УДК 539.3 + 681.3.06

ВИЗНАЧАЛЬНІ РІВНЯННЯ МОДЕЛІ ЗГИНУ КОМПОЗИТНИХ БРУСІВ З ОБМЕЖЕНИМИ УМОВАМИ ДЕФОРМУВАННЯ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ ИЗГИБА КОМПОЗИТНЫХ БРУСЬЕВ С ОГРАНИЧЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

DEFINING EQUATIONS OF THE MODEL OF BENDING COMPOSITE BEAMS WITH LIMITED CONDITIONS OF DEFORMATION

Горик О.В., д.т.н., проф., Ковальчук С.Б., асист. (Полтавська державна аграрна академія, м. Полтава)

Горик А.В., д.т.н., проф., Ковальчук С.Б., асист. (Полтавская государственная аграрная академия, г. Полтава)

Goryk A.V., doctor of technical sciences, professor, Kovalchuk, S.B., assistant (Poltava state agrarian academy, Poltava)

На основі раніше отриманого розв’язку варіаційної задачі виведені визначальні диференціальні рівняння зсувної моделі згину композитних брусів, які дозволяють враховувати додаткові обмеження, накладені на переміщення точок поверхні бруса

На основе ранее полученного решения вариационной задачи выведены определяющие дифференциальные уравнения сдвиговой модели изгиба композитных брусьев, которые позволяют учитывать дополнительные ограничения, наложенные на перемещения точек поверхности бруса

On the basis of previously obtained solutions of the variational problem were obtained defining differential equations model bending composite beams, that allow for the constraints imposed on the displacements the beam surface point

Ключові слова:
Композит, брус, згин, функціонал, екстремум, умови
Композит, брус, изгиб, функционал, экстремум, условия
Composite, bar, bending, functional, extremum, condition

Вступ. Бруси, що працюють на згин, складають значну частину конструктивних елементів інженерних споруд різного призначення. Опорні вузли значної частини згинальних елементів у конструкціях розташовані поблизу, або безпосередньо на їхніх кінцях. Такі бруси загалом вільно деформуються під дією зовнішнього навантаження, за виключенням лише їх крайніх перерізів. Але на практиці зустрічаються і такі згинальні елементи, деформування яких додатково обмежується певними чинниками, що діють на частину бруса, розташовану між крайніми закріпленнями. У якості таких чинників можна вказати додаткові опорні вузли різних типів та контактну взаємодію з іншими елементами конструкції, чи пружним середовищем. Такі бруси перебувають у обмежених умовах деформування.

Теорія розрахунку однорідних брусів, що згинаються у обмежених умовах деформування розвинута на високому рівні і представлена відомими розв'язками окремих задач, наприклад, нерозрізні балки, балки на пружних опорах, пружній основі тощо. Стосовно дискретно-неоднорідних брусів розв'язки подібних задач практично відсутні у наукових публікаціях. Такий стан розвитку теорії деформування композитних брусів значно сповільнює впровадження новітніх композиційних матеріалів у практику застосування таких конструктивних елементів.

Аналіз існуючих досліджень. Окремим напрямом теоретичного дослідження механіки деформування композитів є ітераційне моделювання, вихідні положення якого сформульовані С.О. Амбарцумяном. Аналітична теорія у механіці шаруватих композитних систем, що за останні десятиріччя набула значного розвитку стосовно задач деформування пластин та оболонок, висвітлена у [1]. Щодо механіки деформування неоднорідних композитних брусів, можна відмітити ітераційну зсувну модель, описану у [2]. Питання розрахунку таких брусів в обмежених умовах деформування практично не висвітлені у наукових джерелах. Можна відмітити лише роботи [3,4] у яких представлені розв'язки окремих задач. Загальний підхід до моделювання задач згину композитних брусів у обмежених умовах деформування окреслений у [5].

