

УДК 624.012

**МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ДІАГРАМИ ДЕФОРМУВАННЯ « $\sigma_c - \varepsilon_c$ »  
ДЛЯ БЕТОНУ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ  
ЗГІНАЛЬНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
« $\sigma_c - \varepsilon_c$ » ДЛЯ БЕТОНА НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ**

**COMPRESSION DIAGRAM (STRESS-STRAIN) OF CONCRETE BASED  
ON EXPERIMENTAL RESEARCH OF REINFORCE CONCRETE  
BENDING ELEMENT**

**Гомон П.С., к.т.н.** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

**Гомон П.С., к.т.н.** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

**Gomon P.S., candidate of technical sciences**  
( National university of water managements and natural recourses used, Rivne )

**Наведена методика побудови діаграми деформування бетону « $\sigma_c - \varepsilon_c$ » на  
основі експериментальних досліджень згинальних залізобетонних  
елементів прямокутного перерізу.**

**Приведенная методика построения диаграммы деформирования бетона  
« $\sigma_c - \varepsilon_c$ » на основе экспериментальных исследований изгибаемых  
железобетонных элементов прямоугольного сечения.**

**The examples of drawing wood compression diagram (stress-strain) based on  
experimental research of rectangular reinforce concrete bending element.**

**Ключові слова:**

Балка, бетон, діаграма деформування.

Балка, бетон, диаграмма деформирования.

Stress-strain diagram, beams, reinforce concrete.

**Стан питання. Постановка проблеми.** З високим технологічним проривом обчислювальної техніки з'явилися умови для використання складних і високоточних методів розрахунку залізобетонних конструкцій. Ці методи не є інженерними, проте дозволяють різнобічно проаналізувати стан конструкції, щоб забезпечити її надійність та довговічність експлуатації. В сучасних нормах [ 1 ] виникла необхідність у використанні діаграми деформування, які можна отримати на основі випробування бетонних та арматурних зразків. Проте часто трапляються випадки коли отримати ці діаграми для зразків не можливо. В статті запропоновано метод побудови діаграми деформування арматури і бетону, використовуючи дані по випробуванню згинального елемента.

**Теоретичний аналіз.** В роботах [ 1, 3, 4 ] були описані діаграми деформування бетону та арматури, а також було встановлено, що діаграма деформування арматури на розтяг на початку випробування має прямолінійну залежність до її ділянки текучості. Діаграма деформування бетону на стиск має нелінійний характер, що свідчить про присутність пластичних деформацій.

Для побудови діаграми деформування бетону та арматури необхідно використати дані отриманих при випробуванні залізобетонної балки на згин, а саме відносних деформацій в крайніх стиснутих волокнах бетону, деформацій розтягнутих волокнах арматури та прикладеного згинального моменту.

Основними передумовами для побудови діаграми деформування бетону та арматури є:

- для згинальних елементів використовується гіпотеза плоских перерізів.
- волокна бетону в згинальному елементі мають однакові властивості по висоті балки.

Припустимо, в експериментальних дослідженнях були отримані значення згинального моменту  $M_n$  (де  $n$  - рівні завантаження) та  $\mathcal{E}_{c,n}$  та  $\mathcal{E}_{s,n}$  відносні деформації відповідно найбільш стиснутих волокон бетону та розтягнутої арматури на різних рівнях завантаження.

Для побудови епюр напружень в бетоні використано покрокову методику аналізу випробування, яка передбачає послідовне визначення напружень, що виникають в крайніх волокнах стиснутого бетону, при різних рівнях завантаження (від першого до кінцевого). Суть методики полягає в тому, що встановлені значення внутрішніх напружень певних рівнів та експериментальні дані використовуються для подальшого визначення наступних значень напружень. Покрокова методика побудови епюри напружень дає змогу зобразити нисхідну вітку деформування бетону.

