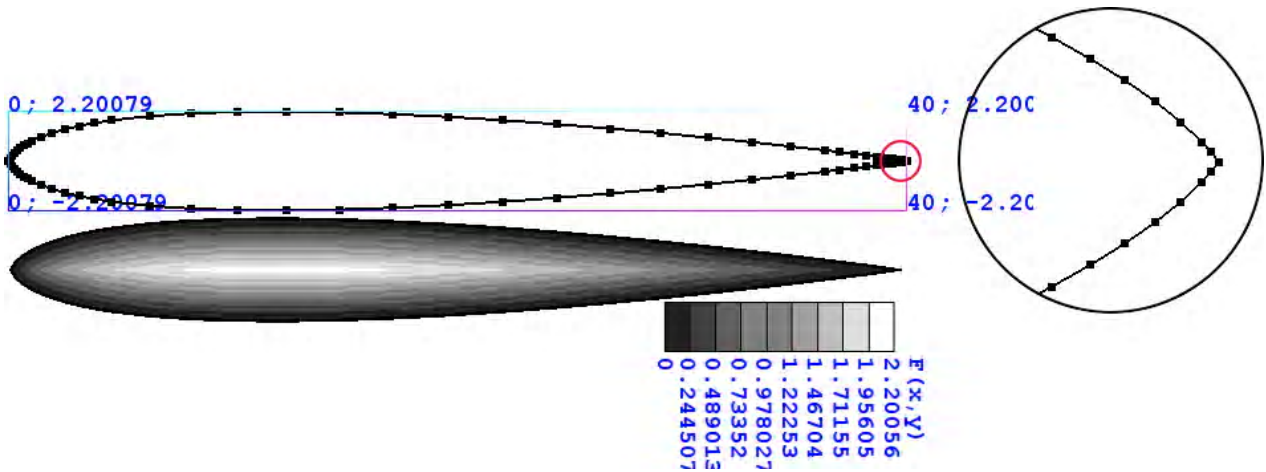


Рисунок 5 – Профиль NASA 0011: дискретная модель контура и распределение значений функции (3)

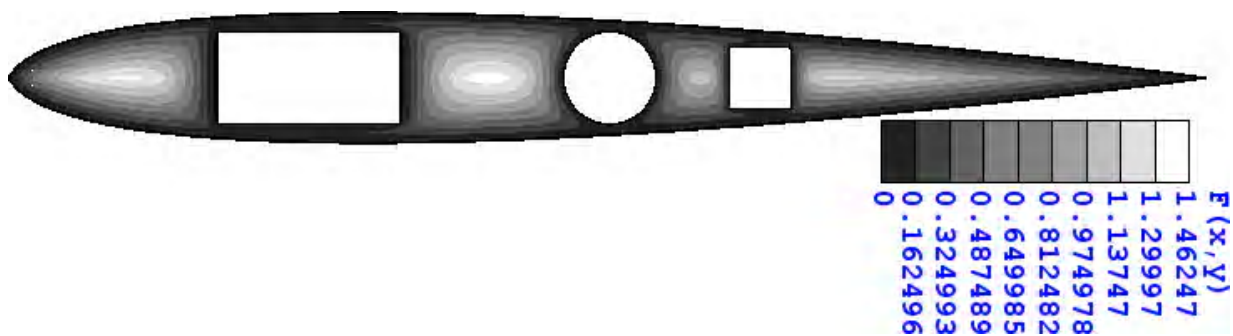


Рисунок 6 – Профиль NASA 0011 с технологическими отверстиями: $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 25$, $w_1 = 6$,

