УДК 539.3

ПРО ВРАХУВАННЯ НЕЛІНІЙНОСТІ В РІВНЯННЯХ ТЕОРІЇ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ТИПУ ТИМОШЕНКО

ОБ УЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ В УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

TO TAKE INTO ACCOUNT NONLINEARITY IN THE EQUATIONS OF THE THEORY ANISOTROPIC SHELLS OF TYPE TYMOSHENKO

Семенюк М.П., д.т.н., проф. (Інститут механіки НАН України), **Трач В.М., д.т.н., проф., Хоружий М.М., аспірант, Власюк Д.С., аспірант** (Національний університет водного господарства та природокористування)

Семенюк М.П., д.т.н., проф. (Институт механики НАН Украины), **Трач В.М., д.т.н., проф.**, **Хоружий М.М., аспирант, Власюк Д.С., аспирант** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования)

Semeniuk M.P., doctor of technical sciences, professor (Institute of Mechanics, Academy of Sciences of Ukraine), **Trach V.M., doctor of technical sciences, professor**, **Horuzhy M.M., graduate student**, **Vlasyuk D.S., graduate student** (National University of Water Management and Natural Resources Use)

Розроблено процедуру виводу канонічної системи диференціальних рівнянь нелінійної теорії анізотропних оболонок типу Тимошенко. Вона може бути застосована за будь-якого порядку нелінійності співвідношень між переміщеннями та деформаціями. В роботі процедура реалізована з урахуванням складових третього ступеня у виразах поперечного зсуву, кривин і кручення. Ілюстрацією використання всіх етапів розробленого підходу є розв'язок задачі про нелінійне деформування гофрованої арки.

Разработана процедура вывода канонической системы дифференциальных уравнений нелинейной теории анизотропных оболочек типа Тимошенко. Она может быть применена в любом порядке нелинейности соотношения между перемещениями и деформациями. В работе процедура реализована с учетом составляющих третьей степени в выражениях поперечного смещения, кривин и кручение. Иллюстрацией использования всех этапов разработанного подхода является решение задачи о нелинейное деформирование гофрированной арки.

The procedure output canonical system of differential equations of nonlinear theory of anisotropic shells Timoshenko type. It can be applied in any order

nonlinearity relationship between displacements and deformations. In this paper a procedure is implemented considering the components of the third degree in expressions transverse displacement, curvature and torsion. An illustration of the use of all phases of the developed approach is a solution to the problem of nonlinear deformation of corrugated arch.

Ключові слова:
Анізотропія, оболонка, нелінійність, деформування.
Анизотропия, оболочка, нелинейность, деформирование.
Anisotropy, shell, nonlinearity, strain.

В даний час отримали значного розвитку методи розв’язків нелінійних задач механіки твердого деформованого тіла, що базуються на методі скінчених елементів [14]. Цікаві можливості для деяких класів нелінійних задач містять також підходи, що використовують численні методи реалізації диференціальних рівнянь [7]. Одним із шляхів вдосконалення цих підходів є використання ідей аналітичної механіки, зокрема, метода Гамільтона [10,12,15,17,18,21,24].

Використання методів гамільтонової механіки в механіці суцільного середовища є досить важливою проблемою вже на протязі тривалого часу. В роботах [21,24] показано, що змішана форма шести рівнянь лінійної теорії пружності відносно трьох переміщень і трьох встановлених напружень, записана в операторній формі Коші відносно перших похідних по одній із просторових координат, є операторною гамільтоновою системою. Ця система може бути отримана з варіаційного принципу Рейсснера [25], який являє собою канонічну чи гамільтонову форму принципу мінімуму потенціальної енергії. При використанні методу Гамільтона в аналітичній механіці рівняння Лагранжа другого порядку з невідомими узагальненими координатами заміняється системою рівнянь першого порядку з невідомими узагальненими координатами і узагальненими імпульсами [11]. Основна ціль такого перетворення полягає в розробці загальних методів інтегрування рівнянь динаміки консервативних і неконсервативних систем [10,11]. Доцільним вважається використання методу Гамільтона для перетворення рівнянь теорії пружності і теорії оболонок [15,17-19,21], якщо використовується чисельний метод інтегрування за однією з координат [7]. При розробці підходів до розв’язку нелінійних задач теорії оболонок використання методу Гамільтона є доцільним на етапі отримання лінеаризованої системи канонічних рівнянь нормального виду Коші [21]. В даній роботі канонічний інтеграл отриманий відносно швидкостей переміщень і швидкостей узагальнених напружень, що розглядаються як узагальнені координати і узагальнені імпульси. Швидкості переміщень, напружень і навантаження отримані при диференціюванні відповідних змінних за параметром, що співпадає з довжиною дуги траєкторії рівноважних станів. В розглядуваній постановці параметр навантаження рівноправно входить в число невідомих. Крайова задача відносно швидкостей реалізується спільно із задачею Коші, невідомими в якій є переміщення, зусилля і моменти, навантаження.

Вперше метод розв'язку нелінійної системи рівнянь шляхом диференціювання за параметром використано в роботі [9]. В [6] розвя'зок системи нелінійних диференціальних рівнянь отримано також при спільній реалізації крайової задачі в швидкостях і задачі Коші. Нижче розв'язані канонічні рівняння, що отримані в межах теорії оболонок типу Тимошенко, при використанні залежностей між деформаціями та переміщеннями з точністю до членів у третьому степені. Наведено приклад реалізації розробленої процедури при розв'язку задач нелінійного деформування гофрованої арки, що враховує також її закритичну поведінку.

1.Потенціальна енергія деформації.

Будемо розглядати оболонки з композитних матеріалів, для яких зв'язок між деформаціями та переміщеннями нелінійний при використанні співвідношень узагальненого закону Гука. Припускаємо, що умови й інтенсивність навантажування викликають значні прогини та викривлення, а також супроводжуються зміною форм рівноваги оболонки. При цьому в співвідношеннях між переміщеннями та деформаціями оболонки необхідно враховувати нелінійні члени не лише в виразах тангенціальної деформації, але й у виразах приросту кривини і кручення. Даним вимогам відповідає варіант теорії оболонок типу Тимошенко, розроблений в роботах [4,16]. Співвідношення нелінійної теорії пружності в формі Новожилова [13] приведені авторами [4,16] до двовимірних задач шляхом прийняття гіпотез Тимошенко. Використовуються звичайні для системи координат в лініях кривин α_1, α_2 позначення параметрів Ляме A_1 и A_2, радіусів кривин R_1 и R_2, які вважаються додатними, якщо нормаль до поверхні напрямлена в сторону центрів кривин. Вважаємо, що переміщення координатної поверхні оболонки описуються трьома параметрами переміщень u, v, w, а повороти навколо дотичних до координатних ліній α_1, α_2 нормального элемента – з допомогою функцій θ і ψ. Нижче будемо також використовувати позначення для переміщень у вигляді вектора-стовпця $U = (u, v, w, \theta, \psi)^T$.

Отримані в працях [4,16], залежності між деформаціями та переміщеннями можна подати у такому вигляді:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1{}^2 + \omega_1{}^2 + \theta_1{}^2\right); \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2{}^2 + \omega_2{}^2 + \theta_2{}^2\right);$$

$$\varepsilon_{12} = \omega_1(1+\varepsilon_2) + \omega_2(1+\varepsilon_1) + \theta_1\theta_2;$$

$$\varepsilon_{13} = \theta\left(1+\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\theta\theta_1\right) + \psi\left(\omega_1 - \frac{1}{2}\theta_1\psi\right) + \theta_1;$$

$$\varepsilon_{23} = \theta(\omega_2 - \theta\theta_2) + \psi\left(1+\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\psi\theta_2\right) + \theta_2;$$

$$k_{11} = \kappa_1(1+\varepsilon_1 - \theta\theta_1) + t_1(\omega_1 - \theta_1\psi) +$$
$$+\frac{1}{R_1}\left[2\varepsilon_{11} - \varepsilon_1 + \theta_1\theta + \frac{1}{2}(1+\varepsilon_1)\left(\theta^2+\psi^2\right)\right] + (a_1 - a_2)\theta_1\theta\psi;$$

$$k_{22} = \kappa_2(1+\varepsilon_2 - \psi\theta_2) + t_2(\omega_2 - \theta\theta_2) +$$
$$+\frac{1}{R_2}\left[2\varepsilon_{22} - \varepsilon_2 + \theta_2\psi + \frac{1}{2}(1+\varepsilon_2)\left(\theta^2+\psi^2\right)\right] - (a_1 - a_2)\theta_2\theta\psi;$$

$$k_{12} = \tau_1 + \tau_2; \tag{1}$$

$$\tau_1 = t_1(1+\varepsilon_2 - \psi\theta_2) + k_1(\omega_2 - \theta\theta_2) -$$
$$-\frac{1}{R_2}\omega_1 + \frac{1}{R_1}\left[\varepsilon_{12} - \omega_2 + \theta_2\theta + \frac{1}{2}\omega_2\left(\theta^2+\psi^2\right)\right] + (a_1 - a_2)\theta_2\theta\psi;$$

$$\tau_2 = t_2(1+\varepsilon_1 - \psi\theta_1) + k_2(\omega_1 - \theta_1\psi) - \frac{1}{R_1}\omega_2 +$$
$$+\frac{1}{R_2}\left[\varepsilon_{12} - \omega_1 + \theta_1\psi + \frac{1}{2}\omega_1\left(\theta^2+\psi^2\right)\right] + (a_1 - a_2)\theta_1\theta\psi.$$