**Рішення задачі.** Розглянемо систему рівноваги при  $n$ -ому рівні завантаження. Значення згинальних моментів  $M_1 \dots M_n$ , відносних

деформацій арматури  $\varepsilon_{s,1} \dots \varepsilon_{s,n}$ , бетону  $\varepsilon_{c,1} \dots \varepsilon_{c,n}$  нам відомо з експерименту, а значення  $\sigma_{c,1} \dots \sigma_{c,n-1}$  відомі з попередніх розрахунків. Нам необхідно визначити напруження  $\sigma_{c,n}$  в найбільш стиснутому волокні бетону (рис.1).

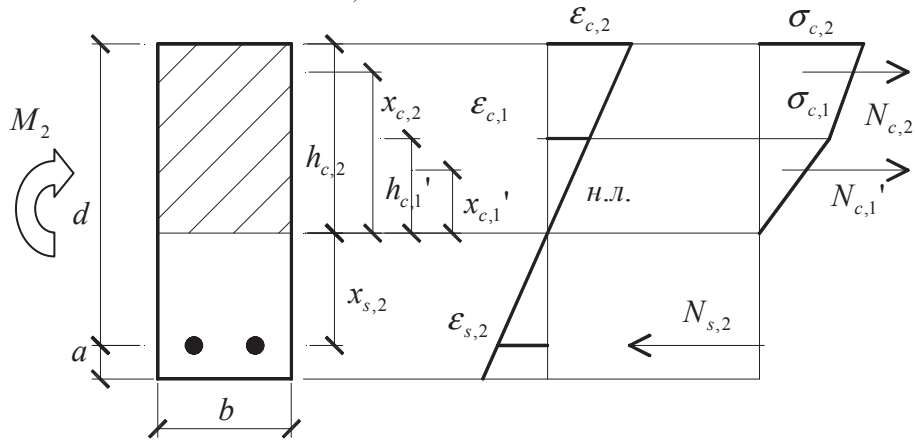


Рис. 1 Епюра напружень при другому завантаженні балки

Можна записати систему рівноваги для всіх рівнів завантаження, яка включає в себе суму моментів відносно нейтральної лінії, а також суму всіх зусиль спроектовану на повздовжню вісь балки

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} N_{c,i} + N_{c,n} = N_{s,n} \\ M_n = \sum_{i=1}^{n-1} N_{c,i} \cdot x_{c,i} + N_{c,n} \cdot x_{c,n} + N_{s,n} \cdot x_{s,n} \end{cases}, \quad (1)$$

де зусилля, які виникають в бетоні та арматурі будуть дорівнювати

$$\sum_{i=1}^{n-1} N_{c,i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (\sigma_{c,i-1} + \sigma_{c,i}) (h_{c,i} - h_{c,i-1}) b = ; \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (\sigma_{c,i-1} + \sigma_{c,i}) (\varepsilon_{c,i} \rho_n - \varepsilon_{c,i-1} \rho_n) b$$

$$N_{c,n} = \frac{1}{2} (\sigma_{c,n-1} + \sigma_{c,n}) (h_{c,n} - h_{c,n-1}) b = ; \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} b (\varepsilon_{c,n} \rho_n - \varepsilon_{c,n-1} \rho_n) (\sigma_{c,n-1} + \sigma_{c,n})$$

$$N_{s,n} = \sigma_{s,n} A_s, \quad (4)$$

$$\text{де } \rho_n = \frac{d}{\varepsilon_{c,n} + \varepsilon_{s,n}} - \text{кривина при } n\text{-ому рівні завантаження.} \quad (5)$$

