

УДК 539.3

**СТІЙКІСТЬ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК  
СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ ПІД ДІЄЮ ОСЬОВОГО СТИСКУ**

**УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОГО  
СЖАТИЯ**

**STABILITY OF ANISOTROPIC AVERAGE THICKNESS CYLINDRICAL  
SHELLS UNDER COMPRESSION AXIAL**

**Трач В.М.**, д.т.н., професор (Луцький національний технічний університет),  
**Хоружий М.М.** (Національний університет водного господарства та  
природокористування)

**Трач В.М.**, д.т.н., професор (Луцкий национальный технический  
университет), **Хоружий М.М.** (Национальный университет водного  
хозяйства и природопользования)

**Trach V.M.**, doctor of technical sciences, professor (Lutsk National Technical  
University), **Horuzhy M.M.** (National University of Water Management and  
Natural Resources Use)

На основі уточненої теорії типу Тимошенко-Мідліна представлено підхід до розрахунків на стійкість анізотропних циліндричних оболонок при урахуванні геометрично нелінійного докритичного напружено-деформованого стану. Матеріал оболонки має симетричні властивості в площині, що може співпадати з серединною поверхнею. Чисельні дослідження виконані методом дискретної ортогоналізації. Представлені графіки, що ілюструють вплив кута укладання із шаруватих волокнистих композитів на величини критичних значень осьових зусиль.

На основе уточненной теории типа Тимошенко-Мидлина представлен подход к расчетам на устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек при учете геометрически нелинейного докритического напряженно-деформированного состояния. Материал оболочки имеет симметричные свойства в плоскости, которая может совпадать со средней поверхностью. Численные исследования выполнены методом дискретной ортогонализации. Представлены графики, иллюстрирующие влияние угла укладки из слоистых волокнистых композитов на величины критических значений осевых усилий.

**Based on the refined Timoshenko-Midlin-type theory presented approach to the calculation of the stability of anisotropic cylindrical shells with account of geometrically nonlinear subcritical stress-strain state. The material properties of the shell is symmetric in the plane, which may coincide with the middle surface. Multiple research performed by discrete orthogonalization. A graph illustrating the effect of stacking angle of laminated fibrous composites the critical values of axial effort.**

**Ключові слова:**

Анізотропна оболонка, теорія типу Тимошенко-Мідліна, стійкість.  
 Анизотропная оболочка, теория типа Тимошенко-Мидлина, устойчивость.  
 Anisotropic shell, Timoshenko-Midlin-type theory, stability.

Циліндричні оболонки є одним із основних елементів, наприклад, аерокосмічної і будівельної техніки. Питання стійкості тонких анізотропних оболонок розглянуте в роботах багатьох вчених [2-9]. Найбільш ґрунтовно це питання висвітлене в монографії [1]. Проте, залишається ще досить значна кількість питань щодо стійкості анізотропних оболонок середньої товщини. Відомо, що для розрахунку таких оболонок треба використовувати уточнені теорії, найбільшого вжитку серед яких набула уточнена теорія типу Тимошенко-Мідліна. В даній роботі проведені дослідження стійкості анізотропних циліндричних оболонок середньої товщини під дією осьового стиску.

В [10] представлений підхід побудови розв'язувальної системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання у нормальному вигляді на основі нелінійної теорії анізотропних оболонок типу Тимошенка-Мідліна. Для побудови рівнянь, за допомогою яких визначається критичний стан оболонок, пов'язаний з явищем біфуркації, використана канонічна система рівнянь нелінійного деформування симетрично завантажених анізотропних оболонок середньої товщини

