УДК 624.012.35.04

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛОК НА ОСНОВІ КРИТЕРІЮ ВАРТОСТІ

ОПТИМИЗАЦИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ СТОИМОСТИ

OPTIMIZATION OF REINFORCE-CONCRETE BEAMS IS ON BASIS OF MEASURE OF COST

Микитенко С.М., к. т. н., докторант (Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка)

Микитенко С.Н., к. т. н., докторант (Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка)

Mykytenko S.N., Ph. D., Competitor of doctorate (Poltava National Technical University Yuri Kondratyuk)

Пропонується метод оптимального проектування залізобетонних балок прямокутного перерізу на основі критерію вартості та формули для визначення оптимальних параметрів перерізу.

Предлагается метод оптимального проектирования железобетонных балок прямоугольного сечения на основе критерия стоимости и формулы для определения оптимальных параметров сечения.

The method of the optimal designing of reinforce-concrete beams of rectangular section is offered on the basis of measure of value and formulas offer for determination of optimal parameters of section.

Ключові слова:
Залізобетон, оптимальне проектування, балки прямокутного перерізу.
Железобетон, оптимальное проектирование, балки прямоугольного сечения.
Reinforced concrete, optimal designing, beams of rectangular section.

Стан питання та задачі дослідження. У процесі проектування будівельних конструкцій необхідно одночасно враховувати значну кількість параметрів, які в кінцевому рахунку будуть визначати їх якість. Для вирішення таких задач доцільно застосовувати методи оптимізації, котрі дають можливість одночасно враховувати вплив різних факторів. У цьому напрямку значна кількість робіт з оптимізації присвячена дослідженням у будівельній механіці та конструкцій із металу, а в галузі залізобетону серед найбільш усесторонніх праць можна виділити [1], яка надрукована ще в 1974 році. За кордоном питанням оптимізації будівельних конструкцій взагалі та залізобетонних конструкцій, зокрема, дослідниками приділяється постійна увага [2, 3]. Залізобетонні конструкції найбільш розповсюджений вид будівельних конструкцій, тому задача їх оптимального проектування є актуальною, особливо в теперішній, час коли гостро стоять питання енерговитрат та вартості будівництва.

Застосування певного критерію оптимальності залежить від кінцевої мети, яка ставиться на початку проектування. За результатами досліджень у області оптимізації можна виділити два основних критерії оптимальності: перший – конструкції мінімальної маси, другий – конструкції мінімальної вартості. На перший погляд, ці два критерії можуть дублювати один одного, наприклад менша маса – менша вартість і навпаки, але, як буде показано далі така залежність не завжди підтверджується. Повне врахування вартості, технологічних та інших факторів потребує значної кількості показників, що ускладнює задачу оптимізації. Особливо це стосується конструкцій із залізобетону, наприклад собівартість $C_{зб}$ відповідно до рекомендацій [4] можна записати у вигляді

$$C_{зб} = C_{бет} + C_{см} + C_{ак} + C_{д} + C_{ма} + C_{ф} + C_{о} + C_{то}, \qquad (1)$$

де $C_{бет}$ – собівартість бетонної суміші; $C_{ст}$ – собівартість сталі для виготовлення арматури та закладних деталей; $C_{ак}$ – затрати на виготовлення арматурних виробів; $C_{д}$ – затрати на виготовлення закладних деталей; $C_{ма}$ – собівартість укладання арматури та закладних деталей у форму; $C_{ф}$ – собівартість формування виробу; $C_{о}$ – затрати на утримання форми; $C_{то}$ – собівартість термічної обробки.

Значна кількість факторів, які впливають на собівартість конструкції ускладнює алгоритм оптимізації, тому їх можна об’єднати у два узагальнені критерії: $C_{б}$ – вартість одиниці об’єму бетону та $C_{а}$ – вартість сталі у виробі. Тоді критерій вартості для залізобетону в загальному випадку буде являти собою вартість бетону та сталі у виробі

$$C_{зб} = \int_V \left(C_б V_б + C_a V_a \gamma_s \right) dV, \qquad (2)$$

де $V_б$ – об’єм бетону в конструкції; $V_а$ – об’єм сталі в конструкції; γ_s – маса 1 м^3 арматурної сталі

У роботі [5] розглядається оптимальне проектування збірного залізобетонного перекриття за критерієм мінімальної маси. Підходи до розрахунків та отримані результати оптимізації параметрів перекриття містять елементи дискусії, розрахунки залізобетонних конструкцій виконуються як для пружного матеріалу, прольотів конструкцій виявилися дещо заниженими.