Запишемо суму моментів відносно нейтральної лінії підставивши зусилля розтягу як суму зусиль стиску

$$M_n - \sum_{i=1}^{n-1} N_{c,i} \cdot x_{c,i} - \sum_{i=1}^{n-1} N_{c,i} \cdot x_{s,n} = N_{c,n} \cdot x_{c,n} + N_{c,n} x_{s,n}, \quad (6)$$

$$\text{де } x_{c,i} = (h_{c,i} - h_{c,i-1})\varphi_i + h_{c,i-1} = (\varepsilon_{c,i}\rho_n - \varepsilon_{c,i-1}\rho_n)\varphi_i + \varepsilon_{c,i-1}\rho_n; \quad (7)$$

$$x_{s,n} = \varepsilon_{s,n}\rho_n. \quad (8)$$

Враховуючи, що отримані зусилля дорівнюють зусиллям, обчисленим за формулами (2), (3) та (4), рівняння (1) прийме вигляд

$$\begin{aligned} & \sigma_{c,n}x_{c,n} + \sigma_{c,n}\varepsilon_{s,n}\rho_n + \sigma_{c,n-1}x_{c,n} - \\ & \frac{M_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}b(\sigma_{c,i-1} + \sigma_{c,i})(\varepsilon_{c,i}\rho_n - \varepsilon_{c,i-1}\rho_n)(x_{c,i} + \varepsilon_{s,n}\rho_n)}{\frac{1}{2}b(\varepsilon_{c,n}\rho_n - \varepsilon_{c,n-1}\rho_n)} + \\ & + \sigma_{c,n-1}\varepsilon_{s,n}\rho_n = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\varphi_i$  - коефіцієнт, який враховує центр ваги ділянки (за першого завантаження необхідно прийняти 2/3).

Рівняння (9) можна записати, як рівняння з двома невідомими  $\sigma_{c,n}$  та  $x_{c,n}$

$$x_1x_2 + a_1x_1 + a_2x_2 - a_3 = 0, \quad (10)$$

де  $x_1 = \sigma_{c,n}$  - напруження в стиснутій зоні при  $n$  - завантаженні;

$x_2 = x_{c,n}$  - відстань від нейтральної лінії до центру ваги трапеції останньої стиснутої зони;

$a_1 = \varepsilon_{s,n}\rho_n$ ;  $a_2 = \sigma_{c,n-1}$  - константи рівняння;

$$a_3 = \frac{M_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}b(\sigma_{c,i-1} + \sigma_{c,i})(\varepsilon_{c,i}\rho_n - \varepsilon_{c,i-1}\rho_n)(x_{c,i} + \varepsilon_{s,n}\rho_n)}{\frac{1}{2}b(\varepsilon_{c,n}\rho_n - \varepsilon_{c,n-1}\rho_n)} - \sigma_{c,n-1}\varepsilon_{s,n}\rho_n. \quad (11)$$

Визначимо відстань до центру ваги  $n$ -ої трапеції обмеженої зусиллями  $\sigma_{c,n}$ ,  $\sigma_{c,n-1}$ .

$$x_{c,n} - h_{c,n-1} = \frac{\frac{1}{2}(h_{c,n} - h_{c,n-1})^2 \sigma_{c,n-1} + \frac{1}{3}(h_{c,n} - h_{c,n-1})^2 (\sigma_{c,n} - \sigma_{c,n-1})}{(h_{c,n} - h_{c,n-1}) \sigma_{c,n-1} + \frac{1}{2}(h_{c,n} - h_{c,n-1})(\sigma_{c,n} - \sigma_{c,n-1})}, \quad (12)$$

де  $h_{c,n}$  та  $h_{c,n-1}$  дорівнюють відповідно  $\varepsilon_n \rho_n$  та  $\varepsilon_{c,n-1} \rho_n$ .