$$h_1 = 3, r_2 = 1,5, w_3 = 2$$

Рассмотрим поверхность модели летательного (рис. 7), определенного шестью лоскутами (поверхностями Безье) с контрольными точками, заданными матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} (0; -4; 0) & (0; -3,9; 0,01) & (0; -1,1; 0,4) & (0; 0; 3) \\ (4; -2; 0) & (4; -1,9; 0,01) & (4; -0,1; 0,4) & (4; 0; 3) \\ (7; -3; 0) & (7; -2,9; 0,01) & (7; -0,1; 0,4) & (2; 0; 1) \\ (8; -1; 0) & (8; -0,9; 0) & (8; 0; 0) & (8; 0; 0) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} (8; 1; 0) & (8; 0,9; 0) & (8; 0; 0) & (8; 0; 0) \\ (7; 3; 0) & (7; 2,9; 0,01) & (7; 0,1; 0,4) & (2; 0; 1) \\ (4; 2; 0) & (4; 1,9; 0,01) & (4; 0,1; 0,4) & (4; 0; 3) \\ (0; 4; 0) & (0; 3,9; 0,01) & (0; 1,1; 0,4) & (4; 0; 3) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} (8; -1; 0) & (8; -0,9; 0) & (8; 0; 0) & (8; 0; 0) \\ (7; -3; 0) & (7; -2,9; -0,01) & (7; -0,1; -0,4) & (7; 0; -0,4) \\ (4; -2; 0) & (4; -1,9; -0,01) & (4; -0,1; -0,4) & (4; 0; -0,4) \\ (0; -4; 0) & (0; -3,9; -0,01) & (0; -1,1; -0,4) & (0; 0; -0,4) \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} (0; 4; 0) & (0; 3,9; -0,01) & (0; 1,1; -0,4) & (0; 0; -0,4) \\ (4; 2; 0) & (4; 1,9; -0,01) & (4; 0,1; -0,4) & (4; 0; -0,4) \\ (7; 3; 0) & (7; 2,9; -0,01) & (7; 0,1; -0,4) & (7; 0; -0,4) \\ (8; 1; 0) & (8; 0,9; 0) & (8; 0; 0) & (8; 0; 0) \end{bmatrix},$$

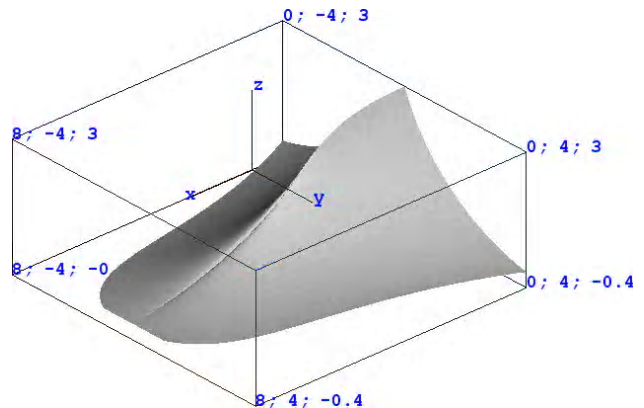


Рисунок 7 – Поверхность летательного аппарата

$$E = \begin{bmatrix} (0; -4; 0) & (0; -3,9; -0,01) & (0; -1,1; -0,4) & (0; 0; -0,4) \\ (0; -4; 0) & (0; -3,9; 0,01) & (0; -1,1; 0,4) & (0; 0; 3) \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} (0; 4; 0) & (0; 3,9; 0,01) & (0; 1,1; 0,4) & (0; 0; 3) \\ (0; 4; 0) & (0; 3,9; -0,01) & (0; 1,1; -0,4) & (0; 0; -0,4) \end{bmatrix}.$$

Поверхность каждого такого лоскута, заданного матрицей контрольных точек Q (размером $n \times m$), описывается известной параметрической формулой:

$$sbezier(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) Q_{ij},$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1.$$

Распределения значений функции расстояния со знаком для модели летательного аппарата в сечениях плоскостями $y = 0$ и $z = 0$, соответственно представлены на рис. 8а и 8б.

Как и в двумерном случае, трехмерные функции расстояния могут выступать в качестве операндов R-операций для определения более сложных объектов. Например, для представления модели летательного аппарата в виде, представленном на рис. 9, может быть использована формула

$$F(x, y, z) = \text{distance}(x, y, z, \text{surface}(A, B, C, D, E, F)) \wedge \text{Torp}(x, y - 1.5, z) \wedge \text{Torp}(x, y + 1.5, z), \quad (10)$$

$$\text{Torp}(x, y, z) = x \wedge (r^2(x) - y^2 - z^2) \wedge (4 - x),$$

$$r(x) = \begin{cases} 1 - 0,5x, & x \leq 1, \\ 0,5, & 1 < x \leq 3, \\ 0,5 - 0,5(x - 3), & 3 < x. \end{cases}$$

Распределение значений функции (10) в сечении плоскостью $z = 0$ изображено на рис. 10.

