УДК 658.286:519.286

Д.А. Малиновский

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДУОПОЛИИ В КОНКУРЕНТНОЙ СРЕДЕ СИСТЕМЫ «ПРОМЫШЛЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ – ДИСТРИБУТИВНАЯ СЕТЬ»

В статье построены статические экономико-математические модели поведения системы «промышленное предприятие-дистрибутивная сеть» в конкурентной среде типа олигополии. Моделируется дуополия для промышленных предприятий, нахождение равновесного решения которой сводится к паре задач квадратичного программирования транспортного типа. Для частного случая найдены равновесные по Курно и по Стэкельбергу решения.

Ключевые слова: *промышленное предприятие, распределительная сеть, совместное планирование производства и распределения, конкурентная среда, дуополия, равновесное решение.*

У статті побудовані статичні економіко-математичні моделі поведінки системи «промислове підприємство-дистрибутивна мережа» у конкурентному середовищі типу олігополії. Моделюється дуополія для промислових підприємств, находження рівноважного рішення якої зведено до пари задач квадратичного програмування транспортного типу. Для окремого випадку знайдено рівноважні за Курно та за Стекельбергом рішення.

Ключові слова: *промислове підприємство, розподільча мережа, сумісне планування виробництва та розподілу, конкурентне середовище, дуополія, рівноважне рішення.*

© **Малиновский Д.А., 2012**

**Розвиток методів управління
та господарювання на транспорті
№ 3 (40), 2012**

In the article, the static economic-mathematical model of "industrial enterprise – distributive network" system's behavior in competitive environment of oligopoly type is built. This model is based on the classical industrial enterprise output's plan optimization problem which is reduced to a linear programming problem. It is assumed that (a) raw materials are given and fixed, (b) finished products are to be delivered at given set of destinations with the known demands. For a single enterprise the problem of joint optimization of finished products manufacturing and their transportation at destinations is formulated (the objective is enterprise's profit maximization, transportation costs are paid by buyers of products manufactured).

The model of duopoly for industry enterprises with the same nomenclature of finished products is analyzed, using the linear demand functions at destinations and linear cost functions for both enterprises. The problem of an equilibrium solution finding for this duopoly is reduced to the pair of transportation type quadratic optimization problems. For particular cases the equilibrium solutions of Cournot and Stackelberg types are found.

It is shown that in general case the equilibrium solution of duopoly may be found by the method of Lagrange multipliers.

As another way of duopoly resolving the method of both enterprises' objective functions unity is proposed.

Keywords: *industrial enterprises, distributive network, joint planning of manufacturing and distribution, competitive environment, duopoly, equilibrium solution.*

Постановка проблемы. При решении задач, связанных с оптимизацией управления материальными потоками в логистических или дистрибутивных сетях, необходимо принимать во внимание не только факторы неопределенности и риска, но также и возможную конкуренцию между производителями продукции, поставщиками, транспортными предприятиями, экспедиторами и др. организациями, которые обеспечивают физическое продвижение материального потока. Рыночный механизм, когда действует небольшое число участников, называется конкуренцией среди немногих: случай, когда действует несколько продавцов продукции называется олигополией, а когда несколько покупателей определенного вида ресурсов (сырья, полуфабрикатов), называется олигопсонией [1]. Важной особенностью конкуренции среди немногих является то, что все конкурирующие фирмы могут влиять на цены продукции или производственных ресурсов. Это приводит к тому, что прибыль каждой фирмы зависит от политики всех остальных конкурирующих фирм. Однако применительно к логистике известные методы анализа конкурентной среды требуют определенной модификации.

Обзор последних исследований и публикаций. Методологический аппарат для исследования конкурентной борьбы между предприятиями существует в микроэкономике (теория фирмы [1]) и в исследовании операций (модели конкурентной среды [2]). Применению указанной методологии к поиску равновесных решений для олигополий в статике, включая конкуренцию между логистическими системами, посвящены, например, работы [3-6]. В то же время желательно при анализе конкурентной среды учитывать, хотя бы в простейшем виде, особенности производственно-технологического процесса конкурирующих предприятий, так же как и транспортных предприятий. В работе [7] была предложена экономико–математическая модель для совместной оптимизации планов производства многономенклатурной продукции промышленным предприятием и доставки готовой продукции заданному множеству потребителей. На ее основе можно ставить и решать задачи анализа олигополий, например, в конкурентной среде из нескольких промышленных предприятий.