Мета та завдання досліджень. На основі необхідних умов екстремуму функціонала повної енергії композитного бруса із обмеженими умовами деформування отримати визначальні рівняння зсувної моделі згину композитних брусів, у яких можливе врахування наявних додаткових умов, накладених на вертикальні переміщення точок поверхні бруса.

Результати досліджень. Відповідно до ітераційної зсувної моделі згину композитних брусів [2], повна енергія таких елементів є функціоналом, що залежить від функцій χ_i та їх похідних до другого порядку включно

$$W = \int_{x_0}^{x_1} J\left(x, \chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_m, \chi_0^{(1)}, \chi_1^{(1)}, \ldots, \chi_m^{(1)}, \chi_0^{(2)}, \chi_1^{(2)}, \ldots, \chi_m^{(2)}\right) dx, \qquad (1)$$

де $\chi_i = \chi_i(x)$ – шукані функції моделі; m – крок наближення моделі; $f^{(1)} = d/dx\, f$.

У [5] отримані необхідні умови екстремуму функціонала (1) за наявних умов, накладених на шукані функції, що подані системою виразів

$$\vartheta_j\left(x,\chi_0,\chi_1,\ldots\chi_m,\chi_0^{(1)},\chi_1^{(1)},\ldots\chi_m^{(1)}\right)=0\,,\ \left(j=1,2,\ldots,n;\ n<2m\right). \quad (2)$$

Дані співвідношення можуть описувати кінематичні граничні умови, накладені на переміщення деяких точок бруса. У роботі [5] розглянуті випадки, коли умови (2) стосуються ділянок ліній, чи їх окремим точок, що лежать на перетині поздовжніх верхньої та нижньої граней бруса та головної площини XOZ (рис.1).

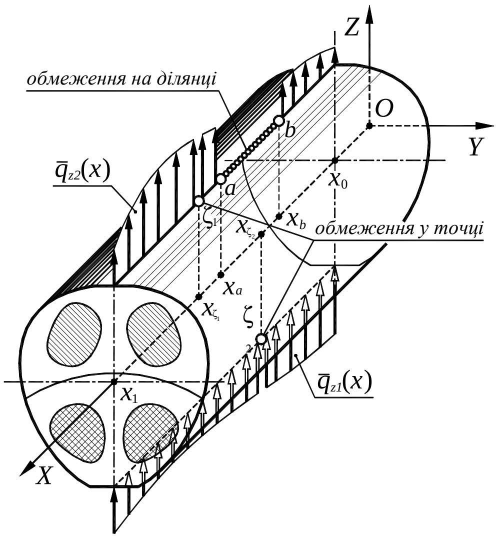

Рис. 1. Схема навантаження та обмежень деформуванню бруса

Для випадку, коли умови (2) стосуються деякої точки ζ з координатою $x_\zeta \in \left(x_0,x_1\right)$, необхідні умови екстремуму функціонала (1) отримані у наступному вигляді

$$\frac{\partial J}{\partial\chi_k}-\frac{d}{dx}\frac{\partial J}{\partial\chi_k^{(1)}}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J}{\partial\chi_k^{(2)}}+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta_{x_\zeta}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_k}-\frac{d}{dx}\left(\Delta_{x_\zeta}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_k^{(1)}}\right)\right)=0, \quad (3)$$

де $\Delta_{x_\zeta} = \Delta\left(x - x_\zeta\right)$ – дельта функція Дірака локалізована у точці $x = x_\zeta$; $\lambda_j = \lambda_j(x)$ – деякі невідомі функції (невідомі множники); $k = \overline{0,\ m}$ – розгортає систему умов по вертикалі.