Окрім застосування різних критеріїв оптимізації дослідниками використовуються різноманітні методи оптимізації. Разом із методами математичного програмування [6], які дають можливість отримувати рішення у вигляді детермінованих залежностей, в останні десятиліття широкого розповсюдження набувають еволюційні алгоритми, зокрема генетичний алгоритм. Генетичний алгоритм – це евристичний алгоритм пошуку, він моделюється шляхом випадкового відбору, комбінування та варіації параметрів оптимізації за аналогією з біологічною еволюцією. Такі алгоритми потребують великої кількості обчислень, вони не завжди точно визначають глобальний оптимум, унаслідок цього неможливо отримати аналітичне рішення задачі. В роботі [7] наведено результати оптимізації залізобетонної рами із застосуванням генетичного алгоритму. Результати застосування генетичного алгоритму для оптимізації залізобетонного ребристого перекриття наведено в роботі [8]. В обох цих роботах у якості цільової функції використовується критерій вартості.

Основним завданням дослідження було розроблення аналітичного оптимізаційного розрахунку балок мінімальної вартості з урахуванням нелінійних властивостей бетону.

Викладення основного матеріалу. Задача проектування балок мінімальної вартості розв’язується як оптимізаційна за розрахунковою, схемою зображеною на рис 1. Для розв’язування використовувалися наступні залежності та передумови:

– рівняння рівноваги зігнутого елемента прямокутного перерізу

$$\sum X = 0; \quad f_{yd} A_S - N_c = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_C = 0; \quad M - f_{yd} A_S Z_C = 0\,, \tag{4}$$

де N_c – рівнодійна зусиль у бетоні; M – згинальний момент на який необхідно розрахувати кількість арматури для прямокутної балки; f_{cd}, f_{yd} – розрахункові значення опору бетону та арматури; h – висота балки; b – ширина балки; d – відстань від центру маси розтягнутої арматури до верхньої грані балки; a_s – відстань від центру маси розтягнутої арматури до нижньої грані балки;

– напруження по висоті стиснутої зони бетону X_1 розподіляються відповідно до діаграми повного стискання бетону згідно з ДБН В.2.6-98:2009

$$\sigma_c(\varepsilon_c, y) = f_{cd}(k\eta_y - \eta_y^2)/\left(1+(k-2)\eta_y\right), \tag{5}$$

де з урахуванням гіпотези плоских перерізів використовується заміна змінних [9] $\eta_y = (y/X_1)/(\varepsilon_c/\varepsilon_{c1,cd})$, $k = 1{,}05 E_{cd} \times \varepsilon_{c1,cd}$, ε_c – деформація найбільш стиснутого волокна бетону ($y = X_1$); $\varepsilon_{c1,cd}$ – деформація при максимальних напруженнях; E_{cd} – початковий модуль пружності бетону;

– умова сумісності деформування бетону та арматури

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s ; \tag{6}$$

– критерій оптимальності для визначення площі арматури A_s та розмірів поперечного перерізу балки *b x h*, при яких вартість 1-го м погонного балки $C_б$ буде мінімальна

$$K_{opt}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_б(A_S, b, h) = min. \tag{7}$$

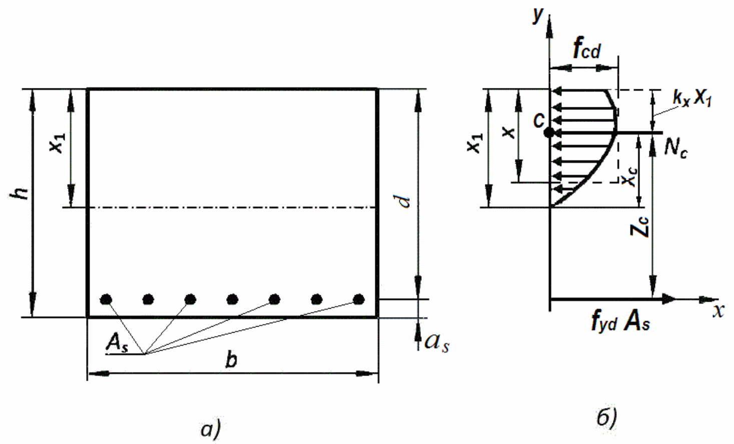

Рис. 1. Розрахункова схема визначення оптимальних розмірів та площі розтягнутої арматури балки: *а* – поперечний переріз елемента; *б* – епюра напружень у стиснутому бетоні та зусилля в арматурі

Для визначення рівнодіючої в стиснутій зоні бетону N_c висоту стиснутої зони X виразимо через параметр ω [9]

$$N_c = f_{cd} b \int_0^{X_1} \frac{k\eta_y - \eta_y^2}{1+(k-2)\eta_y} d\eta_y = f_{cd} b X_1 \omega. \tag{8}$$

Висота стиснутої зони бетону X_1 з рівняння (3)

$$X_1 = \frac{f_{yd} A_S}{f_{cd} b \omega} . \tag{9}$$

Плече внутрішньої пари сил із виразу (4)

$$Z_c = \frac{M}{f_{yd} A_s} . \tag{10}$$

Висота перерізу дорівнює

$$h = Z_c + k_x X_1 + a_s = \frac{M}{f_{yd} A_s} + \frac{f_{yd} A_s k_x}{f_{cd} b \omega} + a_s , \tag{11}$$

де $k_x X_1$ – відстань від точки прикладання N_c до верхньої грані балки.