Використані при записі виразів (1) параметри ε_i, ω_i, θ_i, κ_i, t_i відомі в лінійній теорії оболонок, але у зв'язку з їх важливістю для наступного викладення покажемо, що

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1} + a_1 v - \frac{w}{R_1}; \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial\alpha_1} - a_1 u; \quad \theta_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} + \frac{u}{R_1};$$

$$k_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} + a_1\psi; \quad t_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} - a_1\theta; \quad a_1 = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2};,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial\alpha_2} + a_2 u - \frac{w_0}{R_2}; \quad \omega_2 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha_2} - a_2 v; \quad \theta_2 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} + \frac{v}{R_2};$$

$$k_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} + a_2\theta; \quad t_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2} - a_2\psi; \quad a_2 = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}. \tag{2}$$

Якщо підставити розклади компонентів деформації ε_{ij} за координатою z у вираз потенціальної енергії деформації анізотропного тіла [12] і проінтегрувати, то отримаємо

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^T A\varepsilon, \tag{3}$$

де ε - вектор стовпець, компоненти якого розміщені в такому порядку: $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}, k_{11}, k_{22}, k_{12}$. Знак «т» означає транспонування, деформації ε_{ij} $(i \neq j)$ рівні подвійним тензорним. Коефіцієнти матриці восьмого порядку A є жорсткостями розтягу-стиску C_{mn}, згину-кручення D_{mn}, взаємного впливу B_{mn}. Для анізотропного тіла з однією площиною симетрії, паралельній координатній поверхні в кожній точці, матриця A має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & C_{26} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & C_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & 0 & 0 & C_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{26} & 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Матриця A симетрична і позитивно визначена як супроводжуюча матриця позитивно визначеної квадратичної форми. Тому всі проведені нижче операції є обґрунтованими. Жорсткості C_{ij}, B_{ij} залежать як від структури пошарового пакету, так і від локальних значень головних кривин. Величини без врахування останнього фактора позначимо індексом «0». Вони можуть бути визначені за відомими формулами [4]. Позначивши, як прийнято в геометрії поверхонь, середню кривину і головну кривину поверхні відповідно через

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right); \quad K = \frac{1}{R_1 R_2}; \qquad (5)$$

запишемо

$$C_{ij} = C_{ij}^{(0)} - 2HB_{ij}^{(0)} + kD_{ij}; \quad B_{ij} = B_{ij}^{(0)} - 2HD_{ij}. \qquad (6)$$

Жорсткості D_{ij} в розгляданому наближені від геометрії не залежать.

Функція V визначена згідно (3) відносно змінних вектора ε.

У відповідності з методами аналітичної механіки [11] введемо нові змінні, використовуючи перетворення Лежандра

$$T_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad M_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \kappa_{ij}}. \qquad (7)$$

В теорії оболонок ці змінні є зусиллями і моментами.

Вектор-стовпець T з компонентами T_{11}, T_{22}, T_{23}, T_{13}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12} визначається матричним співвідношенням

$$T = A\varepsilon , \tag{8}$$

де A – матриця (4).

Нова функція H_q подається у вигляді

$$H_q = T^T \varepsilon - V . \tag{9}$$

Виразимо старі переміщення через нові

$$\varepsilon = A^{-1}T \tag{10}$$

і підставимо в (9). Отримаємо

$$H_q = \frac{1}{2} T^T A^{-1} T . \tag{11}$$

Дані функції H_q у вигляді (9) дозволяють встановити, що

$$\varepsilon = \frac{\partial H_q}{\partial T} . \tag{12}$$

Цей відомий в теорії пружності результат підкреслює дуже важливу властивість перетворення Лежандра як дуалізм. Ця властивість дозволяє записати функцію V в такому вигляді

$$V(\varepsilon, T) = T^T \varepsilon - H_q . \tag{13}$$

Повна потенціальна енергія оболонки П складається з потенціальної енергії деформації і потенціалу поверхневих сил W, що не залежать від деформацій ε_{ij}:

$$\Pi_R = \iint_S \left[V(\varepsilon, T) + W \right] ds . \tag{14}$$

Функціонал (14) співпадає з функціоналом принципу Рейсснера [25]. Останній вважається гамільтоновою формою принципу мінімуму потенціальної енергії. В лінійній теорії пружності має місце аналогія між переміщеннями u_i і лагранжевими координатами q_i, деформаціями ε_{ij} і похідними $\dot{q}_i$, напруженнями σ_{ij} і імпульсами p_i. Деформації ε_{ij}, k_{ij} відносно яких заданий потенціал (13) нелінійні відносно параметрів $\varepsilon_i, \omega_i, \theta_i, k_i, t_i, \theta, \psi$. Тому, якщо в розгляданому варіанті теорії можна переміщення рахувати аналогічними лагранжевим координатам, то деформації ε_{ij} похідним $\dot{q}_i$ не відповідають.

2. Вивід канонічного інтегралу.

Щоб усунути цей недолік припустимо, що переміщення, деформації і зусилля-моменти є функціями деякого параметра λ.

В процесі статичного навантажування від стану, який характеризується значенням цього параметра λ_0, навантаження q_0 зростає на безкінечно малу величину $(\lambda-\lambda_0)\dot{q}$, переміщення стають рівними $u_0+(\lambda-\lambda_0)\dot{u}$, де $\dot{q}=\dfrac{dq}{d\lambda}$, $\dot{u}=\dfrac{du}{d\lambda}$. Для спрощення приймемо $\lambda_0=0$. Вектор ε представимо у вигляді ряда Тейлора

$$\varepsilon(u_0+\lambda\dot{u})=\varepsilon(u_0)+\lambda\varepsilon'(u_0)\dot{u}+\frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon''(u_0)\dot{u}^2+\ldots \quad . \tag{15}$$

Тут ε' – лінійний оператор, відомий як похідна Гато, причому

$$\varepsilon'(u_0)\dot{u}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\varepsilon(u_0+\lambda\dot{u})-\varepsilon(u_0)}{\lambda}. \tag{16}$$

Якщо підставити (15) в співвідношення пружності (8), то отримаємо

$$T=T_0+\lambda\dot{T}+\frac{1}{2}\lambda^2\ddot{T}+\ldots \tag{17}$$

де

$$T_0=A\varepsilon(u_0),\quad \dot{T}=A\varepsilon'(u_0)\dot{u},\quad \ddot{T}=A\varepsilon''(u_0)\dot{u}^2. \tag{18}$$

Потенціал (13) в стані рівноваги при навантаженні $q=q_0+\lambda\dot{q}$ можно представити в такому вигляді:

$$\begin{gathered}V=T_0^T\varepsilon_0-H_{q,0}+\lambda\left[2T_0^T\varepsilon'(u_0)\dot{u}-H_{q,1}\right]+\\+\lambda^2\left[\dot{T}^T\varepsilon'(u_0)\dot{u}+\frac{1}{2}T_0^T\varepsilon''(u_0)\dot{u}^2-H_{q,2}\right]\end{gathered}\ , \tag{19}$$

де

$$H_{q,0}=\frac{1}{2}T_0^TA^{-1}T_0,\quad H_{q,1}=T_0^TA^{-1}\dot{T}_0,\quad H_{q,2}=\frac{1}{2}\dot{T}_0^TA^{-1}\dot{T}. \tag{20}$$

При визначені потенціалу зовнішнього навантаження припускаємо, що на поверхні оболонки діє тиск інтенсивністю q. Існування потенціалу при гідростатичному тиску можливе, якщо виконуються деякі умови за переміщеннями [3]. В монографії [8] приведені результати дослідження умов використання критерія стійкості при слідкуючому тиску, що рівномірно розподілений по поверхні тривимірних тіл. При розгляді цих питань автори спираються на знаходження граничних умов, при яких задача є самоспряженою.