Задача исследования. Целью работы является разработка экономико-математических моделей для анализа дуополии систем типа «промышленное предприятие – дистрибутивная сеть» для нахождения равновесных решений и изучения влияния конкурентной среды на оптимальное распределение материальных потоков, движущихся от конкурирующих предприятий-производителей продукции к местам ее потребления.

Розвиток методів управління
та господарювання на транспорті
№ 3 (40), 2012

Основной материал исследования. Для изложения основного материала статьи нам понадобится следующая модель оптимизации плана производства и доставки многономенклатурной продукции, аналогичная той, которая изучалась в [7].

Пусть имеется промышленное предприятие выпускающее продукцию K наименований. Производственные издержки по выпуску единицы продукции $k-$го наименования составляют s_k (включая затраты на закупку, доставку и хранение сырья). Для выпуска продукции используется R видов сырья, полуфабрикатов и других производственных ресурсов, причем на производство единицы продукции $k-$го вида необходимо затратить a_{kr} сырья $r-$го вида, а ресурс вида r имеется в количестве b_r.

Произведенная продукция поступает на склад предприятия, откуда она должна быть доставлена в M пунктов назначения $D_1,\ D_2,\ \ldots, D_M$. Обозначим через $d_{km} > 0$ максимально возможный уровень потребления продукции k-го вида в пункте назначения D_m.

Параметры управления имеют следующий смысл:

x_k – количество готовой продукции $k-$го вида, запланированное для выпуска предприятием;

y_{km} – количество готовой продукции $k-$го вида, которое планируется для доставки в пункт назначения с номером m.

Пусть функция спроса на продукцию $k-$го вида в m-м пункте назначения имеет следующий, часто используемый в микроэкономических исследованиях, вид [1, 3-6]

$$p_{km}(y_{km}) = p_{km} - g_{km} y_{km},\ m = 1,2,\ldots,M;\ k = 1,2,\ldots,K,$$

где p_{km} – максимально возможная цена продукции k – го вида в m-м пункте потребления $(p_{km} > s_k)$; $g_{km} > 0$ – параметр, определяющий эластичность спроса на продукцию k – го вида, проданную в m-й пункт потребления (т.е. показывающий снижение цены при единичном увеличении объема проданной продукции).

Поскольку функция спроса не может быть отрицательной, то должны выполняться условия

$$y_{km} \le p_{km} / g_{km}, m = 1,2,.., M; k = 1,2,..., K.$$

Поэтому естественно принять, что $d_{km} = p_{km} / g_{km}$.

Будем также считать, что доставка готовой продукции в пункты назначения производится за счет ее покупателя. Тогда соответствующая модель, позволяющая найти оптимальный план производства и доставки продукции завода, имеет вид

$$\Pi = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} (p_{km} - g_{km} y_{km}) y_{km} - \sum_{k=1}^{K} s_k x_k \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kr} x_k \le b_r, r = 1,2,.., R; \tag{2}$$

$$y_{km} \le d_{km}, m = 1,2,..., M;, k = 1,2,...K; \tag{3}$$

$$\sum_{m=1}^{M} y_{km} = x_k, k = 1,2,..., K; \tag{4}$$

$$x_k, y_{km} \ge 0, \forall k, m. \tag{5}$$

В модели (1)-(5) критерий оптимальности – максимум прибыли предприятия.

С помощью условий (4) мы можем исключить переменные $x_k, k = 1,2,..., K,$ из модели (1)-(5), после чего придем к следующей более простой модели:

$$\Pi = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} (p_{km} - g_{km} y_{km}) y_{km} - \sum_{k=1}^{K} s_k \sum_{m=1}^{M} y_{km} \to \max \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kr} \sum_{m=1}^{M} y_{km} \le b_r, r = 1,2,.., R; \tag{7}$$

$$0 \le y_{km} \le d_{km}, m = 1,2,..., M;, k = 1,2,...K. \tag{8}$$

Очевидно, что при условиях

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} a_{kr} \sum_{m=1}^{M} \frac{p_{km} - s_k}{g_{km}} \le b_r, r = 1,2,.., R, \tag{9}$$

оптимальным решением задачи (6)-(8) будет

$$y_{km} = \frac{p_{km} - s_k}{2 g_{km}}, k = 1,2,..., K; m = 1,2,..., M.$$

Если же хотя бы одно из условий (9) нарушается, то задача квадратичного программирования (6)-(8) решается с помощью известных алгоритмов оптимизации [8].