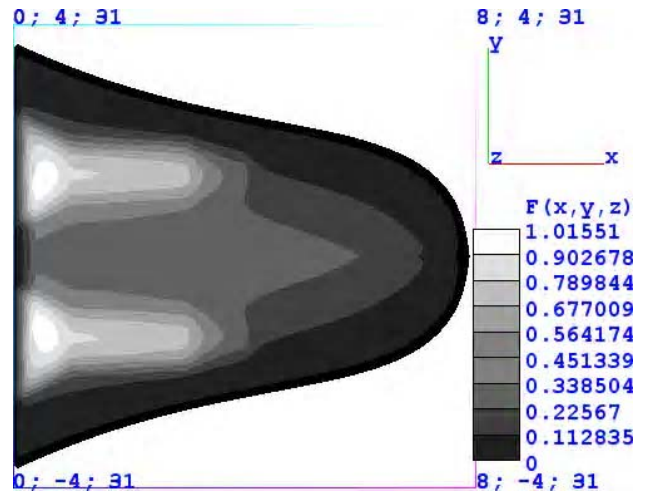
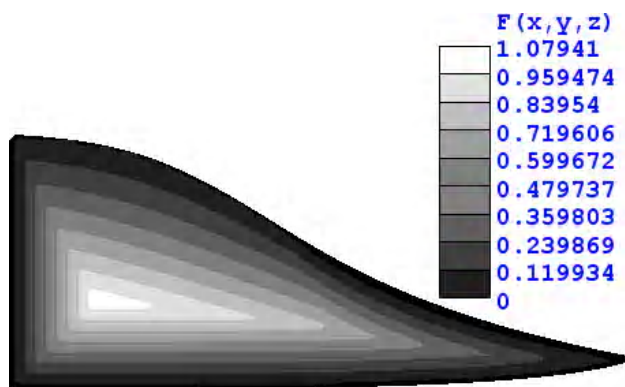
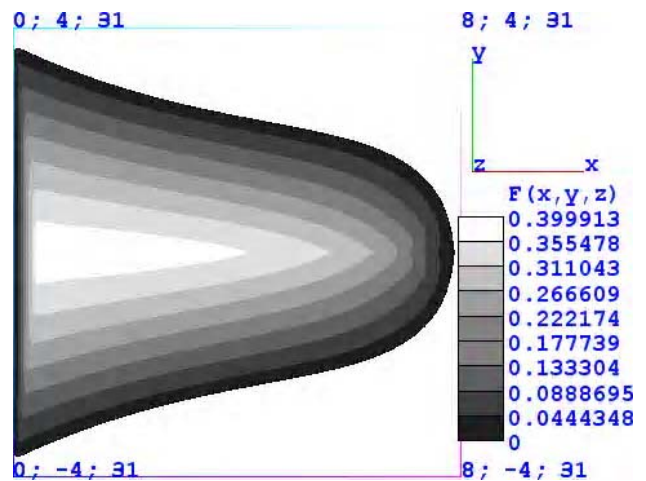