В роботах [1,4] різними методами отримано такий вираз для потенціалу навантаження

$$W=-q\left[\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{1}{2}\varepsilon_2\right)w-\frac{1}{2}\theta_1u-\frac{1}{2}\theta_2v\right]. \tag{21}$$

Якщо вважати [6] параметр λ – довжиною дуги траєкторії, яку описує при статичному навантаженні точка багатовимірного просторового стану, то при нескінчено малій його зміні від деякого значення $\lambda_0\ (\lambda_0 = 0)$, отримаємо

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots , \tag{22}$$

де

$$W_0 = -qN_0^T u_0 ;$$

$$W_1 = -q_0\left(\dot{N}^T u_0 + N_0^T \dot{u} \right) - \dot{q} N_0^T u_0 ;$$

$$W_2 = -q_0 \dot{N}^T \dot{u} - \dot{q}\left(\dot{N}^T u_0 + + N_0^T \dot{u}\right);$$

$$N = \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2}\theta_1 \\ -\frac{1}{2}\theta_2 \\ 1+\frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| . \tag{23}$$

Канонічний інтеграл з урахуванням виразу (23) набуває вигляду

$$\Pi_{R,2} = \iint \left[\dot{T}^T \varepsilon'(u_0)\dot{u} + \frac{1}{2} T_0^T \varepsilon''(u_0)\dot{u}^2 - \frac{1}{2}\dot{T}^T A^{-1}\dot{T} - \right. \\ \left. - q_0 \dot{N}^T \dot{u} - \dot{q}\left(\dot{N}^T u_0 + N_0^T \dot{u}\right)\right] ds . \tag{24}$$

Цей інтеграл співпадає з функціоналом принципу Рейсснера, що записаний відносно швидкостей зусиль і моментів $\dot{T}$, деформацій $\varepsilon'(u_0)\dot{u}$, $\varepsilon''(u_0)\dot{u}^2$ і переміщень $\dot{u}$. Значення навантаження q_0 і всі величини з індексом «0» вважаються відомими, швидкості зміни навантаження $\dot{q}$, зусилля $\dot{T}$, переміщення $\dot{u}$ підлягають визначенню. У відповідності з принципом Рейсснера варіації швидкості переміщень $\dot{u}$ і зусиль $\dot{T}$ при знаходженні варіації функціонала $\Pi_{R,2}$ варіюються незалежно. Умова стаціонарності набуває вигляду

$$\iint \left[\delta T^T \left(\varepsilon'(u_0)\dot{u} - A^{-1}\dot{T} \right) + \dot{T}^T \varepsilon'(u_0)\delta\dot{u} + T_0^T \varepsilon''(u_0)\dot{u}\delta\dot{u} - \right. \\ \left. - q_0\left(\delta\dot{N}^T \dot{u} + N^T \delta\dot{u}\right) - \dot{q}\left(\delta\dot{N}^T \dot{u}_0 + N_0^T \delta\dot{u}\right)\right] ds = 0 . \tag{25}$$

В книзі [5] приведений функціонал Васідзу в квазістатичній задачі, де незалежними варіаційними є швидкість напружень, деформацій, переміщень і навантажень.

3. Канонічна система рівнянь.

Прирівнюючи до нуля вираз при варіації δT , отримаємо першу групу рівнянь:

$$\varepsilon'(u_0)\dot{u} - A^{-1}\dot{T} = 0 \,. \tag{26}$$

Похідні $\varepsilon'_{ij}(u_0)\dot{u}$ являють собою лінійні функції похідних за параметром λ від $\dot{\varepsilon}_i$, $\dot{\omega}_i$, $\dot{\theta}_i$, $\dot{\kappa}_i$, $\dot{t}_i$ $(i = 1{,}2)$ і функцій $\dot{\theta}, \dot{\psi}$. Вектори ε і T складені з тих же компо-нентів, але є зміненими в порівнянні зі звичайним порядком їх розташування. Нехай

$$\begin{gathered}\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, k_{11}, k_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, k_{22})^T \,, \\ T = (T_{11}, T_{12}, T_{13}, M_{11}, M_{12}, T_{22}, T_{23}, M_{22})^T \,.\end{gathered} \tag{27}$$

Введемо також вектор лінійних параметрів

$$\varepsilon_l = (\varepsilon_1,\ \omega_1,\ \theta_1,\ \kappa_{1i},\ t_1, \varepsilon_2,\ \omega_2,\ \theta_2,\ \kappa_2,\ t_2, \theta, \psi)^T \,. \tag{28}$$

Використовуючи залежності (1) і (25), встановлюємо таке співвідношення між векторами $\dot{\varepsilon}$ і $\dot{\varepsilon}_l$

$$\dot{\varepsilon} = M_c \dot{\varepsilon}_l \,. \tag{29}$$

Матриця M_c задається коефіцієнтами, які позначимо c_{ij} $(i = 1,\ldots,8;\ j = 1,\ldots,12)$. Значення тих з них, що змінюються в процесі навантаження, визначаються за допомогою формул (індексом «0» нехтовано):

$$c_{11} = 1 + \varepsilon_1; \quad c_{12} = \omega_1; \quad c_{13} = \theta_1;$$

$$c_{21} = \omega_2; \quad c_{22} = 1 + \varepsilon_2; \quad c_{23} = \theta_1;$$

$$c_{26} = \omega_1; \quad c_{27} = 1 + \varepsilon_1; \quad c_{28} = \theta_1;$$

$$c_{32} = \psi, \quad c_{33} = 1 - \frac{1}{2}\left(\theta^2 + \psi^2\right);$$

$$c_{3,11} = 1 + \varepsilon_1 - \theta\theta_1; \quad c_{3,12} = \omega_1 - \theta_1\psi \,;$$

$$c_{41} = k_1 + \frac{1}{R_1}\left(1 + 2\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\psi^2\right); \quad c_{42} = t_1 + \frac{2}{R_1}\omega_2;$$

$$c_{43} = -(k_1\theta + t_1\psi) + \frac{1}{R_1}\left(2\theta_1{}^2 + \theta\right) + (a_1 - a_2)\theta\psi;$$

$$c_{44} = 1 + \varepsilon_1 - \theta\theta_1; \quad c_{45} = \omega_1 - t_1\psi;$$

$$c_{4,11} = -k_1\theta_1 + \frac{1}{R_1}(\theta_1 + \theta + \varepsilon_1\theta) + (a_1 - a_2)\theta_1\psi;$$

$$c_{4,12} = -t_1\theta_1 + \frac{1}{R_1}(1 + \varepsilon_1)\psi + (a_1 - a_2)\theta_1\theta;$$

$$c_{51} = t_2 + 2H\omega_2; \quad c_{52} = k_2 + 2H(1+\varepsilon_2) - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_2}(\vartheta^2 + \psi^2);$$

$$c_{53} = -(t_2\theta + k_2\psi) + 2H\theta_2 + \frac{1}{R_2}\psi - (a_1 - a_2)\theta\psi;$$

$$c_{54} = \omega_2 - \theta_2\theta; \quad c_{55} = 1 + \varepsilon_2 - \psi\theta_2;$$

$$c_{56} = t_1 + 2H\omega_1; \quad c_{57} = k_1 + 2H(1+\varepsilon_1) - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1}(\theta^2 + \psi^2);$$

$$c_{58} = -(t_1\psi + k_1\theta) + 2H\theta_1 - \frac{1}{R_2}\theta + (a_1 - a_2{}^2)\theta\psi; \quad c_{59} = \omega_1 - \theta_1\psi_1;$$

$$c_{5,10} = 1 + \varepsilon_1 - \theta_1\theta;$$

$$c_{5,11} = -(k_1\theta_2 + \theta_1 t_2) + \frac{1}{R_1}\theta_2 + \left(\frac{\omega_1}{R_2} + \frac{\omega_2}{R_1}\right)\theta + (a_1 - a_2)(\theta_2 - \theta_1)\psi;$$