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{dy_{1,n}}{d\alpha_1} &= -in_a (T_{12,n}) + \psi_2 (T_{22,n} - T_{11,n}) + \frac{1}{R_1} (y_{3,n} - in_a M_{12,n}); \\ \frac{1}{A_1} \frac{dy_{2,n}}{d\alpha_1} &= -in_a (T_{22,n}) - \psi_2 (2T_{12,n}) + \left( \frac{3}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \psi_2 M_{12,n} + \\ &+ \frac{1}{R_2} (-T_{12}^0 y_{8,n} + T_{22}^0 \theta_{2,n} - T_{12,n} y_8^0 + T_{22,n} \theta_2^0 + in_a M_{12,n}); \\ \frac{1}{A_1} \frac{dy_{3,n}}{d\alpha_1} &= -in_a (-T_{12}^0 y_{8,n} + T_{22}^0 \theta_{2,n} - T_{12,n} y_8^0 + T_{22,n} \theta_2^0 + 2\psi_2 M_{12,n}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\psi_2 y_{3,n} - \frac{1}{R_1} y_{1,n} - \frac{1}{R_2} (T_{22,n}) ; \\
& \frac{1}{A_1} \frac{dy_{4,n}}{d\alpha_1} = -in_a M_{12,n} - \psi_2 (y_{4,n} - M_{22,n}) + y_{3,n} + T_{11}^0 y_{8,n} + \\
& + T_{11,n} y_8^0 - T_{12}^0 \theta_{2,n} - S_{,n} \theta_2^0 ; \\
& \frac{1}{A_1} \frac{dy_{5,n}}{d\alpha_1} = \frac{1}{R_1} y_{7,n} - y_{8,n} y_8^0 + A_{11} T_{11,n} + A_{12} T_{12,n} + A_{13} y_{4,n} - \\
& - d_{11} \varepsilon_{22,n} - d_{12} \chi_{22,n} - d_{13} \chi_{12,n} ; \\
& \frac{1}{A_1} \frac{dy_{6,n}}{d\alpha_1} = -in_a y_{5,n} + \psi_2 y_{6,n} + y_{8,n} \theta_2^0 + y_8^0 \theta_{2,n} + \\
& + A_{12} T_{11,n} + A_{22} S_{,n} + A_{23} y_{4,n} - d_{21} \varepsilon_{22,n} - d_{22} \chi_{22,n} - d_{23} \chi_{12,n} ; \\
& \frac{1}{A_1} \frac{dy_{7,n}}{d\alpha_1} = -\frac{1}{R_1} y_{5,n} - y_{8,n} ; \\
& \frac{1}{A_1} \frac{dy_{8,n}}{d\alpha_1} = -\frac{1}{R_1} \varepsilon_{1,n} + A_{13} T_{11,n} + A_{23} S_{,n} + A_{33} y_{4,n} - d_{31} \varepsilon_{22,n} - \\
& - d_{32} k_{22,n} - d_{33} k_{12,n} ; \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{9,n}}{\partial \alpha_1} = Q_{23,n}^* + d_{31} \varepsilon_{22,n} + d_{32} \kappa_{22,n} + d_{33} \kappa_{12,n} ; \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{10,n}}{\partial \alpha_1} = M_{12,n}^* + A_{32} T_{12,n}^* + d_{33} \kappa_{12,n} , \tag{1}
\end{aligned}$$

де  $n_a = n / A_2$ ,  $y_{j,n}$  – комплексні функції  $j = 1, \dots, 10$ , а  $n$  – параметр колового хвилеутворення.

Таким чином, задача статичної стійкості симетрично завантаженої пружної анізотропної оболонки обертання зведена до системи з десяти звичайних однорідних диференціальних рівнянь у нормальній формі (1) із змінними коефіцієнтами і однорідними граничними умовами:

$$\begin{aligned}
& \text{на контурі } \alpha_1 = \alpha_0: B_o y_n = 0, \\
& \text{на контурі } \alpha_1 = \alpha_l: B_n y_n = 0. \tag{2}
\end{aligned}$$

Мінімальне власне значення однорідної крайової задачі (1), (2) характеризує момент переходу від симетричного основного рівноважного

стану до несиметричного, якому властиві відповідне число  $n$  хвилеутворень в коловому напрямку. Цей стан рівноваги повністю характеризується наступними величинами:  $y_{1,n}, \dots, y_{10,n}, T_{11,n}, T_{22,n}, T_{12,n}, M_{22,n}, M_{12,n}, \varepsilon_{1,n}, \varepsilon_{2,n}, \varepsilon_{22,n}, \theta_{1,n}, \theta_{2,n}, k_{22,n}, k_{12,n}$ , а також докритичними параметрами  $T_{11}^0, T_{22}^0, T_{12}^0, \theta_1^0, \theta_2^0$ .