Рисунок 10 – Распределение значений функции (10) в сечении плоскостью



а



б

Рисунок 8 – Распределение значений функции расстояния со знаком в сечениях

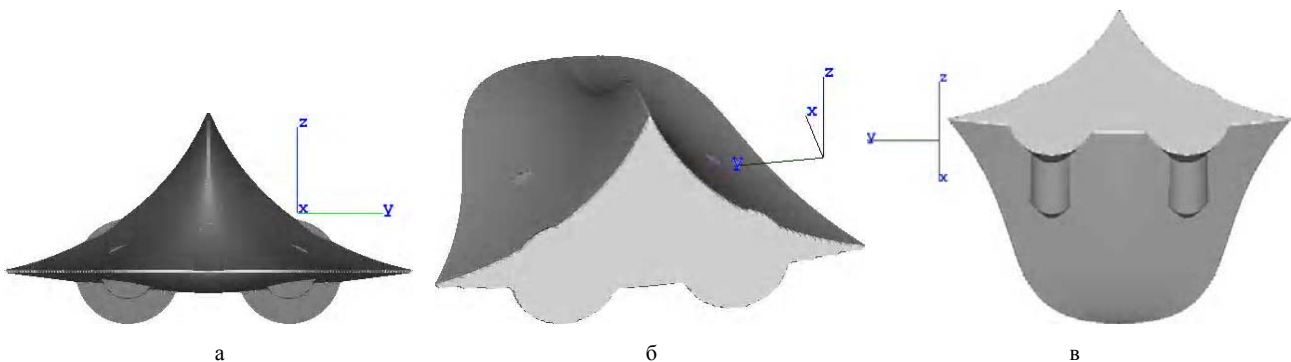


Рисунок 9 – Модель летательного аппарата

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Таким образом, предложенный математический аппарат позволяет использовать области, границы которых определены при помощи параметрических функций, в качестве операндов R-операций. Полученные модели можно рассматривать как гибридные, совмещающие функциональное представление на базе неявных функций и граничное представление на базе параметрических функций.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

В отличие от существующих работ [4–10], посвященных моделированию геометрических объектов с использованием теории неявных функций и R-функций, предложенный подход позволяет проще описывать области, ограниченные кривыми или поверхностями Безье, b-сплайнами или NURBS. Переход от граничного представления области к дискретному позволяет сравнительно просто автоматизировать данный математический аппарат. Недостатком такого перехода является экстенсивность необходимых вычислений.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе решена актуальная проблема повышение эффективности и адекватности математического моделирования сложных тел. Научная новизна результатов, полученных в статье, состоит в том, что получил дальнейшее развитие функциональный подход, основанный на базе неявных функций и теории R-функций, в части упрощения построения моделей областей, представленных гранично на базе параметрических функций. Практическая значимость результатов заключается том, что разработано программное обеспечение, реализующее предложенный метод, на основе которого решены задачи построения моделей сложных тел. Перспективы дальнейших исследований состоят в том, чтобы оптимизировать вычисление функций расстояния со знаком, например, например, при помощи технологий параллельных вычислений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы № 3/15 «Математическое моделирование конструкций неоднородной структуры на базе современных информационных технологий» (№ гос. регистрации: 0115U000761).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Requicha A. A. G. Representations for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems / A. A. G. Requicha // *Computing Surveys*. – 1980. – Volume 12, No 4. – P. 437–464. DOI: 10.1145/356827.356833
2. Requicha A. A. G. Solid Modeling: A Historical Summary and Contemporary Assessment / A. A. G. Requicha, H. B. Voelcker // *IEEE Computer Graphics and Applications*. – 1982. – Volume 2, Issue 2. – P. 9–24. DOI: 10.1109/MCG.1982.1674149
3. Requicha A. A. G. Solid Modeling: Current Status and Research Directions / A. A. G. Requicha, H. Voelcker // *IEEE Computer Graphics and Applications*. – 1983. – Volume 3, Issue 7. – P. 25–37. DOI: 10.1109/MCG.1983.26327
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К. : Наукова Думка, 1982. – 552 с.
5. Рвачев В. Л. Применение метода R-функций к построению уравнений локусов, обладающих симметрией / В. Л. Рвачев,