$$c_{5,12} = -(t_1\theta_2 + k_2\theta_1) + \frac{1}{R_2}\theta_1 + \left(\frac{\omega_1}{R_2} + \frac{\omega_2}{R_1}\right)\psi + (a_1 - a_2)(\theta_2 - \theta_1)\theta;$$

$$c_{66} = 1 + \varepsilon_2; \quad c_{67} = \omega_2; \quad c_{68} = \theta_2;$$

$$c_{76} = \psi; \quad c_{77} = \theta_2; \quad c_{78} = 1 - \frac{1}{2}(\theta^2 + \psi^2);$$

$$c_{7,11} = \omega_2 - \theta\theta_2; \quad c_{7,12} = 1 + \varepsilon_2 - \theta_2\psi;$$

$$c_{86} = k_2 + \frac{1}{R_2}\left(1 + 2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\psi^2\right); \quad c_{87} = t_2 + \frac{2}{R_2}\omega_2;$$

$$c_{88} = -(k_2\psi + t_2\theta) + \frac{1}{R_2}(2\theta + \psi) - (a_1 - a_2)\theta\psi;$$

$$c_{89} = 1 + \varepsilon_2 - \psi\theta_2;$$

$$c_{8,10} = \omega_2 - \theta\theta_2; \quad c_{8,11} = -t_2\theta_2 + \frac{1}{R_2}(1+\varepsilon_2)\theta - (a_1 - a_2)\theta_2\psi;$$

$$c_{8,12} = -k_2\theta_2 + \frac{1}{R_2}(\theta_2 + \psi + \varepsilon_2\psi) - (a_1 - a_2)\theta_2\theta. \tag{30}$$

Якщо підставити (20) в рівняння (26), отримаємо

$$M_c\dot{\varepsilon}_l = A_*^{-1}\dot{T}.$$

Тут введено позначення оберненої матриці A_*^{-1}, яка відрізняється від A^{-1} перестановкою рядків відповідно перестановці компонентів векторів ε і T.

Другу групу рівнянь також отримаємо з варіаційного рівняння (25), застосувавши інтегрування частинами. Попередньо запишемо це рівняння без використання векторно-матричних позначень. Будемо мати

$$\iint_S \Big(\dot{T}_{11}\delta\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{T}_{12}\delta\dot{\varepsilon}_{12} + \dot{T}_{22}\delta\dot{\varepsilon}_{22} + \dot{T}_{13}\delta\dot{\varepsilon}_{31} + \dot{T}_{23}\delta\dot{\varepsilon}_{23} + \dot{M}_{11}\delta\dot{k}_{11} +$$

$$+ M_{22}\delta\dot{k}_{22} + \dot{M}_{12}\delta\dot{k}_{12} + T_{11}\delta\ddot{\varepsilon}_{11} + T_{12}\delta\ddot{\varepsilon}_{21} + T_{22}\delta\ddot{\varepsilon}_{22} + T_{13}\delta\ddot{\varepsilon}_{13} +$$

$$+ T_{23}\delta\ddot{\varepsilon}_{213} + M_{11}\delta\ddot{k}_{11} + M_{22}\delta\ddot{k}_{22} + M_{12}\delta\ddot{k}_{12}\,)ds + \iint_S \Big[\big(\dot{q}\,\theta_1 + q_0\dot{\theta}_1\big)\delta\dot{u} +$$

$$+ (\,\dot{q}\,\theta_2 + q_0\dot{\theta}_2\,)\delta\dot{v} - (\,\dot{q}(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\,) + q_0(\,\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2\,))\delta\dot{w}\Big]ds = 0. \qquad (31)$$

Тут

$$\delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij}\big(u_i\big)\delta\dot{u}; \qquad \delta\ddot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon''_{ij}\dot{u}_i\delta\dot{u}_i\,.$$

Враховуючи рівність (29), представимо вираз для $\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$ у вигляді

$$\delta\dot{\varepsilon} = M_c\delta\dot{\varepsilon}_l\,. \qquad (32)$$

Звідси випливає

$$\delta\ddot{\varepsilon} = \dot{M}_c\delta\dot{\varepsilon}_l\,. \qquad (33)$$

З врахуванням залежностей (32), (33), отримаємо

$$\iint_S \Big(\dot{T}^T M_c + T^T\dot{M}_c\Big)\delta\dot{\varepsilon}_c ds - \iint_S \Big[2q_0\dot{N}^T + \dot{q}\Big(2N^T_{2,0} + N^T_1\Big)\Big]\delta\dot{u}ds = 0.$$

Сума в дужках представляє собою вектор-рядок з дванадцяти елементів. В покомпонентному представлені варіація функціонала (31) набуває вигляду

$$\iint_S \Big(\dot{T}^*_{11}\delta\dot{\varepsilon}_1 + \dot{T}^*_{12}\delta\dot{k}_1 + \dot{T}^*_{13}\delta\dot{\theta}_1 + \dot{M}^*_{11}\delta\dot{k}_1 + \dot{M}^*_{12}\delta\dot{t}_1 + \dot{T}^*_{22}\delta\dot{\varepsilon}_2 + \dot{T}^*_{21}\delta\dot{\omega}_2 +$$

$$+ \dot{T}^*_{23}\delta\dot{\theta}_2 + \dot{M}^*_{22}\delta\dot{k}_2 + \dot{M}^*_{21}\delta\dot{t}_2 + \dot{\bar{T}}_{13}\delta\dot{\theta} + \dot{\bar{T}}_{23}\delta\dot{\psi}\Big)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2 +$$

$$+ \iint_S \{\,\big(\dot{q}\,\theta_1 + q_0\dot{\theta}_1\big)\delta\dot{u} + \big(\dot{q}\,\theta_1 + q_0\dot{\theta}_2\big)\delta\dot{v} -$$

$$- \big[\dot{q}\big(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\big) + q_0\big(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2\big)\big]\delta\dot{w}\,\}\alpha_1\alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \qquad (34)$$

Добуток $T^T\dot{M}_c$ перетворимо таким чином, щоб він виглядав як добуток деякої матриці M_p на вектор $\dot{\varepsilon}_l$

$$T^T\dot{M}_c = M_p\dot{\varepsilon}_l\,. \qquad (35)$$

З цієї рівності для коефіцієнтів матриці M_p, які позначимо p_{ij} $\big(i = 1,...,12,;\; j = 1,...,12\big)$, знаходимо такі вирази

$$p_{11} = T_{11} + \frac{2}{R_1}M_{11};\;\; p_{14} = M_{11};\;\; p_{17} = T_{12} + 2HM_{12};\;\; p_{1,10} = M_{12};$$

$$p_{1,11} = T_{13} + \frac{1}{R_1} M_{11}\theta; \quad p_{1,12} = \frac{1}{R_1} M_{11}\psi;$$

$$p_{22} = T_{11} + \frac{2}{R_1} M_{11}; \quad p_{25} = M_{11}; \quad p_{26} = T_{12} + 2HM_{12}; \quad p_{29} = M_{12};$$

$$p_{2,11} = \frac{1}{R_2} M_{12}\theta; \quad p_{2,12} = T_{13} + \frac{1}{R_2} M_{12}\psi;$$

$$p_{33} = T_{11} + \frac{2}{R_1} M_{11}; \; p_{34} = -M_{11}\theta; \; p_{35} = -M_{11}\psi;$$

$$p_{38} = T_{12} + 2HM_{12}; \quad p_{39} = -M_{12}\psi; \quad p_{3,10} = -M_{12}\theta;$$

$$p_{3,11} = M_{11}\left(\frac{1}{R_1} - k_1\right) + m_{11}(a_1 - a_2)\psi - M_{12}[t_2 + (a_1 - a_2\psi)] - T_{13}\theta;$$

$$p_{3,12} = -M_{11}[t_1 - (a_1 - a_2)\theta] - M_{12}\left[k_2 - \frac{1}{R_2}(a_1 - a_2)\theta\right] - T_{13}\psi;$$

$$p_{47} = M_{12}; \quad p_{48} = -M_{12}\theta; \quad p_{4,11} = -M_{11}\theta_1 - M_{12}\theta_2;$$

$$p_{56} = M_{12}; \quad p_{58} = -M_{12}\psi; \quad p_{5,11} = -M_{11}\theta_1 - M_{12}\theta_2;$$

$$p_{66} = T_{22} + \frac{2}{R_2} M_{22}; \quad p_{69} = M_{22};$$

$$p_{6,11} = \frac{1}{R_2} M_{22}\theta; \quad p_{6,12} = T_{23} + \frac{1}{R_2} M_{22}\psi;$$

