

УДК 519.7: 330.4

Ж.-Л. Денебург, А. де Пальма, Д. Кан /  
перевод С.В. Мельникова, М.Я. Поста́на

#### ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ МЕЖДУ ВИДАМИ ТРАНСПОРТА

Работа Ж.-Л. Денебурга (J.L. Deneubourg), А. де Пальма (A. de Palma) и Д. Кана (D. Kahn), перевод которой представлен ниже, посвящена построению и анализу динамических моделей конкуренции между двумя видами транспорта с позиций теории бифуркации<sup>1</sup>.

В статье, на основе бифуркационного анализа сравнительно простых моделей, показана фундаментальная роль влияния флуктуаций поведения потребителей на устойчивость конкуренции двух видов транспорта. Построены две динамические модели конкуренции. В первой модели потребители выбирают вид транспорта на основе его скорости: предпочтительность возрастает вместе со скоростью. Во второй модели выбор вида транспорта зависит от влияния рекламы и массового подражания: чем больше людей выбирают какой-то вид транспорта, тем более популярным он становится. Показано, что существуют такие значения провозной способности (бифуркационный параметр), при которых возникает качественно новое состояние в системе. Полученные результаты иллюстрируют концепцию возникновения порядка из хаоса<sup>2</sup>.

Перевод и публикация статьи выполнены с любезного согласия проф. Ж.-Л. Денебурга.

© Ж.-Л. Денебург, А. де Пальма, Д. Кан / Пер. С.В. Мельникова, М.Я. Поста́на, 2015

<sup>1</sup> Оригинальная статья: Deneubourg, J.L., de Palma, A., Kahn, D. Dynamic Models of Competition Between Transportation Modes // Environment and Planning. 1979. – 2. – P. 665-673. Перевод статьи выполнен к.е.н., доцентом кафедры «Экономическая теория и кибернетика» ОНМУ С.В. Мельниковым, под редакцией заведующего кафедрой «Менеджмент и маркетинг на морском транспорте» ОНМУ, д.е.н., профессора М.Я. Поста́на.

<sup>2</sup> Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. – М.: Прогресс, 1986.

*В работе представлена методология подхода к изучению проблемы выбора вида транспорта. Задача исследуется в динамике, что позволяет показать роль, которую играют флуктуации поведения потребителей при выборе вида транспорта. Методология включает детерминированный аспект, выражающийся в эволюции во времени числа потребителей вида транспорта, который основывается на неких предположениях о предпочтительности каждого вида, зависящих от флуктуаций человеческого поведения. Таким образом, задача заключается в поиске решений детерминированных уравнений, описывающих систему, и исследовании эволюционного пути развития этой системы. Для иллюстрации методологии и обоснования динамического подхода нами построены две модели конкуренции между двумя видами транспорта.*

**Ключевые слова:** виды транспорта, динамические модели конкуренции, бифуркация, порядок из хаоса.

*У роботі представлена методологія підходу до аналізу проблеми вибору виду транспорту. Задача досліджується в динаміці, що дозволяє показати роль, яку відіграють флуктуації поведінки споживачів при виборі виду транспорту. Методологія включає детермінований аспект, який виражається в еволюції у часі числа споживачів виду транспорту та ґрунтується на деяких припущеннях щодо переваг кожного виду, що залежать від флуктуацій людської поведінки. Таким чином, задача полягає в пошуку рішень детермінованих рівнянь, що описують систему, і дослідженні еволюційного шляху розвитку цієї системи. Для ілюстрації методології та обґрунтування динамічного підходу нами побудовані дві моделі конкуренції між двома видами транспорту.*

**Ключові слова:** види транспорту, динамічні моделі конкуренції, біфуркація, порядок із хаосу.

*We present a methodology to study the choice of transportation mode. It is dynamic and allows inherent fluctuations in individual behavior to play a role. The methodology has a*

*deterministic aspect which yields the time evolution of the number of users for a transportation mode and it is based on certain assumptions about the attractivities of each mode, but it is always subject to fluctuations in human behavior. The problem then is to find the solutions of the deterministic equations describing the system and to examine the evolutionary path the system will take. Two models of competition between transportation mode choice are developed to illustrate the methodology and to justify the dynamic approach to travel choice.*

**Keywords:** *transportation modes, dynamic models of competition, bifurcation, order through fluctuations.*

**Постановка проблеми.** В работе представлены модели выбора потребителем между разными видами транспорта. Мы не стремимся построить модель выбора вида транспорта, которая отражала бы актуальные и сложные решения таких выборов различными группами потребителей. Наша цель заключается в разработке методологии, учитывающей динамику и позволяющую показать роль, которую играют вариации поведения потребителей (довольно часто это имеет фундаментальное значение), в формировании эволюции системы при разных методах выбора вида транспорта.