Значення цільової функції для прямокутних балок відповідно до (2) можна описати виразом

$$C_{зб}\left(A_s, b, h\right) = \ h\ b\ l\, C_б + A_s\ l\ \ \gamma_s\, C_a\,. \tag{12}$$

де l – довжина балки; $C_б$ – вартість 1 м^3 бетону, грн./м^3; C_a –вартість 1 т арматурної сталі, грн /т; $\gamma_s = 7{,}85$ – маса 1 м^3 арматурної сталі, т/м^3.

Для обчислення цільової функції (12) було використано вираз (11), після чого отримано функцію з двома змінними параметрами A_S та b

$$C_{зб}\left(A_s, b\right) \ = \left[\frac{M}{f_{yd} A_s} + \frac{f_{yd} A_s k_x}{f_{cd}\, b\, \omega} + a_s\right] b\, l\, C_б + A_S\, l\, \gamma_s\, C_a\,. \tag{13}$$

Вартість балки довжиною l було приведено до вартості одного погонного метра, в результаті отримано функціонал виду

$$C_{зб1}(\,A_s, b\,) = \underbrace{\frac{M\,C_б}{f_{yd}}}_{A}\,\frac{b}{A_s} + \underbrace{\left(\frac{f_{yd} k_x}{f_{cd}\,\omega}\,C_б + \gamma_s\, C_a\right)}_{B} A_s + \underbrace{a_s\ C_б}_{D}\, b\,. \tag{14}$$

Для дослідження функціоналу (14) на наявність глобального та локальних екстремумів було використано функцію виду

$$f(\,x_1, x_2\,) = A\frac{x_2}{x_1} + B x_1 + D x_2 \tag{15}$$

де $f(\,x_1, x_2\,) = C_{зб1}(\,A_S, b\,),\ \ x_1 = A_s,\ \ x_2 = b.$

Перші похідні функції мають вигляд

$$\nabla f(\,x_1, x_2\,) = \begin{bmatrix} \dfrac{d\ f}{d\,x_1} & \dfrac{df}{d\,x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B - A\dfrac{x_2}{x_1^2}; & \dfrac{A}{x_1} + D \end{bmatrix} \tag{16}$$

Із аналізу виразу (16) можна зробити висновок, що стаціонарна точка не належить області $x_1 > 0 \cup x_2 > 0$, функція в цій області має локальний екстремум, котрий буде визначений на лінії

$$x_1 = \sqrt{A \cdot B^{-1} x_2}\,. \tag{17}$$

Гессіан функції (15) має вигляд

$$H = \nabla^2 f(\,x_1, x_2\,) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A\dfrac{x_2}{x_1^3} & -\dfrac{A}{x_1^2} \\ -\dfrac{A}{x_1^2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Так як $M_1=0$, а $M_2>0$, то можна зробити висновок, що в області $x_1>0 \cup x_2>0$ функція (15) має локальний мінімум відносно x_1, відносно x_2 функція зростає. Таким чином, якщо ширина балки b зменшується, то зменшується вартість конструкції $C_{зб1}$, але ширина може бути обмежена конструктивними вимогами. Якщо прийняти $b=const$, то розрахувати балку мінімальної вартості можна із умови $min(C_{зб1}(A_s))$

$$\frac{dC_{б1}}{dA_s} = -\frac{A \cdot b}{A_s^2} + B = 0. \tag{19}$$

Залежність для визначення оптимальної площі арматури отримала вигляд

$$A_{s,opt} = \sqrt{\frac{A \cdot b}{B}} = \sqrt{\frac{M f_{cd} C_б b}{f_{yd}\left(f_{yd} C_б \frac{k_x}{\omega} + f_{cd}\, \gamma_s C_a\right)}}\ . \tag{20}$$

Робоча висота перерізу балки d визначається за формулою.

$$d = \frac{M}{f_{yd} A_{s,opt}} + \frac{f_{yd} A_{s,opt} k_x}{f_{cd}\, b\, \omega} \tag{21}$$

Залежність (20) дає можливість розрахувати необхідну площу арматури із умови мінімальної вартості при заданих характеристиках вартості бетону $C_б$ та арматури C_a у собівартості конструкції. Параметр k_x/ω може бути визначений із умови

$$\frac{k_x}{\omega} = \frac{X_1 - X_c}{\int_0^{X_1} \frac{k\eta_y - \eta_y^2}{1+(k-2)\eta_y} d\eta_y} \tag{21}$$

Як окремий випадок розрахунку при прямокутній епюрі стиснутої зони бетону згідно зі СНиП 2.03.01-84 $k_x/\omega=0{,}5$, а при застосуванні діаграми (5) за результатами досліджень [9] параметр (20) залежить від k і знаходиться в межах від 0,65 до 0,78.