- В. Шапиро, Т. И. Шейко // *Электромагнитные волны и электронные системы*. – 1999. – 4, № 4. – С. 4–20.
6. Рвачев В. Л. Введение в теорию R-функций / В. Л. Рвачев, Т. И. Шейко // *Проблемы машиностроения*. – 2001. – Т. 4, № 1–2. – С. 46–58.
7. Максименко-Шейко К. В. Автоматизация построения уравнений геометрических объектов в методе R-функций / К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, Т. И. Шейко // *Кибернетика и системный анализ*. – 2006. – № 2. – С. 148–157.
8. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов, обладающих симметрией / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // *Кибернетика и системный анализ*. – 2008. – № 6. – С. 75–83.
9. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // *Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових праць. Фізико-математичні науки*. – 2010. – № 1. – С. 98–104.
10. Максименко-Шейко К. В. Математическое моделирование геометрических фракталов с помощью R-функций / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // *Кибернетика и системный анализ*. – 2012. – Т. 48. – № 4. – С. 155–162.
11. Stroud I. *Boundary Representation Modelling Techniques* / Ian Stroud. – London : Springer, 2006. – 808 p. – ISSN: 1846283124.
12. Vaněček G. Brep-index: A Multidimensional Space Partitioning Tree / George Vaněček Jr. // *International Journal of Computational Geometry & Applications*. – 1991. – Volume 1, Issue 3. – P. 243–261. DOI: 10.1142/S0218195991000189
13. Quadros W. R. Defeaturing CAD models using a geometry-based size field and facet-based reduction operators / W. R. Quadros, S. J. Owen // *Engineering with Computers*. – 2012. – Volume 28, Issue 3. – P. 211–224. DOI: 10.1007/s00366-011-0252-8
14. Hable J. Blister: GPU-based rendering of Boolean combinations of free-form triangulated shapes / J. Hable, J. Rossignac // *ACM Transactions on Graphics*. – 2005. – Volume 24, Issue 3. – P. 1024–1031. DOI: 10.1145/1073204.1073306
15. Hable J. CST: constructive solid trimming for rendering BReps and CSG / J. Hable, J. Rossignac // *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. – 2007. – Volume 13, Issue 5. – P. 1004–1014. – DOI: 10.1109/TVCG.2007.70411
16. Rossignac J. Direct rendering of Boolean combinations of self-trimmed surfaces / J. Rossignac, I. Fudos, A. Vasilakis // *Computer-Aided Design*. – 2013. – Volume 45, Issue 2. – P. 288–300. DOI: 10.1016/j.cad.2012.10.012
17. Deferred boundary evaluation of complex CSG models / [C. J. Ogayar-Anguita, Á.L. García-Fernández, F. R. Feito-Higuera, R. J. Segura-Sánchez] // *Advances in Engineering Software*. – 2015. – Volume 85, Issue C. – P. 51–60. DOI: 10.1016/j.adwengsoft.2015.03.003
18. Schneider Ph. *Geometric Tools for Computer Graphics (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics)* / Philip Schneider, David H. Eberly. – San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, Elsevier Science, 2003. – 1056 p.
19. Shimrat M. Algorithm 112: Position of Point Relative to Polygon / M. Shimrat // *Communications of the ACM*. – 1962. – Volume 5, Issue 8. – P. 434. DOI: 10.1145/368637.368653
20. Fazil J. Investigation of Airfoil Profile Design using Reverse Engineering Bezier Curve / J. Fazil, V. Jayakumar // *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*. – 2011. – Volume 6, No 7. – P. 43–52.
21. Parasaram R. K. N. Airfoil Profile Design by Reverse Engineering Bezier Curve / R. Kr. N. Parasaram, T. N. Charyulu // *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*. – 2012. – Volume 1, No 3. – P. 410–420.

Статья поступила в редакцию 09.03.2017.

После доработки 29.05.2017.

Чопоров С. В.

Канд. техн. наук, доцент кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету, Запоріжжя, Україна
ГІБРИДНЕ ПОДАННЯ СУЦІЛЬНИХ ТІЛ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЯВНИХ І ПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Актуальність. Розглянута проблема подання суцільних тіл у системах автоматизації проектних робіт. Об'єктом дослідження є процес подання суцільних тіл у системах автоматизації проектних робіт.

Мета роботи – розробка гібридної схеми подання геометричних об'єктів, що використовує неявні функції R-операції та параметричні функції.