**Основной материал исследования.** В работе рассматривается ситуация выбора между двумя видами транспорта. Пусть  $x$  и  $y$  – число потребителей, выбравших соответственно 1-й и 2-й вид транспорта. Пусть  $A_1$  и  $A_2$  – показатели предпочтительности видов транспорта. Пусть  $D$  – ожидаемое число потребителей, которые желают попасть из пункта А в пункт В, и, в первом приближении, примем что  $D$  – константа (хотя на самом деле  $D$  определяется инфраструктурой). В стационарном состоянии системы получим

$$\frac{x_s}{D} = \frac{A_1}{A_1 + A_2} = P_1 \quad \text{и} \quad \frac{y_s}{D} = \frac{A_2}{A_1 + A_2} = P_2. \quad (1)$$

В общем случае  $A_1$  и  $A_2$  являются функциями  $x$  и  $y$ . Система (1) может иметь более одного решения. Для поиска решения системы требуется некоторая дополнительная информация. Фактически мы должны иметь информацию о динамике эволюции системы чтобы объединить разные исторические события, которые определяют окончательное решение системы. В общем случае, поведение системы зависит от начальных условий ( $x_0$  и  $y_0$ ), а также от внутренних и внешних факторов, влияющих на ее историю. В этом случае только плотности  $x$  и  $y$  будут подвержены колебаниям.

#### *Вывод уравнений динамики*

На основе предположения, часто используемого в экологии, запишем закон эволюции переменной  $z$ ,

$$z = x + y, \quad (2)$$

в виде

$$\dot{z} = D - z, \quad (3)$$

где  $\dot{z} = dz/dt$  ( $t$  обозначает время). В уравнении (3) параметр  $D$  – константа, которую обычно называют «провозная способность». Величина провозной способности определяется конечным состоянием системы.

Для переменных  $x$  и  $y$  мы предположим справедливость такого же вида уравнений эволюции

$$\dot{x} = D_1 - x \quad \text{и} \quad \dot{y} = D_2 - y, \quad (4)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – пока неизвестные функции, которые должны быть найдены. Так как уравнение (2) выполняется для любого  $t$ , то

$$D_1 + D_2 = D. \quad (5)$$

Уравнения эволюции переменных  $x$  и  $y$  в уравнении (1) примут следующий вид:

$$\dot{x} = \frac{D \cdot A_1}{A_1 + A_2} - x \quad \text{и} \quad \dot{y} = \frac{D \cdot A_2}{A_1 + A_2} - y. \quad (6)$$

Отметим, что провозные способности в уравнениях эволюции для переменных  $x$  и  $y$  являются функциями времени.

Для иллюстрации поведения уравнений (6) построим график изменения переменных  $x$  и  $y$  для случая, когда  $P_1 = P_1(x, y)$  известно (рис.1). В общем случае  $P_1 = P_1(x, y)$  неизвестно. Из рис. 1 видно, что  $z$  асимптотически стремится к  $D$ , что можно проверить интегрированием уравнения (3) по времени. Кривая  $DP_1(t)$  известна, а кривая  $DP_2(t)$  получена на основании того, что  $P_1 + P_2 = 1$ . На рис. 1 также представлены кривые  $x(t)$  и  $y(t)$ , которые могут быть получены численным интегрированием уравнения (6). Очевидно, что траектории  $x(t)$  и  $y(t)$  асимптотически стремятся соответственно к  $DP_1(t)$  и  $DP_2(t)$ , и для всех  $t$  выполняется  $x + y = z$ .