Теперь с помощью модели (1)-(5) рассмотрим возможность конкуренции между несколькими предприятиями, производящими из одного и того же набора видов ресурсов одну и ту же номенклатуру продукцию, которая доставляется от заводов в одно и то же множество из M пунктов потребления.

Для иллюстрации возможности такого исследования конкурентной среды для простоты ограничимся анализом дуополии, т.е. будем считать, что на рынке действуют два завода, производящие один и тот же перечень готовой продукции и использующие один и тот же набор видов сырья.

Запишем сначала ограничения для моделей оптимизации применительно к дуополии на основе модели (1)-(5), сохранив все принятые в ней обозначения и добавив в некоторых параметрах и переменных верхний индекс – номер завода:

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kr}^{(j)} x_k^{(j)} \le b_r^{(j)}, \ r = 1,2,\ldots,R;\ j = 1,2; \tag{10}$$

$$y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)} \le d_{km}, m = 1,2,\ldots M; k = 1,2,\ldots K; \tag{11}$$

$$x_k^{(j)} = \sum_{m=1}^{M} y_{km}^{(j)}, j = 1,2; k = 1,2,\ldots,K; \tag{12}$$

$$x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_{km}^{(1)}, y_{km}^{(2)} \ge 0, \forall k, n, m. \tag{13}$$

Как уже отмечалось выше, в микроэкономике при моделировании конкуренции между фирмами используется допущение, что цены на продукцию любой из конкурирующих фирм, производящих одну и ту же номенклатуру продукции, зависят от объема продаваемой продукции всеми фирмами-конкурентами, более точно, убывают, например, по линейному закону с ростом количества поступающей на рынок продукции [1,3-6]. Иными

словами, примем, что функция спроса на продукцию k – го вида в m -м пункте потребления равна

$$p_{km}(y_{km}^{(1)}, y_{km}^{(2)}) = p_{km} - g_{km}(y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)}). \tag{14}$$

Как и ранее, будем считать, что

$$d_{km} = p_{km} / g_{km}, m = 1,2,\ldots,M; k = 1,2,\ldots,K,$$

есть верхняя граница общего спроса на продукцию k – го вида обоих заводов в m -м пункте потребления.

Функции издержек считаем линейными

$$s_k(x) = s_k x + c_k, \tag{15}$$

где s_k и c_k – соответственно постоянные предельные и фиксированные издержки производства продукции k-го вида на любом заводе.

С учетом (14), (15) завод 1 будет получать прибыль (как и раньше, считаем, что затраты по доставке продукции в пункты потребления оплачивает покупатель)

$$\Pi^{(1)} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M} [(p_{km} - g_{km}(y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)}))y_{km}^{(1)} - (s_k x_k^{(1)} + c_k)], \tag{16}$$

которую он хочет максимизировать. Таким образом, необходимо решить задачу максимизации квадратичной функции (16) по переменным $x_k^{(1)}, y_{km}^{(1)}$ при ограничениях (10)-(13).

Аналогично, завод 2 будет стремиться максимизировать по переменным $x_k^{(2)}, y_{km}^{(2)}$ свою прибыль, т.е. функцию

$$\Pi^{(2)} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}[(p_{km} - g_{km}(y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)}))y_{km}^{(2)} - (s_k x_k^{(2)} + c_k)], \qquad (17)$$

при тех же ограничениях.

В силу наличия конкуренции между двумя заводами может существовать некоторая зависимость между переменными $x_k^{(1)}, y_{km}^{(1)}$ и $x_k^{(2)}, y_{km}^{(2)}$. Это обстоятельство следует учитывать при записи необходимых условий экстремума каждой из функций (16) и (17) при ограничениях (10)-(13). В простейшем случае такой зависимостью можно пренебречь и тогда результатом решения задач на условный экстремум функций (16) и (17) будет равновесие по Курно рассматриваемой дуополии.