Метод. Для моделювання суцільних тіл у статті запропоновано гібридне подання. Під абстрактним поняттям «суцільне тіло» у роботі розуміються обмежені замкнені підмножини евклідова простору, які моделюють фізичні тіла, а під схемою подання – синтаксично та семантично коректне відношення між множиною формальних описів математичних моделей та множиною суцільних тіл. В основі гібридного подання покладено ідею одночасного використання граничного і функціонального подань. Вважається, що при граничному поданні, області визначаються власними границями, описаними за допомогою параметричних функцій, а при функціональному поданні – за допомогою неявних функцій з використанням положень теорії R-функцій. Для гібридного подання використовуються функції відстані зі знаком, які дозволяють розглядати області, описані параметричними функціями, як аргументи R-операцій (кон'юнкції, диз'юнкції або заперечення) у процесі побудови єдиної формули для складного тіла. Щоб у довільній точці обчислити відстань зі знаком до границі області, обмеженої параметричними функціями, запропоновано використовувати допоміжну побудову адаптивних дискретних моделей контурів. Відстань від точки до границі апроксимується відстанню від цієї точки до найближчого дискретного елемента. Для визначення знаку функції використовується тест парності.

Результати. Розроблена гібридна схема подання реалізована у програмному продукті, на основі якого вирішенні задачі побудови моделей складних тіл.

Висновки. Проведені обчислювальні експерименти підтвердили коректність і працездатність запропонованого математичного забезпечення. Перспективи подальших досліджень можуть полягати в оптимізації обчислення функції відстані зі знаком, наприклад, за допомогою технологій паралельних обчислень.

Ключові слова: суцільне тіло, неявна функція, R функція, параметрична функція, дискретна модель, функція відстані, тест парності, автоматизоване проектування.

Choporov S. V.

PhD, Associate Professor of Software Engineering Department, Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine
HYBRID REPRESENTATION OF SOLIDS USING IMPLICIT AND PARAMETRIC FUNCTIONS

Context. The present article deals with the problem of representation of solids in computer-aided design. The object of the study is a process of representation of solids in computer-aided design.

Objective. The objective of the study is the development of a hybrid representation scheme which uses implicit functions, R-operations and parametric functions.

Method. In the article, a hybrid representation scheme has been suggested to model solids. An abstract notion “solid” denotes bounded and closed subsets of Euclidean space, which model physical bodies. A representation scheme is a syntactically and semantically correct relation between a set of formal models and a set of solids. It is supposed that boundary represented regions are defined by parametric functions. On the other hand, functionally represented regions are defined by implicit functions. The hybrid representation scheme is based on an idea of combining the boundary representation scheme with the functional representation scheme. The hybrid representation scheme uses a signed distance function to transform regions with parametric boundaries into implicitly defined regions. Adaptive discrete models are used to evaluate a signed distance from some point to a boundary of a region which boundaries are defined by parametric functions. A distance from a point to the closest discrete element approximates a distance from a point to a boundary of a region. The parity test has been used to define a sign of a distance.

Results. The developed hybrid representation scheme has been implemented in software and investigated for solving the problems of solid modeling.

Conclusions. Carried out numerical experiments have confirmed the proposed software operability. The prospects for further research may include the development of parallel methods for calculation of a signed distance function.

Keywords: solid, implicit function, R-function, parametric function, discrete model, distance function, parity test, computer-aided design.

REFERENCES

1. Requicha A. A. G. Representations for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems, *Computing Surveys*, 1980, Volume 12, No. 4, pp. 437–464. DOI: 10.1145/356827.356833
2. Requicha A. A. G., Voelcker H. B. Solid Modeling: A Historical Summary and Contemporary Assessment, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1982, Volume 2, Issue 2, pp. 9–24. DOI: 10.1109/MCG.1982.1674149
3. Requicha A. A. G., Voelcker H. B. Solid Modeling: Current Status and Research Directions, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1983, Volume 3, Issue 7, pp. 25–37. DOI: 10.1109/MCG.1983.26327
4. Rvachev V. L. Teoriya R-funkcij i nekotorye ee prilozheniya. Kiev, Naukova Dumka, 1982, 552 p.
5. Rvachev V. L., Shapiro V., Shejko T. I. Primenenie metoda R-funkcij k postroeniyu uravnenij lokusov, obladayushhix simmetriey, *E'lektromagnitnye volny i e'lektronnye sistemy*, 1999, 4, No. 4, pp. 4–20.
6. Rvachev V. L., Shejko T. I. Vvedenie v teoriyu R-funkcij, *Problemy mashinostroeniya*, 2001, Vol. 4, No. 1–2, pp. 46–58.
7. Maksimenko-Shejko K. V., Macevityj A. M., Shejko T. I. Avtomatizaciya postroeniya uravnenij geometricheskix ob'ektov v metode R-funkcij, *Kibernetika i sistemnyj analiz*, 2006, No. 2, pp. 148–157.