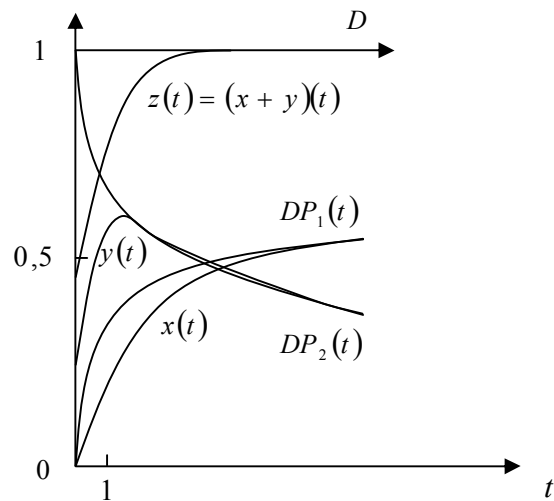


Рис. 1. Эволюция  $x$  и  $y$  во времени

Отметим, что когда  $P_1$  и  $P_2$  заданы, например, как в уравнении (1), то в общем виде нельзя найти аналитическое решение  $x(t)$  и  $y(t)$  уравнений (6). Тем не менее, мы можем с помощью математического анализа получить информацию об эволюции этой системы. Для наших целей мы можем использовать бифуркационный анализ, который позволит получить информацию о возможных предельных решениях системы и свойствах устойчивости при флуктуациях плотностей  $x$  и  $y$ .

### Теоретические модели

Представленные модели не претендуют на получение всех возможных решений по выбору видов транспорта. Здесь мы рассмотрим только простые модели, которые могут быть проанализированы аналитически. В этом случае появляется возможность показать некоторые интересные свойства, которые возникают, когда  $P_1$  и  $P_2$  являются функциями состояния системы [см. уравнение (1)].

#### 1. Первая модель

Для построения модели зададим в явном виде функции  $A_1$  и  $A_2$ . Предположим, что  $A_1$  и  $A_2$  соответствуют (пропорциональны) скоростям транспорта. Примем

$$A_1 = v_1^p \text{ и } A_2 = v_2^q, \quad (7)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – скорости 1-го и 2-го видов транспорта,  $p$  и  $q$  – положительные показатели степени.

Предположим, например, что транспорт 1-го вида – автомобиль, а транспорт 2-го вида – автобус. Также примем, что между видами транспорта отсутствует взаимодействие (несложно, однако, избавиться от этого ограничения).

На рис. 2 (а) представлена зависимость скорости автомобилей от их плотности (эффект затора – см. Haight, 1963). Зависимость между скоростью и плотностью автобусов мы приняли

исходя из того, что предложение приспособляется к спросу; чем больше людей выбирают автобус, тем больше автобусов предлагается, что в конечном итоге сокращает общее время перевозки (ожидание и проезд). Эта зависимость представлена на рис. 2 (b).

Для описания кривых на рис. 2 (a) и 2 (b) можно использовать следующие аналитические выражения:

$$v_1 = \frac{1}{a + bx} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{dy^n}{c + y^r s}, \quad (8)$$

где  $a, b, c, d, s, n$  и  $r$  – положительные константы,  $n \leq r$ .

Например, если принять для скорости транспорта 1-го вида (автомобиль) и транспорта 2-го вида (автобус)

$$v_1 = \frac{1}{a + x} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{dy}{c + y}, \quad (9)$$

и для показателей степени в уравнениях (7)

$$p = q = 1, \quad (10)$$

то уравнения эволюции во времени транспорта 1-го вида и 2-го вида из уравнения (6) станут следующими:

$$\dot{x} = \frac{D}{a + x} \left/ \left( \frac{1}{a + x} + \frac{dy}{c + y} \right) \right. - x$$

и

$$\dot{y} = \frac{Ddy}{c + y} \left/ \left( \frac{1}{a + x} + \frac{dy}{c + y} \right) \right. - y. \quad (11)$$