Исключив переменные $x_k^{(j)}, k = 1,2,...,K,$ с помощью равенств (12), мы придем к следующей паре задач оптимизации

$$\Pi^{(1)} = \max_{\{y_{km}^{(1)}\}} \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} [(p_{km} - g_{km}(y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)}))y_{km}^{(1)} -$$

$$(s_k \sum_{m=1}^{M} y_{km}^{(1)} + c_k)], \qquad (18)$$

$$\Pi^{(2)} = \max_{\{y_{km}^{(2)}\}} \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}[(p_{km} - g_{km}(y_{km}^{(1)} + \qquad (19)$$

$$y_{km}^{(2)}))y_{km}^{(2)} - (s_k \sum_{m=1}^{M} y_{km}^{(2)} + c_k)],$$

$$\sum_{k=1}^{K} a_{kr}^{(j)} \sum_{m=1}^{M} y_{km}^{(j)} \le b_r^{(j)}, r = 1,2,...,R; j = 1,2;$$

$$y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)} \le d_{km}, m = 1,2,...M; k = 1,2,...K; \qquad (20)$$

$$y_{km}^{(1)}, y_{km}^{(2)} \ge 0, \forall k, m.$$

В частности, если выполнены условия

$$\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{K} a_{kr}^{(j)} \sum_{m=1}^{M} \frac{p_{km} - s_k}{g_{km}} \le b_r^{(j)}, r = 1,2,..,R; j = 1,2, \qquad (21)$$

то равновесное в смысле Курно решение дуополии определяется по формулам

$$y_{km}^{(j)} = \frac{p_{km} - s_k}{3g_{km}}, k = 1,2,...,K; m = 1,2,...,M; j = 1,2.$$

При нарушении условий (21) для нахождения равновесного решения пары задач квадратичного программирования (18), (20) и (19), (20) следует применять известные алгоритмы [8] с учетом того, что

$$\frac{\partial y_{km}^{(j)}}{\partial y_{km}^{(l)}} = 0, j \ne l; j, l = 1,2$$

(условия Курно для предположительных вариаций).

Более сложный анализ конкуренции предполагает наличие реакции конкурента при определении оптимального плана выпуска и доставки продукции. Например, в рамках предложенного подхода можно определить равновесное в смысле Стэкельберга решение, когда один или оба завода считают, что конкурент будет вести себя как дуополист Курно.

Продемонстрируем это для простейшего случая, когда выполняются условия

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} a_{kr}^{(1)} \sum_{m=1}^{M} \frac{p_{km} - s_k}{g_{km}} \le b_r^{(1)},$$

$$\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{K} a_{kr}^{(2)} \sum_{m=1}^{M} \frac{p_{km}-s_k}{g_{km}} \le b_r^{(2)}, r=1,2,..,R; \qquad (22)$$

Предположим, что завод 1 полагает, что завод 2 будет реагировать соответственно прямой реакции Курно, т.е.

$$y_{km}^{(2)} = \frac{p_{km}-s_k-g_{km}y_{km}^{(1)}}{2g_{km}}. \qquad (23)$$

Тогда предположительная вариация

$$\frac{\partial y_{km}^{(2)}}{\partial y_{km}^{(1)}} = -\frac{1}{2}.$$

С учетом этого имеем

$$\frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y_{km}^{(1)}} = p_{km} - g_{km}(y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)}) - g_{km}y_{km}^{(1)} - s_k + \frac{1}{2}g_{km}y_{km}^{(1)} = 0,$$

и, следовательно, уравнение прямой реакции завода 1 будет таким:

$$y_{km}^{(1)} = 2\frac{p_{km}-s_k-g_{km}y_{km}^{(2)}}{3g_{km}}.$$

Таким образом, результаты для обоих заводов будут зависеть от поведения завода 2. Если завод 1 предполагает, что завод 2 использует реакцию Курно (23), то решением дуополии будет равновесие Стэкельберга для завода 1

$$y_{km}^{(1)} = \frac{p_{km}-s_k}{2g_{km}},\ y_{km}^{(2)} = \frac{p_{km}-s_k}{4g_{km}}. \qquad (24)$$

В силу (22) эти решения удовлетворяют ограничениям (20). Для решения (24) завод 1 получит большую прибыль, а завод 2 – меньшую, чем при равновесии Курно.