Разом з умовами (3) були отримані додаткові рівняння для визначення невідомих множників за такого типу умов

$$\Delta_{x_\zeta}\vartheta_{k-m} = 0\,,\ k = \overline{m+1, m+n}\,. \tag{4}$$

У випадку коли умови (2) стосуються деякої безперервної сукупності точок, що утворюють відрізок $[a,b]$ з координатами $x_a, x_b \in (x_0, x_1)$, (рис.1) необхідні умови отримані у такому вигляді

$$\begin{gathered}\frac{\partial J}{\partial \chi_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial J}{\partial \chi_k^{(1)}} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J}{\partial \chi_k^{(2)}} + \\ + \sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{Q}_{[a,b]}\lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k} - \frac{d}{dx}\left(\mathrm{Q}_{[a,b]}\lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k^{(1)}} \right)\right) = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

де $\mathrm{Q}_{[a,b]}$ – характеристична функція проекції відрізка $[x_a, x_b]$; $k = \overline{0,\ m}$.

Додаткові рівняння у такому випадку мають наступний вигляд

$$\mathrm{Q}_{[a,b]}\vartheta_{k-m} = 0\,,\ k = \overline{m+1, m+n}\,. \tag{6}$$

Умови (3) та (5) мають загальний вигляд і непридатні для безпосереднього використання при розв’язанні задач. Тому доцільно отримати дані умови у більш розгорнутому вигляді.

Отримані у [2] співвідношення для напружень та деформацій, якщо відкинути врахування поперечного обтиснення та зовнішнє дотичне навантаження, матимуть наступний вигляд

$$\sigma_{mx} = E_x \sum_{i=0}^{m} \frac{d^2\chi_i}{dx^2}\xi_i\,, \qquad \tau_{mx} = \frac{1}{\overline{G}_{xz}} \sum_{i=1}^{m} \frac{d\chi_i}{dx}\, f_{(i-1)}\,, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\sigma_{mx}}{E_x}\,, \qquad \gamma_{mxz} = \frac{\tau_{mxz}}{\overline{G}_{xz}}\,, \tag{8}$$

де $\chi_0 = w(x)$, $\chi_i = \chi_i(x)$ – шукані функції, відповідно, вертикальних переміщень та зсувів; ξ_i – функції розподілу поздовжніх переміщень по висоті поперечного перерізу бруса; $f_{(i-1)} = f_{(i-1)}(z)$ – функції розподілу кутових деформації; $E_x = E_x(y,z)$, $\overline{G}_{xz} = \overline{G}_{xz}(z)$ – функції, які описують механічні властивості матеріалу бруса, відповідно, поздовжній модуль пружності та усереднений по ширині модуль зсуву.

У співвідношеннях (7) функції розподілу по висоті перерізу поздовжніх та кутових деформацій визначаються за інтегральними співвідношеннями, наведеними у [2], де детально описана методика їх визначення для брусів із перерізами, що утворені фазами прямокутної форми.

Відповідно до співвідношень (7) та (8) повна енергія композитного бруса запишеться так:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{2} \int_A \left(E_x \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{d^2 \chi_i}{dx^2} \xi_i \right)^2 + \frac{1}{\overline{G}_{xz}} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{d\chi_i}{dx} f_{(i-1)} \right)^2 \right) dA - \overline{q}_z \chi_0 \right) dx, \quad (9)$$

де $\overline{q}_z = \overline{q}_{z1}(x) + \overline{q}_{z2}(x)$ – зведене до головної площини бруса зовнішнє нормальне навантаження (рис.1); A – площа поперечного перерізу бруса.

Підінтегральний вираз даного функціонала на довільному наближенні моделі має наступний вигляд

$$J = \frac{1}{2} \int_A \left(E_x \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{d^2 \chi_i}{dx^2} \xi_i \right)^2 + \frac{1}{\overline{G}_{xz}} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{d\chi_i}{dx} f_{(i-1)} \right)^2 \right) dA - \overline{q}_z \chi_0 . \quad (10)$$

Застосувавши (10) у доданках виразу (3), при $k = 0$ отримаємо:

$$\sum_{i=0}^{m} B_{0i} \frac{d^4 \chi_i}{dx^4} = \overline{q}_z - \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_{x_\zeta} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_0} - \frac{d}{dx} \left(\Delta_{x_\zeta} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_0^{(1)}} \right) \right). \quad (11)$$

Тут уведено позначення інтегралів при похідних шуканих функцій

$$\int_A (E_x \xi_0 \xi_i) dA = B_{0i}, \ i = \overline{1,\ m}. \quad (12)$$

Сталі (12) залежать від структури, механічних характеристик матеріалу та форми фаз композитного бруса і є величинами, які безпосередньо характеризують піддатливість бруса при поперечному згинанні, тобто являються аналогами жорсткості класичної моделі згину ізотропних матеріалів.