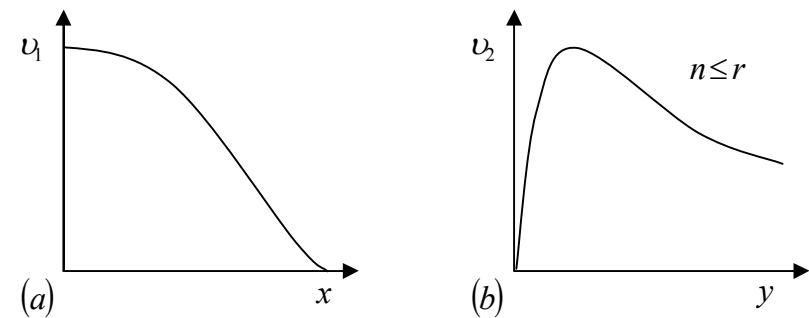


Рис. 2. Зависимость скорости автомобилей (a) и автобусов (b) от их плотности

Нетрудно доказать, что предельные (стационарные) состояния системы ( $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ ) характеризуются условием

$$x_s + y_s = D. \quad (12)$$

Используя это соотношение для поиска стационарных состояний, мы видим из (11), что состояние системы ( $x = D, y = 0$ ) является стационарным. Поэтому можно записать уравнения для других стационарных состояний в следующем виде:

$$dx^2 + (1 + da)x - (c + D) = 0. \quad (13)$$

В этом случае система (11) имеет три стационарных решения:

$$x' = D, \quad y' = 0; \quad (14)$$

$$x^+ = \frac{-(da + 1) + [(da + 1)^2 + 4(c + D)d]^{1/2}}{2d}; \quad (15)$$

$$x^- < 0. \quad (16)$$

Решение  $(x^-, y^-)$  не подходит по физическому смыслу задачи, так как  $x$  должно быть больше нуля (или равно нулю). Решение  $(x^+, y^+)$  подходит при условии [см. уравнение (12)]

$$D \geq x^+. \quad (17)$$

Это условие можно представить в следующем виде:

$$D \geq \frac{1}{2} \left[ -a + \left( a^2 + \frac{4c}{d} \right)^{1/2} \right]. \quad (18)$$

Решения (14) и (15) представлены на рис. 3.

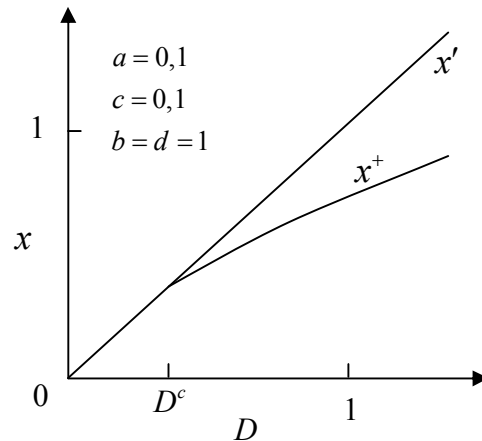


Рис. 3. Решения  $x'$  и  $x^+$  уравнений (14) и (15)

Таким образом, видим, что при достаточно большой провозной способности  $D$  система может иметь другое решение, чем  $x' = D, y' = 0$  (только автомобили). Фактически, в этом примере система может подрастереть нам – какое будет решение, даже если мы не знаем предысторию процесса. Система примет решение только если она достаточно устойчива к флуктуациям плотностей  $x$  и  $y$ . Рассмотренные зависимости описывают только усредненное поведение плотностей; колебания около этого среднего поведения неизбежны. В нашем примере найденное равновесие показывает, что решение  $(x', y')$  становится неустойчивым, если  $D$  становится достаточно большим (из-за флук-

туаций или по другим причинам). Все колебания  $(\delta x, \delta y)$  около стационарного состояния начинают происходить со временем в соответствии с функцией  $\exp(ut)$ . Устойчивость стационарного состояния будет зависеть от знака  $u$ . При  $u > 0$  система неустойчива, при  $u < 0$  система устойчива к колебаниям.

Решение  $(x', y')$  становится неустойчивым при

$$D \geq \frac{1}{2} \left[ -a + \left( a^2 + \frac{4c}{d} \right)^{1/2} \right] = D^c. \quad (19)$$

Отметим, что это условие идентично условию существования решения  $x^+$ .

На рис. 4 представлены бифуркационные диаграммы финальных состояний системы и их устойчивости в зависимости от параметра  $D$ . На рис. 4(b) видим, что при  $D < D^c$  пропускная способность недостаточно велика для появления автобусов: в стационарном состоянии используются только автомобили ( $x' = D, y' = 0$ ). Тем не менее, при высоких плотностях  $D > D^c$  доля людей, выбравших автобус,  $y/D$ , возрастает.