На рис. 2 наведено результати з дослідження балки з наступними параметрами: $b=150$ мм, М=80 кН•м, арматура А400, C_a = 6500 грн/т, бетон В15 $C_б$ = 700 грн/м^3. Відношення b/d варіювалося, від 0,15 до 0,4, мінімальне значення вартості $C_{зб}$ отримано при $b/d=0{,}36$. З графіка (рис. 2) можна побачити, що при зменшенні маси балки $G_{зб}$, вартість $C_{зб}$ спочатку зменшується, а потім починає зростати.

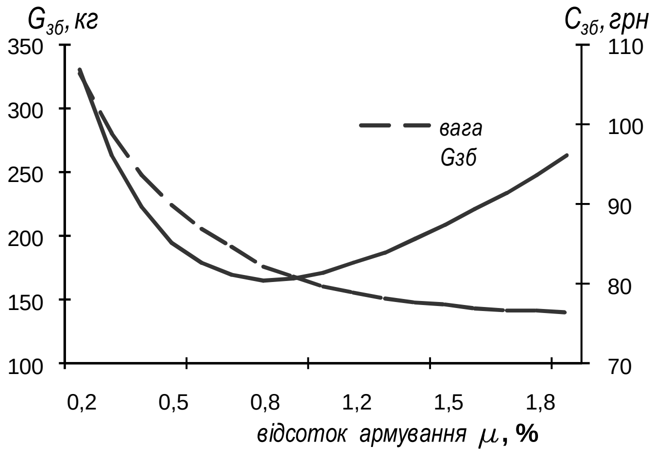

Рис. 2. Вартість і маса залізобетонної балки залежно від відсотка армування

За результатами дослідження можна зробити наступні **висновки**:

1. Розроблено аналітичний оптимізаційний розрахунок балок мінімальної вартості з урахуванням нелінійних властивостей бетону.
2. Отримано аналітичні залежності для проектування оптимальних балок на основі критерію мінімальної вартості.
3. Застосування критерію мінімальної вартості дає можливість проектувати більш економічні конструкції в порівнянні з критерієм мінімальної маси.

1. Рейтман, М.И. Оптимизация параметров железобетонных конструкций на ЭЦВМ [Текст] / М.И. Рейтман, Л.И. Ярин. – М.: Стройиздат, 1974. – 96 с. **2.** Adeli, H. Cost Optimization of Structures. Fuzzy Logic, Genetic Algorithms, and Parallel Computing [Текст] / H. Adeli, K.C. Sarma. – John Wiley & Sons, Ltd, 2006. – 203 p. **3.** Mura I. Ottimizzazione di piastre in C.A. allo slu/ I. Mura, F. Stochino// Giornate aicap 2011 26°convegno nazionale. – ROMA – Italia: AICAP, 2011. – P. 321-328. **4.** Рекомендации по определению расчетной стоимости и трудоемкости изготовления сборных железобетонных конструкций на стадии проектирования [Текст] / Госстрой СССР. –М.: НИИЭС Госстроя СССР, 1987. – 146 с. **5.** Ершова, Н. М. Оптимальное проектирование сборного железобетонного перекрытия [Текст] / Н. М. Ершова // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – Д.: ПГАСА, 2011. - № 11 - 12. – С. 32 – 37. **6.** Ahmadi-Nedushan, B. Minimum Cost Design of Concrete Slabs using Particle Swarm Optimization with time Varying Acceleration Coefficients [Текст] /B. Ahmadi-Nedushan, H. Varaee // World Applied Sciences Journal - IDOSI Publications, 2011, №13 (12). – P. 2484-2494. **7.** Серпик И.Н. Генетический алгоритм оптимизации плоских железобетонных рам [Текст] / И.Н. Серпик, И.В. Мироненко, М.И. Смашнева // Бетон и железобетон, 2011, №4. – С. 17–21. **8.** Galeb A. C. Optimum design of reinforced concrete waffle slabs [Текст] / A. C. Galeb, Z. F. Atiyah // International Journal Of Civil And Structural Engineering, 2011. Vol. 1, №4. – P. 862-880. **9.** Павліков А.М. Розрахунок міцності залізобетонних елементів нормальних перерізах, синтезований на основі СНИП 2.03.01 84 та нелінійної деформаційної моделі / А.М. Павліков // Вісник Національного університету ”Львівська політехніка”. – Львів: 2010. – №664. – С. 128 – 132.