$$p_{77} = T_{22} + \frac{2}{R_2} M_{22}; \quad p_{7,10} = M_{22};$$

$$p_{7,11} = T_{23} + \frac{1}{R_1} M_{12}\theta; \quad p_{7,12} = \frac{1}{R_1} M_{12}\psi;$$

$$p_{88} = T_{22} + \frac{2}{R_2} M_{22}; \quad p_{89} = -M_{22}\psi; \quad p_{8,10} = -M_{22}\theta;$$

$$p_{8,11} = -T_{23}\theta - M_{12}k_1 - M_{22}t_2 + \frac{1}{R_1} M_{12} - M_{22}(a_1 - a_2)\psi + M_{12}(a_1 - a_2)\psi;$$

$$p_{8,12} = -T_{23}\psi - M_{12}t_1 - M_{22}\left(k_2 - \frac{1}{R_2}\right) + M_{12}(a_1 - a_2)\theta - M_{12}(a_1 - a_2)\theta;$$

$$p_{9,12} = -M_{22}\theta_2 - M_{12}\theta_1; \quad p_{10,11} = -M_{22}\theta_2 - M_{12}\theta_1;$$

$$p_{11,11} = -T_{13}\theta_1 - T_{23}\theta_2 + \frac{1}{R_1} M_{11}(1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2R_1} M_{12}\omega_2 + \frac{1}{R_2} M_{22}(1 + \varepsilon_2);$$

$$p_{11,12} = (a_1 - a_2)(M_{11}\theta_1 - M_{22}\theta_2);$$

$$p_{12,12} = -T_{13}\theta_1 - T_{23}\theta_2 + \frac{1}{R_1}M_{11}(1+\varepsilon_1) + M_{12}\left(\frac{\omega_1}{R_2} + \frac{\omega_2}{R_1}\right) + \frac{1}{R_2}M_{22}(1+\varepsilon_2);$$

$$p_{ij} = p_{ji}. \qquad (36)$$

Не приведені в (36) коефіцієнти $p_{ij} = 0$.

Враховуючи вирази параметрів (2), рівняння (34) набуває такого вигляду

$$\iint\Big\{\left(L_1 - \dot{q}\theta_1 - q_0\theta_1\right)\delta\dot{u} + \left(L_2 - \dot{q}\theta_2 - q_0\dot{\theta}_2\right)\delta\dot{v} + \left[L_3 + \dot{q}(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \right.$$
$$\left. + q_0(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2)\right]\delta\dot{w} + L_4\delta\dot{\theta} + L_5\delta\dot{\psi}\Big\}A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 -$$
$$- \int_{\Gamma_1}\left(\dot{T}_{1,\nu}\delta\dot{u} + \dot{T}_{2,\nu}\delta\dot{v} + \dot{T}_{3,\nu}\delta\dot{w} + \dot{M}_{1,\nu}\delta\dot{\theta} + \dot{M}_{2,\nu}\delta\dot{\psi}\right)d\Gamma_1 = 0 \qquad (37)$$

де

$$L_1 = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_2\dot{T}_{11}^*}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1\dot{T}_{21}^*}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\dot{T}_{12}^* - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\dot{T}_{22}^*\right] - \frac{1}{R_1}\dot{T}_{13}^*;$$

$$L_2 = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_1\dot{T}_{22}^*}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_2\dot{T}_{12}^*}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\dot{T}_{21}^* - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\dot{T}_{11}^*\right] - \frac{1}{R_2}\dot{T}_{23}^*;$$

$$L_3 = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_2\dot{T}_{13}^*}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1\dot{T}_{23}^*}{\partial\alpha_2}\right] + \frac{\dot{T}_{11}^*}{R_1} + \frac{\dot{T}_{22}^*}{R_2};$$

$$L_4 = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_2\dot{M}_{11}^*}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1\dot{M}_{21}^*}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\dot{M}_{12}^* - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\dot{M}_{22}^*\right] - \dot{T}_{13}^*;$$

$$L_5 = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_1\dot{M}_{22}^*}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_2\dot{M}_{12}^*}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\dot{M}_{21}^* - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\dot{M}_{11}^*\right] - \dot{T}_{23}^*;$$

$$\dot{T}_{1,\nu} = \dot{T}_{11}^*l + \dot{T}_{21}^*m; \quad \dot{T}_{2,\nu} = \dot{T}_{12}^*l + \dot{T}_{22}^*m; \quad \dot{T}_{3,\nu} = \dot{T}_{13}^*l + \dot{T}_{23}^*m;$$

$$\dot{M}_{1,\nu} = \dot{M}_{11}^*l + \dot{M}_{21}^*m; \quad \dot{M}_{2,\nu} = \dot{M}_{12}^*l + \dot{M}_{22}^*m, \qquad (38)$$

l, m - косинуси кутів між напрямками дотичних до координатних ліній α_1, α_2 і нормаллю ν до елемента дуги контурної кривої. Припустимо, що на частині Γ_1 контурної кривої можуть бути задані зусилля і моменти, що не змінюються в процесі навантажування.

П'ять рівнянь стану отримаємо, прирівнюючи до нуля вираз в дужках при варіації швидкостей переміщень в (37). Вони формулюються відносно швидкостей десяти зусиль і моментів, які є проекціями в деформованому тілі на напрямки осей до деформації. В той же час, співвідношення пружності

(26) сформульовані в лагранжевій системі координат деформованого тіла. Необхідно їх також записати в початковій системі координат. Крім того, щоб отримати систему диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно перших похідних від переміщень, необхідно знайти вирази для десяти параметрів $\varepsilon_i,\ \omega_i,\ \dot{\theta}_i,\ \kappa_i,\ t_i\ (i=1,2)$ через похідні по λ від проекцій зусиль, моментів і переміщень. Введемо позначення вектор-стовпців

$$\dot{Y}=\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\\ \dot{y}_4\\ \dot{y}_5\end{pmatrix};\ \dot{Z}=\begin{pmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\\ \dot{z}_4\\ \dot{z}_5\end{pmatrix};\ \dot{T}_1=\begin{pmatrix}\dot{T}_{11}\\ \dot{T}_{12}\\ \dot{T}_{13}\\ \dot{M}_{11}\\ \dot{M}_{12}\end{pmatrix};\ \overline{T}_2=\begin{pmatrix}T_{22}\\ T_{23}\\ M_{22}\end{pmatrix};\ \dot{T}_3=\begin{pmatrix}\dot{\overline{T}}_{13}\\ \dot{\overline{T}}_{23}\end{pmatrix};$$

$$\dot{\varepsilon}_{l,1}=\begin{pmatrix}\dot{\varepsilon}_1\\ \dot{\omega}_1\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{k}_1\\ \dot{t}_1\end{pmatrix};\ \dot{\varepsilon}_{l,2}=\begin{pmatrix}\dot{\varepsilon}_{21}\\ \dot{\omega}_2\\ \dot{\theta}_{21}\\ \dot{k}_2\\ \dot{t}_2\end{pmatrix};\ \dot{\varepsilon}_{l,3}=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix},$$

де

$$\dot{y}_1=\dot{T}_{11}^*;\quad \dot{y}_2=\dot{T}_{12}^*;\quad \dot{y}_3=\dot{T}_{13}^*;\quad \dot{y}_4=\dot{M}_{11}^*;\quad \dot{y}_5=\dot{M}_{12}^*;$$

$$\dot{z}_1=\dot{T}_{22}^*;\quad \dot{z}_2=\dot{T}_{21}^*;\quad \dot{z}_3=\dot{T}_{23}^*;\quad \dot{z}_4=\dot{M}_{22}^*;\quad \dot{z}_5=\dot{M}_{21}^*.$$

Матриці M_c і M_p представимо у вигляді блоків

$$M_c=\begin{pmatrix}M_{c,11} & M_{c,12} & M_{c,13}\\ M_{c,21} & M_{c,22} & M_{c,23}\end{pmatrix};\quad M_p=\begin{pmatrix}M_{p,11} & M_{p,12} & M_{p,13}\\ M_{p,21} & M_{p,22} & M_{p,23}\\ M_{p,31} & M_{p,32} & M_{p,33}\end{pmatrix}.$$

Компонентами матриці $M_{c,11}$ є та частина з компонентів матриці $M_c(c_{ij})$, для яких $i=1,...,5;\ j=1,5$. Відповідно матриці $M_{c,12}$ - $i=1,...,5;\ \ j=6,...,10$, матриці $M_{c,13}$ – $i=1,...,5;\ j=11,12$, матриці $M_{c,21}$ – $i=6,7,8;\ j=1,...,5$, $M_{c,22}$ – $i=6,7,8;\ j=6,...,10$, $M_{c,23}$ – $i=6,7,8;\ j=11,12$. Компоненти матриці M_p за блоками розподіляються так:

$M_{p,11}\ (i=1,...,5;\ j=1,...,5)$; $\quad M_{p,12}\ (i=1,...,5;\ j=6,...,10)$;

$M_{p,13}\ (i=1,...,5;\ j=11,12)$; $\quad M_{p,21}\ (i=6,...,10;\ j=1,...,5)$;

$M_{p,22}\ (i=6,...,10;\ j=6,...,10)$; $M_{p,23}\ (i=6,...,10;\ j=11,12)$;

$M_{p,31}\ (i=11,12;\ j=1,...,5)$; $M_{p,32}\ (i=11,12;\ j=6,...,10)$;

$M_{p,33}\ (i=11,12;\ j=11,12)$.