Отметим, что внутренние колебания около стационарного состояния  $(x_s, y_s)$  таковы, что

$$\delta x \ll x_s \quad \text{и} \quad \delta y \ll y_s. \quad (20)$$

При  $y_s = 0$  колебания должны быть учтены как внешний фактор (соответствующий новому виду транспорта). Развиваемая здесь теория дает нам условия, при которых система становится неустойчивой при появлении нового вида транспорта. Условие, при котором появляется новый вид транспорта в системе ( $D > D^c$ ) очевидно зависит от характеристик уже существующего вида транспорта (параметр  $a$ ) и характеристик нового вида (параметры  $c$  и  $d$ ) [см. уравнения (9) и (19)]. Таким образом, в этом примере показана фундаментальная роль бифуркаций.

На рис. 5 представлена еволюція скоростей кожного вида транспорта и средняя скорость в системе как функция провозной способности  $D$  (расчеты сделаны для стационарного состояния системы).

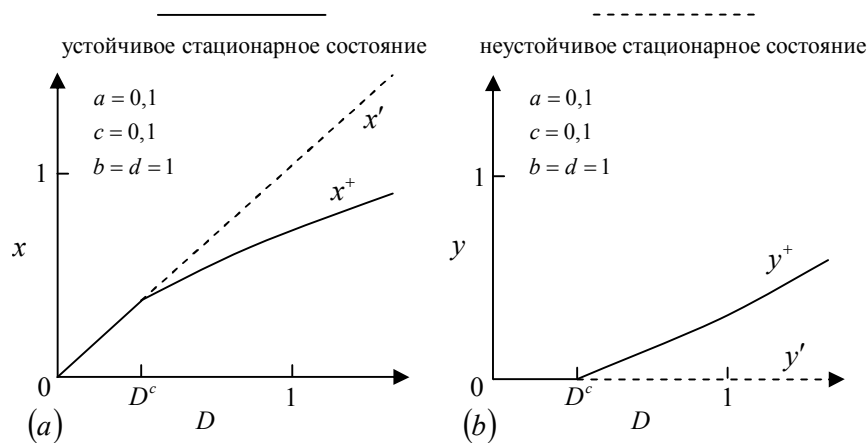


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы  $x$  (а) и  $y$  (б)

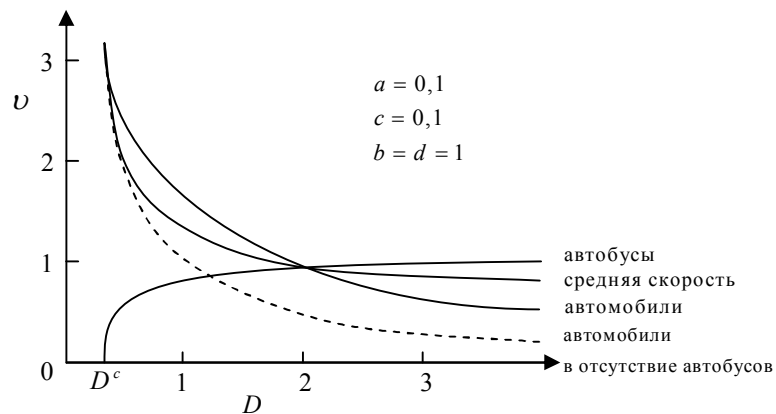


Рис. 5. Средние скорости автомобилей и автобусов в системе как функции провозной способности  $D$

## 2. Вторая модель

В первой модели мы рассмотрели классический эффект для функций предпочтительности: с ростом скорости предпочтительность вида транспорта возрастает. Однако есть и другие факторы, например, психологические, которые также влияют на выбор вида транспорта. Например, реклама и более подробная информация о конкретном виде транспорта могут влиять на выбор. Так же подражание потребителям, которые выбрали конкретный вид транспорта, может частично объяснять сложившуюся практику. Мы покажем в этом разделе, что эти эффекты могут значительно увеличивать сложность поведения системы.