З фізичної точки зору сума у правій частині (11) повинна мати розмірність розподіленого навантаження $\overline{q}_z$, тож також має бути деяким навантаженням, яке на відміну від $\overline{q}_z$ не є заданим. Тож очевидним стає фізичний зміст даної суми – це деяке невідоме навантаження, яке за своїм впливом на переміщення бруса еквівалентне умовам накладеним на шукані функції, тобто є реакцією зв'язків, накладених на брус.

Застосувавши (10) у доданках виразу (3), при $k = \overline{1, m}$ матимемо:

$$\sum_{i=0}^{m} B_{ki} \frac{d^4\chi_i}{dx^4} - \sum_{i=1}^{m} S_{(k-1)(i-1)} \frac{d^2\chi_i}{dx^2} = \\ = -\sum_{i=1}^{m} \left(\Delta_{x_\zeta} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k} - \frac{d}{dx} \left(\Delta_{x_\zeta} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k^{(1)}} \right) \right). \tag{13}$$

Тут уведено позначення інтегралів при похідних шуканих функцій

$$\int_A \left(E_x \xi_k \xi_i \right) dA = B_{ki}, \qquad \int_A \left(\frac{1}{\overline{G}_{xz}} f_{(k-1)} f_{(i-1)} \right) dA = S_{(k-1)(i-1)}. \tag{14}$$

Таким чином, невідомі функції χ_i зсувної моделі, за накладених на переміщення точки ζ умов ϑ_j, можуть бути отримані у ході розв'язання системи диференціальних рівнянь (11), (13).

Аналітично встановлений зв'язок між окремими жорсткісними коефіцієнтами (12) та (14) у вигляді рівності

$$S_{(k-1)(i-1)} = B_{(k-1)i}. \tag{15}$$

З урахуванням даної рівності визначальну для функцій χ_i систему диференціальних рівнянь можемо записати в остаточному вигляді

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} B_{0i} \frac{d^4\chi_i}{dx^4} = \overline{q}_z - \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_{x_\zeta} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_0} - \frac{d}{dx} \left(\Delta_{x_\zeta} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_0^{(1)}} \right) \right); \\ \sum_{i=0}^{m} B_{ki} \frac{d^4\chi_i}{dx^4} - \sum_{i=1}^{m} B_{(k-1)i} \frac{d^2\chi_i}{dx^2} = \\ \qquad = -\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_{x_\zeta} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k} - \frac{d}{dx} \left(\Delta_{x_\zeta} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k^{(1)}} \right) \right), \ k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{16}$$

Систему визначальних рівнянь (16) доповнює система додаткових рівнянь (4) для визначення невідомих функцій λ_j.

На основі виразу (10) аналогічно отримана система диференціальних рівнянь за умов ϑ_j, заданих на ділянці $[a, b]$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} B_{0i} \frac{d^4\chi_i}{dx^4} = \overline{q}_z - \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Q}_{[a,b]} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_0} - \frac{d}{dx} \left(\mathrm{Q}_{[a,b]} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_0^{(1)}} \right) \right); \\ \sum_{i=0}^{m} B_{ki} \frac{d^4\chi_i}{dx^4} - \sum_{i=1}^{m} B_{(k-1)i} \frac{d^2\chi_i}{dx^2} = \\ \qquad = -\sum_{i=1}^{n} \left(Q_{[a,b]} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k} - \frac{d}{dx} \left(Q_{[a,b]} \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k^{(1)}} \right) \right), \ k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{17}$$

Рівняння (17) необхідно доповнити системою (6) для визначення невідомих функцій λ_j.