Рівняння (26) і (35) з урахуванням введених позначень набуває вигляду

$$M_{c,11}^T\dot{T}_1+M_{c,21}^T\dot{T}_2+M_{p,11}\dot{\varepsilon}_{l,1}+M_{p,12}\dot{\varepsilon}_{l,2}=Y-M_{p,13}\dot{\varepsilon}_{l,3};$$

$$M_{c,12}^T\dot{T}_1+M_{c,22}^T\dot{T}_2+M_{p,21}\dot{\varepsilon}_{l,1}+M_{p,22}\dot{\varepsilon}_{l,2}=Z-M_{p,23}\dot{\varepsilon}_{l,3};$$

$$M_{c,13}^T\dot{T}_1+M_{c,23}^T\dot{T}_2+M_{p,31}\dot{\varepsilon}_{l,1}+M_{p,32}\varepsilon_{l,2}+M_{p,33}\dot{\varepsilon}_{l,3}=T_3;$$

$$A_*^{-1}\dot{T}-M_{c,1}\dot{\varepsilon}_{l,1}-M_{c,2}\dot{\varepsilon}_{l,2}=M_{c,3}\dot{\varepsilon}_{l,3}. \quad (39)$$

Матричні рівняння цієї системи дозволяють виразити 18 параметрів (8 компонент вектора $\dot{T}$, 10 компонент векторів $\varepsilon_{l,1}$, $\varepsilon_{l,2}$) через компоненти векторів Y, Z і $\varepsilon_{l,3}$. Для цього слід використати 1-е, 2-е і 4-е рівняння системи (30). Якщо відомі вказані параметри, то третє рівняння системи (39) дозволяє виразити проекції зусиль $\overline{T}_{13}$, $\overline{T}_{23}$ також через компоненти $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$. У зв'язку з появою матриць M_c і M_p виконати вказану процедуру, використовуючи систему (39) в цілому, неможливо.

Останнє рівняння системи (39) можна записати так

$$\dot{T}=A_*M_c\dot{\varepsilon}_c. \quad (40)$$

Розділивши матрицю $M_c^T A_* M_c+M_p$ на окремі блоки, отримаємо систему відносно компонент-вектора $\dot{\varepsilon}_l$

$$m_{11}\dot{\varepsilon}_{l,1}+m_{12}\dot{\varepsilon}_{l,2}=\dot{Y}-m_{13}\varepsilon_{l,3};$$

$$m_{21}\dot{\varepsilon}_{l,1}+m_{22}\dot{\varepsilon}_{l,2}=\dot{Z}-m_{23}\varepsilon_{l,3}, \quad (41)$$

де m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} – матриці розміром 5x5.

Ввівши позначення матриць

$$n_{22}=m_{22}-m_{21}m_{11}^{-1}m_{12};\qquad n_{23}=m_{23}-m_{21}m_{11}^{-1}m_{13};$$

$$n_{33}=m_{21}m_{11}^{-1};\qquad n_{11}=m_{11}^{-1}+m_{11}^{-1}m_{12}n_{22}^{-1}n_{23};$$

$$n_{12}=m_{11}^{-1}m_{12}n_{22}^{-1};\qquad n_{13}=m_{11}^{-1}m_{13}-m_{11}^{-1}m_{12}n_{22}^{-1}n_{23}, \quad (42)$$

запишемо вирази векторів $\varepsilon_{l,1}$, $\varepsilon_{l,2}$ через вектори Y, Z і $\varepsilon_{l,3}$

$$\varepsilon_{l,1}=n_{11}Y-n_2Z-n_{13}\varepsilon_{l,3}; \quad (43)$$

$$\varepsilon_{l,2}=-n_{22}^{-1}n_{33}Y+n_{22}^{-1}Z-n_{22}^{-1}n_{23}\varepsilon_{l,3}. \quad (44)$$

Вектор T_3 знаходиться за допомогою співвідношення

$$T_3 = m_{31}\dot{\varepsilon}_{l,1} + m_{32}\dot{\varepsilon}_{l,2} + m_{33}\dot{\varepsilon}_{l,3}\,,$$

при підстановці значення векторів (43), (44). Якщо урахувати вирази параметрів ε_i, ω_i, θ_i, κ_i, t_i через переміщення (2), то стає очевидним, що вирази (43), (44) представляють собою розв'язані відносно похідних (коваріантних) від швидкостей переміщень по координаті α_1 (43) і

$$F_{3i} = \left(c_{41}, c_{42}, c_{43}\right)\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix} + \left(p_{41}, p_{42}, p_{43}\right)\begin{pmatrix} b_{4i} \\ b_{5i} \\ b_{6i} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3; \tag{44}$$

диференціальні рівняння.

В диференціальних рівняннях стани

$$L_1 - \dot{q}\theta_1 - q_0\theta_1 = 0; \quad L_2 - \dot{q}\theta_2 - q_0\dot{\theta}_2 = 0;$$

$$L_3 + \dot{q}\left(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) + q_0\left(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2\right) = 0; \; L_4 = 0; \; L_5 = 0\,, \tag{45}$$

виразу L_i (38) мають похідні за двома просторовими координатами від компонент-векторів $\dot{Y}$ і $\dot{Z}$. Однак їх можна записати у вигляді нормальної оперативної форми Коші за координатою α_1 (чи α_2), якщо в якості розв'язувальних функцій вибрати компоненти вектора $\dot{Y}$ (чи $\dot{Z}$). Система рівнянь (43), (44) отримана в припущенні першого варіанту вибору, так як друге з цих рівнянь є допоміжним і слугує для виключення компонент-вектора $\dot{\bar{Z}}$ з рівнянь (43), (44). Таким чином, якщо, окрім компонентів вектора $\dot{Y}$, знайденими є також швидкості $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$, то п'ять рівнянь матричного рівняння (43) і п'ять рівнянь рівноваги (45), розв'язаних відносно похідних за координатою α_1, представляють нормальну систему рівнянь Коші. Так як ці рівняння в операторній формі отримані з умов стаціонарності функціонала Рейсснера, записаного відносно швидкостей при квазістатичних процесах навантажування, то отримані рівняння мають гамільтонову форму і їх можна назвати канонічними рівняннями нелінійної теорії анізотропних оболонок типу Тимошенко. Канонічними змінними в цьому випадку є швидкості переміщень і напружень. Ці рівняння розглядаються одночасно з системою звичайних диференціальних рівнянь за параметром λ

$$\frac{dU}{d\lambda} = \dot{U}; \quad \frac{dY}{d\lambda} = \dot{Y} \tag{46}$$

і відповідними початковими умовами при $\lambda = 0$.

Такий підхід до розв'язку нелінійних задач механіки твердого деформованого тіла описаний в роботі [6].

4. Розрахунок гофрованої арки.