Введем в функции предпочтительности психологические факторы  $F_i$

$$A_1 = v_1^p \cdot F_1 \quad \text{и} \quad A_2 = v_2^q \cdot F_2. \quad (21)$$

Для функций  $F_i$  используем простые формы зависимостей

$$F_1 = \theta_1 + \alpha_1 \cdot x \quad \text{и} \quad F_2 = \theta_2 + \alpha_2 \cdot y, \quad (22)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – влияние рекламы,  $\alpha_1 \cdot x$  и  $\alpha_2 \cdot y$  – влияние популярности. Для скоростей используем те же формулы [уравнение (8)] и, чтобы не усложнять задачу, упростим их

$$v_1 = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad v_2 = y. \quad (23)$$

Также примем, что в уравнениях (21)

$$p = q = 1. \quad (24)$$

При данных условиях уравнения (6) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= D \left( \frac{\theta_1}{x} + \alpha_1 \right) / \left( \frac{\theta_1}{x} + \alpha_1 + \theta_2 y + \alpha_2 y^2 \right) - x \\ \dot{y} &= D (\theta_2 y + \alpha_2 y^2) / \left( \frac{\theta_1}{x} + \alpha_1 + \theta_2 y + \alpha_2 y^2 \right) - y \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Отметим, что все параметры должны быть положительными (хотя, теоретически возможно и отрицательное влияние рекламы). На рис. 6 представлены предпочтительности двух видов транспорта как функции  $x$  и  $y$ .

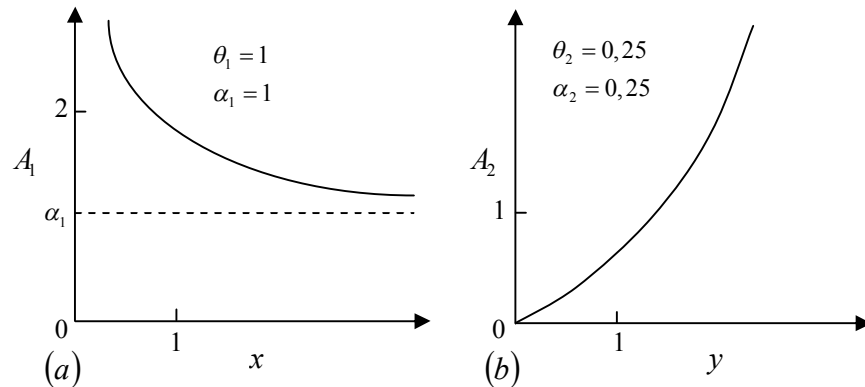


Рис. 6. Функции предпочтительности  $A_1$  и  $A_2$

Вначале мы рассмотрим случай, когда  $\theta_1 = 0$  (автомобили не рекламируются). Как видно из уравнений (21), (22), (23) и (24), в этом случае предпочтительность автомобилей является константой,  $A_1 = \alpha_1$ .

Используя уравнение (12) и учитывая стационарное состояние ( $x' = D, y' = 0$ ), мы находим еще одно стационарное состояние системы (25) из

$$\alpha_2 y^2 + (\theta_2 - \alpha_2 D)y + (\alpha_1 - D\theta_2) = 0. \quad (26)$$

Это уравнение может иметь одно, два или вообще не иметь физически возможных решений со следующими свойствами.

1. Если реклама автобусов достаточно велика,  $\theta_2 > (4\alpha_1\alpha_2)^{1/2}$ , то уравнение (26) будет иметь два действительных корня. Для  $\theta_2 < (4\alpha_1\alpha_2)^{1/2}$ , уравнение (26) будет иметь два

действительных корня только если пропускная способность достаточно высока,  $D > D^c$ , где

$$D^c = \frac{(4\alpha_1\alpha_2)^{1/2} - \theta_2}{\alpha_2}. \quad (27)$$

2. Если уравнение (26) имеет два действительных решения,  $y^+$  и  $y^-$ , тогда знак этих корней будет зависеть от соотношения между пропускной способностью и показателями  $D_1^c$  и  $D_2^c$

$$D_1^c = \frac{\theta_2}{\alpha_2} \quad \text{и} \quad D_2^c = \frac{\alpha_1}{\theta_2}. \quad (28)$$

Если  $D < D_1^c$  и  $D < D_2^c$ , то уравнение (26) имеет два отрицательных корня;

$D_1^c < D < D_2^c$ , уравнение (26) имеет два положительных корня;

$D > D_2^c$ , уравнение (26) имеет один положительный корень и один отрицательный корень.