К другим возможным решениям дуополии относится соглашение двух предприятий о максимизации их общей прибыли, т.е. функции

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}[(p_{km} - g_{km}(y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)}))y_{km}^{(1)} - (s_k^{(1)}\sum_{m=1}^{M} y_{km}^{(1)} + c_k^{(1)})] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}[p_{km} - g_{km}(y_{km}^{(1)} + y_{km}^{(2)}))y_{km}^{(2)} - (s_k^{(2)}\sum_{m=1}^{M} y_{km}^{(2)} + c_k^{(2)})],$$

при условиях (20). Здесь требуется решить одну задачу квадратичного программирования.

Рассмотренные модели очевидным образом обобщаются на случай любого конечного числа конкурирующих предприятий. Однако, как было показано выше, анализ такой модели олигополии сталкивается со значительными вычислительными трудностями. Их можно также использовать для анализа конкуренции между двумя видами транспорта, перевозящего готовую продукцию от одного или нескольких заводов к местам ее потребления.

Выводы. Модели оптимизации материальных потоков в интегрированных логистических системах, построенные с помощью статических моделей многоиндексных задач нелинейного программирования транспортного типа, в принципе могут служить теоретической основой для определения оптимального поведения предприятий в конкурентной среде типа олигополии. Однако для целей стратегического планирования более подходят динамические модели оптимизации, например, такого типа, как модель, изучавшаяся в работе [9] и основанная на методах теории управления запасами. Такого рода модели позволяют моделировать одновременно олигополию и олигопсонию. Этой проблеме будут посвящены дальнейшие публикации автора.

Автор выражает признательность проф. М.Я. Постану и доц. А.М. Холоденко за постановку задачи и плодотворные дискуссии.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор: пер. с англ. – М.: Мысль, 1975. – 606 с.*
2. *Смехов А.А. Маркетинговые модели транспортного рынка / А.А. Смехов. − М.: Транспорт, 1998. – 120 с.*
3. *Холоденко А.М. Моделювання цінової конкуренції транспортних підприємств у логістичній системі / А.М. Холоденко // Економіка транспортного процесу: Зб. наук праць. − Харків: ХНАДУ, 2002. −Вип.5. − С. 37-41.*
4. *Холоденко А.М. Конкуренція та інтеграція логістичних ланцюжків в умовах інформаційної асиметрії / А.М. Холоденко, В.М. Кобець // Методи та засоби управління розвитком транспортних систем: Зб. наук. праць. − Одеса: ОНМУ, 2004. − Вип.8. − С. 32-56.*
5. *Кобець В.М. Економіко-математичне моделювання виробничо-транспортних систем в умовах інформаційної симетрії та асиметрії: дис.…канд. екон. наук / В.М. Кобець. − Одеса, 2008. − 218 с.*

6. *Мельников С.В. Економіко-математичне моделювання діяльності транспортного підприємства у ринковому середовищі: дис.… канд. екон. наук / С.В. Мельников. − Одеса, 2010. − 179 с.*
7. *Малиновский Д.А. Модель оптимального планирования производства и доставки продукции предприятия по распределительным каналам / Д.А. Малиновский, М.Я. Постан // Методи та засоби управління розвитком транспортних систем: Зб. наук. праць. − Одеса: ОНМУ, 2009. − Вип.15. − С. 19-28.*
8. *Ермольев Ю.М. Математические методы исследования операций: Учебное пособие / Ю.М. Ермольев, И.И. Ляшко, В.С. Михалевич, В.И. Тюптя. − К.: Вища школа, 1979. − 312 с.*
9. *Малиновский Д.А. Динамическая модель оптимального планирования закупки сырья, выпуска продукции и ее доставки / Д.А. Малиновский // Розвиток методів управління та господарювання на транспорті: Зб. наук. праць. – Одеса: ОНМУ, 2011. – Вип. 33. – С. 208-215.*

Стаття надійшла до редакції 18.09.2012

Рецензент – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри «Менеджмент і маркетинг на морському транспорті» Одеського національного морського університету **М.Я. Постан**.

Рецензент – доктор економічних наук, професор, заступник директора з наукової роботи, завідувач відділу ринку транспортних послуг Інституту проблем ринку та економіко-екологічних досліджень НАН України **О.М. Котлубай.**