Спростивши рівняння (12), ми отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{c,n} x_{c,n} - \sigma_{c,n} \left( h_{c,n-1} + \frac{2}{3}(h_{c,n} - h_{c,n-1}) \right) + \sigma_{c,n-1} x_{c,n} - \\ - \left( \sigma_{c,n-1} h_{c,n-1} + \frac{1}{3} \sigma_{c,n-1} (h_{c,n} - h_{c,n-1}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Запишемо попередній вираз (13), як рівняння з двома невідомими

$$x_1 x_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3 = 0, \quad (14)$$

де  $x_1 = \sigma_{c,n}$  та  $x_2 = x_{c,n}$ , як зазначено вище

$$k_1 = -\frac{1}{3} \varepsilon_{c,n-1} \rho_n - \frac{2}{3} \varepsilon_{c,n} \rho_n; \quad k_2 = \sigma_{c,n-1}; \quad (15)$$

$$k_3 = \frac{2}{3} \sigma_{c,n-1} \varepsilon_{c,n-1} \rho_n + \frac{1}{3} \sigma_{c,n-1} \varepsilon_{c,n} \rho_n. \quad (16)$$

Обидва рівняння мають спільні невідомі  $x_1 = \sigma_{c,n}$  та  $x_2 = x_{c,n}$ , тому можна скласти з них систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 - a_3 = 0 \\ x_1 x_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3 = 0 \end{cases}. \quad (17)$$

Враховуючи, що  $a_2 = k_2 = \sigma_{c,n-1}$ , та віднявши від рівняння (10) рівняння (14), ми отримуємо

$$a_1 x_1 - a_3 = k_1 x_1 - k. \quad (18)$$

Рішенням попереднього рівняння (18) є

$$x_1 = \sigma_{c,n} = \frac{a_3 - k_3}{a_1 - k_1}. \quad (19)$$

Визначивши  $\sigma_{c,n}$ , можна отримати центр ваги трапеції і записати його як відношення до висоти трапеції

$$\varphi_i = \frac{\frac{1}{3} \sigma_{c,n-1} + \frac{2}{3} \sigma_{c,n}}{\sigma_{c,n-1} + \sigma_{c,n}}. \quad (20)$$

**Послідовність розрахунку з покроковим аналізом:**

1. Встановлюється значення напруження в найбільш стиснутому волокні при першому завантаженні  $\sigma_{c,1}$ , для цього завантаження центр ваги буде

знаходиться в залежності від коефіцієнта  $\varphi_1 = \frac{2}{3}$ .

2. Знаходимо значення напруження в найбільш стиснутому волокні  $\sigma_{c,n}$ , а також центр ваги ділянки  $\varphi_n$  для всіх інших завантажень, враховуючи попередні значення.

Для підтвердження доцільності методу було визначено за допомогою існуючих норм (з використанням полінома 5-го ступеня (21) ) значення згинального моменту  $M_1 \dots M_n$ , відносних деформацій арматури  $\epsilon_{s,1} \dots \epsilon_{s,n}$ , бетону  $\epsilon_{c,1} \dots \epsilon_{c,n}$ , які могли б виникнути при випробуванні прямокутної балки. Всі отримані значення були занесені до таблиці 1. В таблиці наведені результати розрахунку значень коефіцієнтів, а також значень напружень, які отримані за допомогою запропонованої методики.

Таблиця 1

Визначення епюри деформування бетону

$M_n$ , кН/м	$\epsilon_{c,n}$	$\epsilon_{s,n}$	$\rho_n$ , $\rho_m$	$\varphi_n$	$a_1$	$a_3$	$k_1$	$k_3$	$\sigma_{c,n}$
0	0	0	$\infty$	0	0	0	0	0	0
20	0,000107	0,000131	1888	0,667	24,8	0	-13,5	0,0	0,259
40	0,000223	0,000264	924	0,551	24,4	23,6	-17,0	3,5	0,486
60	0,000348	0,000398	603	0,531	24	37,9	-18,5	7,8	0,709
80	0,000487	0,000534	441	0,519	23,55	50,6	-19,4	12,3	0,890
100	0,000641	0,000673	343	0,515	23,05	62,3	-20,2	16,4	1,061
120	0,000813	0,000816	276	0,512	22,55	73,5	-20,9	20,5	1,222
140	0,001014	0,000961	228	0,506	21,9	81,9	-21,6	24,5	1,320
160	0,001255	0,001113	190	0,505	21,15	88,1	-22,3	27,5	1,395
180	0,001557	0,001274	159	0,504	20,25	93,6	-23,1	30,1	1,465
200	0,00198	0,001454	131	0,498	19,05	94,3	-24,1	32,6	1,430