У випадках, коли на брус накладені декілька зосереджених у точці або розподілених на ділянці умов, то очевидно, що моделювання зводиться до суперпозиції рівнянь (16) та (17), яка має розв'язуватись сумісно із відповідною кількістю додаткових рівнянь (4) та (6).

Системи рівнянь (16) та (17) загалом аналогічні визначальним рівнянням ітераційної зсувної моделі [2], але відрізняються наявністю додаткових складових у правих частинах рівнянь, які дозволяють враховувати накладені на шукані функції додаткові умови різних типів.

Як приклад обмеження умов деформування, розглянемо випадок зосередженої у точці ζ умови, заданої виразом

$$\vartheta_1 = \chi_0 = 0\,. \tag{18}$$

Відповідно до такої умови вертикальні переміщення у точці з координатою $x = x_\zeta$ виключені, але поздовжні переміщення залишаються вільними. Таким чином, дана умова моделює ідеальне шарнірно рухоме вздовж осі OX закріплення відповідної точки бруса.

Підставивши (18) до системи (16), після перетворень отримаємо

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} B_{0i} \frac{d^4\chi_i}{dx^4} = \overline{q}_z - \Delta_{x_\zeta} \lambda_1; \\ \sum_{i=0}^{m} B_{ki} \frac{d^4\chi_i}{dx^4} - \sum_{i=1}^{m} B_{(k-1)i} \frac{d^2\chi_i}{dx^2} = 0, \ k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{19}$$

Додаткове рівняння відповідно до (4) матиме наступний вигляд

$$\chi_0 \Big|_{x = x_\zeta} = 0\,. \tag{20}$$

На кроці наближення $m = 1$ система (19) та рівняння (20) подібні рівнянням, використаним у [3, 4] при моделюванні багатопрогонових композитних балок. Правильність підходів, застосованих у даних роботах, підтверджена порівнянням з відомими експериментальними даними. Таким чином, підтверджується правильність підходу, використаного при врахувані додаткових умов, у [5] та даній роботі.

Висновки. На основі співвідношень для напружень та деформацій інтераційної зсувної моделі згину композитних брусів, отримана система визначальних диференціальних рівнянь, що відповідає варіаційній задачі згину композитних брусів з обмеженими умовами деформування. Виведені рівняння дозволяють визначати шукані функції моделі, з урахуванням накладених на переміщення точок бруса умов. Це, в свою чергу, дозволяє отримати основні співвідношення напружено-деформованого стану композитних брусів з урахуванням різного типу обмежених умов згинання та поперечних зсувних деформацій.

1. Пискунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем / Пискунов В.Г. // Механика композит. Материалов. – 2003. – Т.39, №1. – С.2-24.

2. Горик О.В. Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402с.

3. Горик О.В. Теоретичні передумови розрахунку композитних систем з особливими умовами дефурмування / Горик О.В., Ковальчук С.Б. // Композиционные материалы в промышленности. Материалы Тридцатой Юбилейной международной конференции: 7-11 июня 2010г. – г. Ялта, Крым. – С.435-438.

4. Горик О.В. Розрахунок статично невизначних композитних балок з ускладненими умовами деформування / О.В. Горик, Ковальчук С.Б. // Вісник Національного транспортного університету: В 2-х частинах: Ч.2. – К.: НТУ, 2010. – Випуск 21. – С.314-319.

5. Горик О.В. Варіаційна задача деформування композитних брусів у обмежених умовах згину / С.Б. Ковальчук // Сб. научн. трудов IX Международ. научно-практ. Интернет-конференции «Состояние современной строительной науки – 2012». – Полтава: Полтавский ЦНИИ. – 2012. – С.16-22.