3. Соотношение  $D^c < D_2^c$  выполняется при любых значениях параметров.

4. При больших значениях рекламы автобусов,  $\theta_2 > (4\alpha_1\alpha_2)^{1/2}$ , получим

$$D^c < D_1^c \quad \text{и} \quad D_1^c > D_2^c. \quad (29)$$

Для малых значений рекламы автобусов,  $\theta_2 < (4\alpha_1\alpha_2)^{1/2}$ , получим

$$D_1^c < D_2^c \quad \text{и} \quad D^c > D_1^c. \quad (30)$$

Рис. 7 подытоживает все свойства, показывая условия существования решений уравнения (26).

В результате получены две качественно разные бифуркационные диаграммы для решений  $y$  уравнения (26). Они показаны на рис. 8.

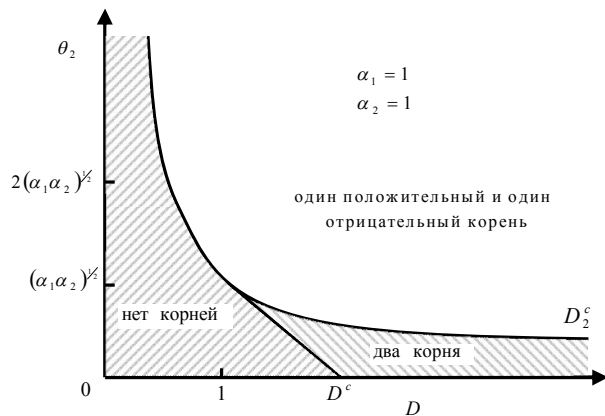


Рис. 7. Условия существования решений уравнения (26)

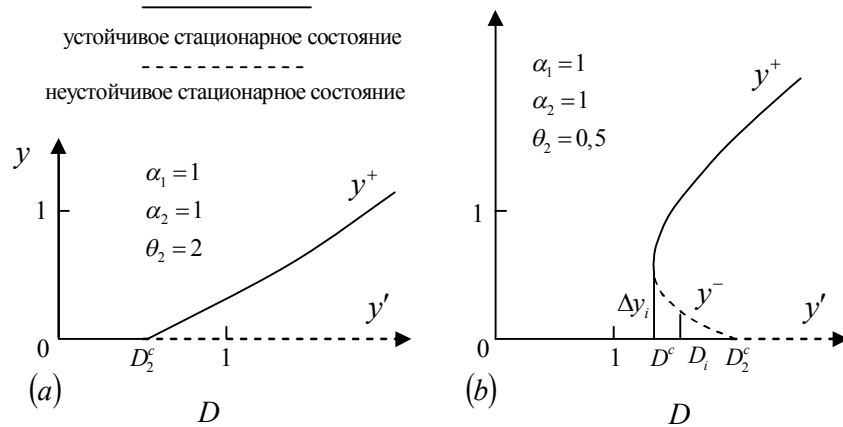


Рис. 8. Бифуркационные диаграммы для  $\theta_2 > (\alpha_1, \alpha_2)^{1/2}$  (a)  
и  $\theta_2 < (\alpha_1, \alpha_2)^{1/2}$  (b)

Рис. 8 (а) похож на рис. 4 (b) и не будет в дальнейшем обсуждаться.

На рис. 8 (b), где  $\theta_1 < (\alpha_1, \alpha_2)^{1/2}$ , представлена качественно новая ситуация. В этом случае мы хотим сказать, что нелиней-

ное условие более важно, чем линейное. Для провозной способности  $D^c < D < D_2^c$  система может достичь двух стационарных состояний,  $y^-$  и  $y^+$ . (Стационарное состояние  $y^-$  неустойчиво и поэтому не может быть рассмотрено как финальное состояние системы, так как колебания всегда будут выводить систему из этого состояния).

Предположим, что колебание плотности  $y$ , равное  $\Delta y_i$ , (при данном значении  $D_i$ ) переводит систему из стационарного состояния  $(x', y')$  в стационарное состояние  $(x^+, y^+)$ .