$$\sigma_c = f_{cd} \sum_{k=1}^5 a_k \eta^k . \quad (21)$$

Було проведено порівняння епюр  $\sigma_c - \epsilon_c$  отриманих за допомогою рівняння [21] та за допомогою запропонованої методики (рис.2). З рисунку видно, що епюри деформації бетону співпадають, є деякі погрішності викликані не

точним визначенням напружено-деформованого стану балки, а саме моменту  $M_n$ .

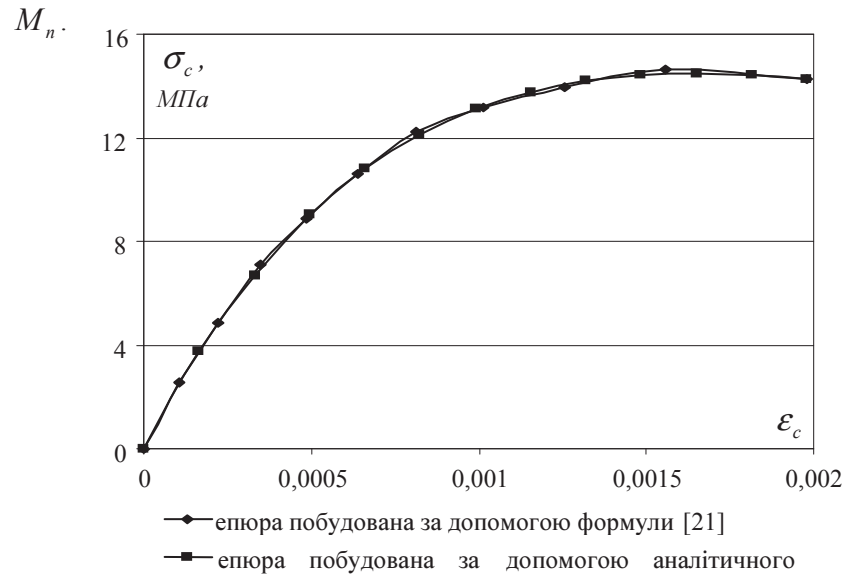


Рис. 2 порівняння діаграм деформування бетону

**Висновки:** 1. Знаючи значення згинального моменту, відносних деформацій стиснутої зони бетону та розтягнутої арматури за допомогою отриманих рівнянь можна визначити значення напружень в згинальному залізобетонному елементі за різних рівнів завантаження та побудувати епюри напружень стиснутої зони та діаграми їх деформування. 2. Методика дозволяє встановити неруйнівним методом клас бетону з діаграм деформування бетону, а також визначити на якій стадії напружено-деформованого стану перебуває елемент. 3. Недоліком методу є сумування погрешностей, які виникають під час випробування.

1. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. – Київ: Мінрегіонбуд України, 2011. – 71 с. 2. Бамбура А. Н. Развитие методов оценки напряженно-деформированного состояния и несущей способности железобетонных конструкций на основе реальных диаграмм деформирования материалов / А. Н. Бамбура // Научно-практичные проблемы современного железобетона: сб. тез первой всеукраїнської науково-технічної конференції. – Київ, 1996. – С. 36-39. 3. Бамбура А. М. До аналітичного описання діаграм механічного стану бетону при одноразовому короткочасному деформуванню / А. М. Бамбура // Будівельні конструкції: Збірник наукових праць. Випуск 57. – Київ, 2002. – С. 31-34. 4. Бабич Є.М Розрахунок несучої здатності поперечних перерізів згинальних залізобетонних елементів // Є.М. Бабич, В.Є. Бабич, В.В. Савицький / Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. – Рівне: НУВГП, 2012. – Випуск 23. - С.94 - 103.