В якості прикладу, що дає можливість продемонструвати особливості розробленого варіанту теорії і алгоритм розв'язку нелінійних задач, розглянемо стійкість і закритичну поведінку довгих гофрованих циліндричних панелей чи, що те ж саме, арок одиничної ширини при зовнішньому тиску. В цьому випадку всі функції в рівняннях (43)-(45) будуть залежать лише від координати α_2. Матриця M_c при цьому буде складатись з елементів 6, 7 і 8-о рядка і 6, 8, 9 і 12-го стовпців матриці M_c, а матриця M_p набуває вигляду

$$M_p = \begin{pmatrix} p_{66} & p_{68} & p_{69} & p_{6,12} \\ p_{86} & p_{88} & p_{89} & p_{8,12} \\ p_{96} & p_{98} & p_{99} & p_{9,12} \\ p_{12,6} & p_{12,8} & p_{12,9} & p_{12,12} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Відповідно змінюється кількість компонентів векторів T, ε_l, Z: вектор $T = (T_{22}, T_{23}, M_{22})^T$, вектор $\lambda = 0$, вектор $Z = (z_1, z_3, z_4)^T$. Що стосується вектора T_3, то він буде містити лише елемент $\overline{T}_{23}$. Для визначення компонентів векторів $\dot{T}$ і $\dot{\varepsilon}_{l,2}(\varepsilon_2, \theta_2, k_2)$ через розвязувальні функції z_i складаємо систему з семи алгебраїчних рівнянь

$$M_c^T \dot{T} + M_p \dot{\varepsilon}_l = \begin{pmatrix} \dot{Z} \\ \dot{\overline{T}}_{23} \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} \dot{T} - M_c \dot{\varepsilon}_l = 0, \tag{48}$$

де $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{22} & 0 & A_{23} \\ 0 & A_{77} & 0 \\ A_{23} & 0 & A_{44} \end{pmatrix}$, $A_{22} = \dfrac{D_{22}}{\Delta}$, $A_{23} = -\dfrac{B_{22}}{\Delta}$,

$$A_{44} = -\frac{C_{22}}{\Delta}, \ A_{77} = \frac{1}{C_{44}}, \ \Delta = C_{22} D_{22} - B_{22}^2.$$

Нумерація компонентів векторів і матриць M_c і M_p змінена у відповідності з їх розмірами. В цій системі 4-й рядок є виразом допоміжної функції $\overline{T}_{23}$ через компоненти векторів $\dot{T}$ і $\dot{\varepsilon}_l$:

$$\overline{T}_{23} = c_{41}\dot{T}_{22} + c_{42}\dot{T}_{23} + c_{43}\dot{M}_{22} + p_{41}\dot{\varepsilon}_2 + p_{42}\dot{\theta}_2 + p_{43}\dot{k}_2 + p_{44}\dot{z}_6, \tag{49}$$

де $z_6 = \psi$ $(z_4 = v, \ z_5 = w, \quad z_6 = \psi)$. Решту шість рівнянь запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & p_{13} & p_{23} & p_{33} \\ A_{22} & 0 & A_{23} & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ 0 & A_{77} & 0 & -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} \\ A_{23} & 0 & A_{44} & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_{22} \\ \dot{T}_{23} \\ \dot{M}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 - p_{14}\dot{z}_6 \\ \dot{z}_3 - p_{24}\dot{z}_6 \\ \dot{z}_4 - p_{34}\dot{z}_6 \\ c_{14}\dot{z}_6 \\ c_{24}\dot{z}_6 \\ c_{34}\dot{z}_6 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Якщо позначити коефіцієнти матриці, оберненої до матриці, що знаходиться зліва в рівності (50), як b_{ij}, то отримаємо

$$\dot{T}_{22} = \sum_{i=1}^{3} b_{1i}\dot{z}_i + d_1\dot{z}_6; \qquad \dot{T}_{23} = \sum_{i=1}^{3} b_{2i}\dot{z}_i + d_2\dot{z}_6;$$

$$\dot{M}_{22} = \sum_{i=1}^{3} b_{3i}\dot{z}_i + d_3\dot{z}_6; \quad \dot{\varepsilon}_2 = \sum_{i=1}^{6} b_{4i}\dot{z}_i + d_4\dot{z}_6;$$

$$\dot{\theta}_2 = \sum_{i=1}^{3} b_{5i}\dot{z}_i + d_5\dot{z}_6; \qquad \dot{k}_2 = \sum_{i=1}^{3} b_{6i}\dot{z}_i + d_6\dot{z}_6, \qquad (51)$$

де

$$b_{pi}(i) = p_{ij}\ ; \quad b_p(i+1) = c_{i4}; \qquad (i = 1,2,3);.$$

$$d_j = -\sum_{i=1}^{3} b_{ij}p_{i4} + \sum_{i=4}^{6} b_{ij}c_{i-3,4}; \quad j = 1,\ldots,6.$$

З урахуванням виразу (51) функція $\dot{\bar{T}}_{23}$ набуває вигляду

$$\dot{\bar{T}}_{23} = \sum_{i=1}^{3} F_{3i}z_i + F_{36}z_6,$$

при таких значеннях коефіцієнтів F_{3i}:

$$F_{3i} = (c_{41}, c_{42}, c_{43}) \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix} + (p_{41}, p_{42}, p_{43}) \begin{pmatrix} b_{4i} \\ b_{5i} \\ b_{6i} \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,3;$$

$$F_{36} = (c_{41}, c_{42}, c_{43}) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + (p_{41}, p_{42}, p_{43}) \begin{pmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix} + p_{44}. \qquad (52)$$

Отримані вирази (51), (52) компонентів векторів $\dot{T}$, $\dot{T}_3$, $\dot{\varepsilon}_{l,2}$ через функції z_i дозволяють записати розв’язувальні систему рівнянь в такому вигляді

$$\frac{dz_k}{d\varphi} = A_2 \sum_{k=1}^{7} F_{ki} z_i, \tag{53}$$

де, окрім введених вище шести вирішених функцій, присутня також сьома функція $\dot{z}_7 = \dot{q}$. Однорідна система шести рівнянь (53) містить сім невідомих функцій $\dot{z}_i$. Вектор $\dot{Z}$ встановлює напрямок дотичної до кривої множини розв'язків системи (53). Цей вектор має одиничну довжину [6]. Приєднавши до системи (53) умову $\sum_{i=1}^{7} z_i^2 = 1$, отримаємо можливість знайти розв'язок задачі. При знайдених швидкостях z_i необхідно встановити швидкість компонент-вектора $\dot{T}$ за допомогою співвідношень (50), так як швидкості переміщень вже відомі. Наступний крок алгоритму полягає у розв'язку задачі Коші

$$\frac{dT}{d\lambda} = \dot{T}; \quad \frac{dU}{d\lambda} = \dot{U}, \tag{54}$$

з нульовими початковими умовами

$$T = 0; \quad U = 0, \tag{55}$$

при $\lambda = 0$.

Процедура отримання чисельного розв'язку подібної задачі викладена в роботах [2, 19, 22].

Результати розрахунку представимо для арки, осьова лінія якої в полярній системі координат R, φ описується рівнянням

$$R = R_0 \left(1 - \gamma \sin m\pi \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_N - \varphi_0} \right), \tag{56}$$

де R_0 – радіус вихідного кола, яке набуває хвилястості у вигляді синусоїди з m півхвиль з амплітудою γR_0, а φ_0 і φ_N – початкові та кінцеві значення координати φ (рис.1). Кривина $\frac{1}{R_2}$ і параметр Ляме A_2 визначаються за відомими формулами диференціальної геометрії.

Припускаємо, що арка завантажена місцевим зовнішнім тиском інтенсивністю q. Критичне значення тиску для колової арки визначається за формулою [20]

$$q_0 = \frac{D_{22}}{R_0^3} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right) p, \tag{57}$$

де $p \le 1$ - коефіцієнт впливу поперечної зсувної жорсткості. Його значення дорівнює

$$p = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} \frac{D_{22}}{R_0^2 C_{44}}}. \qquad (58)$$

Нижче при огляді деформування гофрованих арок навантаження будемо визначати по відношенню до його критичної величини (57). З аналізу формул (57), (58) стійкість арки залежить не лише від згинальної жорсткості D_{22}, але й від відношення $\frac{D_{22}}{R_0^2 C_{44}}$, де C_{44} - жорсткість поперечного зсуву. Це відношення має відповідну величину для кожного композиційного матеріалу. Нижче будемо розглядати арку з склопластику з об'ємним вмістом волокон $\xi = 0{,}7$. Модуль пружності волокон $E_a = 72$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu_a = 0{,}2$. Відповідно для епоксидного в'яжучого $E = 3{,}15$ ГПа, $\nu = 0{,}382$. Волокна напрямлені вздовж осьової лінії арки. Відношення $\frac{D_{22}}{R_0^2 C_{44}}$ у випадку одношарової арки встановлюється величиною $\frac{t^2}{2R_0^2(1 - \nu_1 \nu_2)} \frac{E_2}{G_{23}}$.