На рис. 8 (b) мы видим, что значения колебаний  $\Delta y_i$  для  $D^c < D < D_2^c$  уменьшается с ростом  $D_i$ . Это указывает на роль предыстории при формировании стационарного состояния. Более того, при  $D_i > D_2^c$ , независимо от колебаний ( $\Delta y > 0$ ), система всегда будет стремиться в стационарное состояние  $(x^+, y^+)$ , так как состояние  $(x', y')$  неустойчиво при  $D_i > D_2^c$ . Отметим, что бифуркационный параметр  $D$  измеряет эффект обратной связи в системе. Когда параметр обратной связи достаточно мал,  $D < D^c$ , система имеет только одно стационарное состояние. Однако при достаточно большом  $D > D^c$  возникает качественно новое состояние в системе. Таким образом, с ростом  $D$  число возможных стационарных состояний увеличивается.

На рис. 9 показано, при каких условиях может возникнуть одновременное использование двух видов транспорта. Для констант  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  состояние сосуществования между автобусами и автомобилями возникнет в начале (для малых значений  $D$ ) в случае, когда есть хорошая реклама  $\theta_2 > (\alpha_1, \alpha_2)^{1/2}$  и гораздо позже при малой рекламе автобусов,  $\theta_2 < (\alpha_1, \alpha_2)^{1/2}$ , что требует больших значений провозной способности  $D$ .



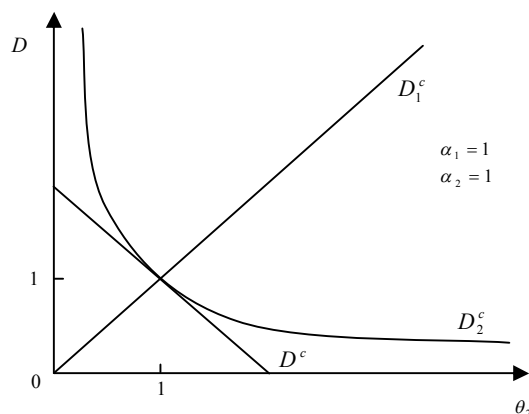


Рис. 9. Взаимодействие провозная способность-реклама

**Выводы.** Представленные в этой работе методология и модели, иллюстрируют важность поведенческих флуктуаций в определении устойчивости в конкуренции двух видов транспорта. Рассмотренные бифуркационные диаграммы иллюстрируют эффекты обратной связи в случае, когда выбор вида транспорта является функцией состояния системы, и показывают влияние колебаний человеческого поведения на устойчивость системы. Некоторые стационарные состояния являются неустойчивыми даже при малых флуктуациях, в то время как другие, хотя и локально устойчивые, становятся неустойчивым при достаточно больших флуктуациях. Затем система принимает новое решение, которой адаптировано возмущениям.

Этот процесс является одним из примеров концепции порядка из хаоса (Nicholas and Prigogine, 1977), в соответствии с которой система реорганизуется в новом режиме работы при превышении критических параметров устойчивости.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Transportation System Center, Department of Transportation, Cambridge, Mass (DOT-TSC-1185), the Commission des Communautés Européennes (DG XII-B-4), the Instituts Internationaux de Physique et Chimie founded by E Solvay, and Minna-James-Heineman Stiftung.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Литература

1. Deneubourg, J.L., de Palma, A., Kahn, D. *Dynamic Models of Competition Between Transportation Modes // Environment and Planning.* – 1979. – 2. – P. 665-673.
2. Haight F.A. *Mathematical Theories of Traffic Flow (Academic Press, New York)* (русский перевод: Хейт Ф. *Математическая теория транспортных потоков.* – М.: Мир, 1966.
3. Nicholas G., Prigogine I. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems (John Wiley, New York)* (русский перевод: Г. Николис, И. Пригожин *Самоорганизация в неравновесных системах.* – М.: Мир, 1979.

## REFERENCES

1. Deneubourg J.L., de Palma A., Kahn D. *Dynamic Models of Competition Between Transportation Modes // Environment and Planning.* – 1979. – 2. – P. 665-673.
2. Haight F.A. *Mathematical Theories of Traffic Flow (Academic Press, New York)* (русский перевод: Хейт Ф. *Математическая теория транспортных потоков.* – М.: Мир, 1966.
3. Nicholas G., Prigogine I. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems (John Wiley, New York)* (русский перевод: Г. Николис, И. Пригожин. *Самоорганизация в неравновесных системах.* – М.: Мир, 1979.

Стаття надійшла до редакції 09.09.2015