8. Maksimenko-Shejko K. V., Shejko T. I. R-funkcii v matematicheskom modelirovanii geometricheskix ob'ektov, obladayushhix simmetriej, *Kibernetika i sistemnyj analiz*, 2008, No. 6, pp. 75–83.
9. Maksimenko-Shejko K. V., Shejko T. I. R-funkcii v matematicheskom modelirovanii geometricheskix ob'ektov v 3D po informacii v 2D, *Visnyk Zaporiz'kogo nacional'nogo universytetu: Zbirnyk naukovykh prac'. Fyzyko-matematychni nauky*, 2010, No. 1, pp. 98–104.
10. Maksimenko-Shejko K. V., Shejko T. I. Matematicheskoe modelirovanie geometricheskix fraktalov s pomoshh'yu R-funkcij, *Kibernetika i sistemnyj analiz*, 2012, Vol. 48, No. 4, pp. 155–162.
11. Stroud I. *Boundary Representation Modelling Techniques*. London, Springer, 2006, 808 p. ISSN: 1846283124.
12. Vaněček G. Brep-index: A Multidimensional Space Partitioning Tree, *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 1991, Volume 1, Issue 3, pp. 243–261. DOI: 10.1142/S0218195991000189
13. Quadros W. R., Owen S. J. Defeaturing CAD models using a geometry-based size field and facet-based reduction operators, *Engineering with Computers*, 2012, Volume 28, Issue 3, pp. 211–224. DOI: 10.1007/s00366-011-0252-8
14. Hable J., Rossignac J. Blister: GPU-based rendering of Boolean combinations of free-form triangulated shapes, *ACM Transactions on Graphics*, 2005, Volume 24, Issue 3, pp. 1024–1031. DOI: 10.1145/1073204.1073306
15. Hable J., Rossignac J. CST: constructive solid trimming for rendering BReps and CSG, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2007, Volume 13, Issue 5, pp. 1004–1014. DOI: 10.1109/TVCG.2007.70411
16. Rossignac J., Fudos I., Vasilakis A. Direct rendering of Boolean combinations of self-trimmed surfaces, *Computer-Aided Design*, 2013, Volume 45, Issue 2, pp. 288–300. DOI: 10.1016/j.cad.2012.10.012
17. Ogayar-Anguita C. J., Garcí a-Fernández Á. L., Feito-Higueruela F. R., Segura-Sánchez R. J. Deferred boundary evaluation of complex CSG models, *Advances in Engineering Software*, 2015, Volume 85, Issue C, pp. 51–60. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2015.03.003
18. Schneider Ph. Eberly David H. *Geometric Tools for Computer Graphics (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics)*. San Francisco, Morgan Kaufmann Publishers, Elsevier Science, 2003, 1056 p.
19. Shimrat M. Algorithm 112: Position of Point Relative to Polygon, *Communications of the ACM*, 1962, Volume 5, Issue 8, P. 434. DOI: 10.1145/368637.368653
20. Fazil J., Jayakumar V. Investigation of Airfoil Profile Design using Reverse Engineering Bezier Curve, *ARPJN Journal of Engineering and Applied Science*, 2011, Volume 6, No. 7, pp. 43–52.
21. Parasaram R. K. N., Charyulu T. N. Airfoil Profile Design by Reverse Engineering Bezier Curve, *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, 2012, Volume 1, No. 3, pp. 410–420.