Для вказаного склопластику $\frac{E_2}{G_{23}} = 9{,}6$.

Серед багатьох особливостей, що проявляються при деформуванні арки з композитів, розглянемо лише залежність кривих навантажування від хвильового параметра m в формулі (56) і форм згину в докритичному і закритичному станах. На рис.2 показані криві, що описують зміну при прирості навантаження прогину вершини арки, для якої відношення $\frac{t}{R_0} = 100$, кути $\varphi_0 = 0$, $\varphi_N = \pi$, при $m = 0, 1, 2, 3, 4$, $\gamma = 0{,}1$. Криві позначені цифрами, рівними m. Колова арка $(m = 0)$ має стійку закритичну поведінку до $w / t = 60$, що підтверджує результат праці [6]. При $m = 1, 3, 4$ закритичний стан також стійкий, але біфуркація відбувається при $q_c / q_0, < 1$. Якщо $m = 2$, то деформування відбувається без біфуркації з інтенсивним наростанням прогинів при $q_c / q_0 > 0{,}5$. Така поведінка арки пояснюється тим, що її вихідна геометрія співпадає з формою випучування колової арки. Однак при деяких початкових формах арки, деформування яких супроводжується явищем біфуркації, закритичний стан може бути нестійким. На рис.3 приведені криві навантажування для арок з кількістю півхвиль рівним 5, 6, 7. Всі ці криві після проходження критичної точки мають негативний нахил, що свідчить про нестійку поведінку арок такої геометрії. Таке розмаїття закритичної поведінки арок з різною кількістю півхвиль (рис.2 и рис.3), обґрунтовано характером розподілу прогинів по периметру арок в докритичному і закритичному станах. Криві 1, 2, 3 на рис.4 і рис.5 описують форми арок в недеформованому стані, в докритичному і закритичному деформованому стані. При $m=7$ (рис.4) закритична форма симетрична відносно вертикального радіуса, при $m=9$ (рис.5) – форма кососиметрична. В першому випадку критична точка є граничною, в другому – точкою біфуркації. Якщо при деформування досягається гранична точка, то закритичний стан арки буде нестійким (арка пропускає), якщо ж досягається точка біфуркації, то закритичний стан буде стійким, супроводжуючись розвитком великих прогинів при незначному підвищенні критичного навантаження. Характер закритичної поведінки залежить від початкової форми арок, встановленої в даному випадку кількістю півхвиль m.

Висновки.

1. Розроблена процедура виводу канонічної системи диференціальних рівнянь нелінійної теорії анізотропних оболонок типу Тимошенко, яка використана незалежно від порядку нелінійності співвідношень між переміщеннями і деформаціями. В роботі вона реалізована при урахуванні в виразах деформацій поперечного зсуву, кривин і кручення складових третього ступеня. В основі підходу покладено використання матричних операцій, що виконуються як дії елементарної алгебри з використанням бібліотеки стандартних програм алгоритмічної мови FORTRAN.

2. Методом Гамільтона з функціонала потенціальної енергії виведений канонічний інтеграл, що співпадає з функціоналом Рейсснера, в якому узагальненими координатами й імпульсами є швидкості переміщень, зусиль і моментів. В якості параметру продовження, за яким виконується диференціювання змінних, прийнято довжину кривої множини розв'язків. При розв'язку системи диференціальних рівнянь реалізується ідея рівноправ'я змінних і навантаження [6].

3. Ілюстрацією використання всіх етапів розробленої процедури є розв'язання задачі про нелінійне деформування гофрованої арки. На відміну від роботи [23], тут розглянуто синусоїдальне гофрування.

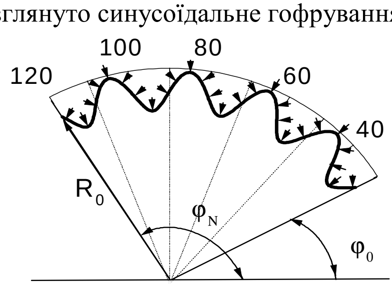

Рис.1

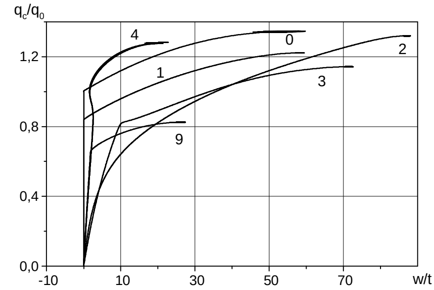

Рис. 2

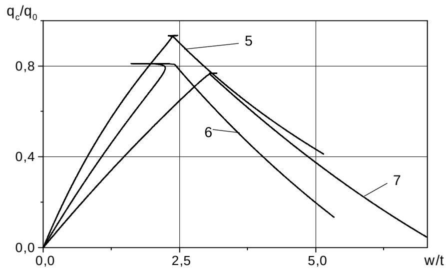

Рис. 3

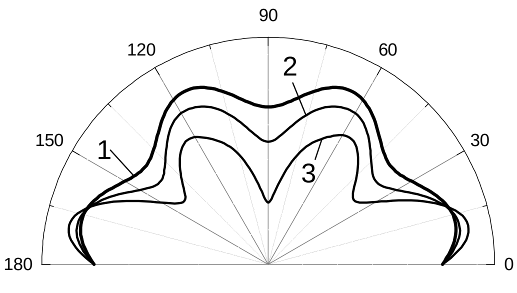

Рис. 4

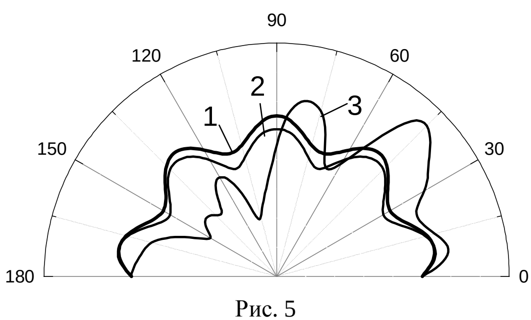

Рис. 5

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с. **2.**Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела, 2010. – 352 с. **3.** Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с. **4.** Ванин Г.Л., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. — К.: Наук. думка, 1978. — 212 с. **5.** Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с. **6.** Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с. **7.** Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – К: Наук. думка, 1973.— 228 с. **8.** Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 511 с. **9.** Давыденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР. –1953. – 88, №4. – С.601 – 602. **10.** Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. Аналитическая механика континуальных систем. – К.: Наук. думка, 1979. – 188 с. **11.** Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с. **12**. Лехницкий А.К. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с. **13**. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.Л ОГИЗ, 1948. – 211 с. **14**. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кепплер Х., Кочык З. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища шк., Лейпциг: Фахбухферлаг, 1982. – 480 с. **15**. Семенюк М.П., Жукова Н.Б. О точности нелинейных соотношений теории оболочек типа Тимошенко в случае пренебрежения поперечным обжатием // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 10. – С. 30 – 36. **16**. Семенюк М.П., Трач В.М., Жукова Н.Б. Модифікація принципа Ху-Васідзу стосовно одного класу задач теорії пружності // Доп. НАН України. Сер. А – 2006, №12. – С. 52-59. **17**. Семенюк Н.П., Трач В.М., Жукова Н.Б. Смешанный вариационный принцип и канонические системы уравнений устойчивости // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 5. – С. 55 – 62. **18**. Семенюк Н.П., Трач В.М., Мерзлюк В.В. О канонических уравнениях теории оболочек Кирхгофа-Лява // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 10. – С. 99 –107. **19**. Семенюк Н.П., Трач В.М., Остапчук В.В. О нелинейном осесимметричном деформировании анизотропных сферических оболочек // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 10. – С. 83 – 95. **20**. Тарнопольский Ю.М., Скудра А.М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. – Рига: Зинатне, 1966. – 260 с. **22**. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с. **23**. Boriseiko A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Canonical equation in the geomatrically nonlinear theory of thin anisotropic shells // Int. Appl. Mech. - 2010. – 46, N 2. – P. 165 – 174. **24**. Semenyuk N.P. Устойчивость гофрированных арок при внешнем давлении (в печати) // Int. Appl. Mech. - 201. – 4 , N . – P.. **25**. Shul'ga N.A. A mixed system of equations of elasticity // Int. Appl. Mech. - 2010. – 46, N 3. – P. 2 . **27**. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. – 1944. – 23. – P. 184 – 191.