Зусилля і моменти, що входять в (1), визначаються із залежностей

$$\begin{aligned}
 T_{11,n} &= y_{6,n}; \\
 T_{22,n} &= d_{11}T_{11,n} + d_{21}S_{,n} + d_{31}y_{4,n} + (C_{22} - C_{22}^0)\varepsilon_{22,n} + \\
 &+ (K_{22} - K_{22}^0)k_{22,n} + (K_{26} - K_{26}^0)k_{12,n}; \\
 M_{22,n} &= d_{12}T_{11,n} + d_{22}S_{,n} + d_{32}y_{4,n} + (K_{22} - K_{22}^0)\varepsilon_{22,n} + \\
 &+ (D_{22} - D_{22}^0)k_{22,n} + (D_{26} - D_{26}^0)k_{12,n}; \\
 M_{12,n} &= d_{13}T_{11,n} + d_{23}S_{,n} + d_{33}y_{4,n} + (K_{26} - K_{26}^0)\varepsilon_{22,n} + \\
 &+ (D_{26} - D_{26}^0)k_{22,n} + (D_{66} - D_{66}^0)k_{12,n}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Мінімальне власне число знаходиться при послідовному збільшенні навантаження, коли визначник матриці граничних умов дорівнює нулю. При розв'язку системи диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами визначник також є комплексним. Щоб існував розв'язок системи однорідних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами необхідно, щоб були одночасно рівними нулю дійсна та уявна частини визначника.

Методика розв'язку, розглядуваної крайової задачі, базується на чисельному методі дискретної ортогоналізації.

Для представлення запропонованої методики розглянута задача про стійкість циліндричної оболонки середньої товщини. При проведенні розрахунків будемо розглядати оболонки, що виготовлені зі склопластика. У власних осях цей матеріал ортотропний. Модуль пружності і коефіцієнт Пуассона волокон і в'язучого такі:  $E = 0,72 \cdot 10^3$  МПа,  $E' = 3,85 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu = 0,32$ ,  $\nu' = 0,1$ . Об'ємний вміст волокон – 0,5. Відносно координатних осей на серединній поверхні оболонки осі ортотропії можуть бути повернуті на довільний кут  $\varphi$ . При  $\varphi \neq 0^\circ$  і  $90^\circ$  він втрачає властивості ортотропії та веде себе при деформуванні як матеріал з однією площиною пружної симетрії. Послідовно збільшуючи кількість шарів проаналізуємо, як при цьому змінюється величина критичного значення осьового стискаючого навантаження. Щоб зменшити кількість параметрів, від яких залежить

стійкість оболонок, приймемо, що відношення довжини  $L$  до радіуса оболонки  $R$  дорівнює двом ( $L/R=2$ ), а також відношення товщини до радіуса  $h/R=0,1$ . Закріплення торців оболонки будемо вважати однотипним: один з них шарнірно нерухомий ( $u=v=w=M_{11}=\theta_2=0$ ), а інший — шарнірно рухомий ( $v=w=M_{11}=\theta_2=0, T_{11}=-T_{11}^0$ ).

В таблицях 1-3 наведені величини критичних значень осьових стискаючих навантажень  $T_{11}^{cr}$ , здобуті за використанням трьох підходів. В першому рядку таблиці представлені результати розрахунків на стійкість за запропонованою методикою при використанні уточненої теорії типу Тимошенка-Мідліна. Наступні величини критичних значень  $T_{11}^{cr}$  знайдені за підходом у припущенні, що коефіцієнти  $B_{i6}$  і  $D_{i6}$  дорівнюють нулю, тобто матеріал оболонки є ортотропним. Третіми приведені критичні значення, отримані за класичною методикою чисельного розрахунку.

Згідно таблиць 1-3 на рисунках 1-3 в осях  $T_{11}^{cr} - \varphi$  представлені графіки, що ілюструють вплив кута укладання композитного матеріалу  $\varphi$  на величини критичних значень осьових зусиль  $T_{11}^{cr}$ . Крива 1 – це критичні значення, здобуті за основною методикою. Графік 2 отриманий за розрахунковою методикою, яка відрізняється від основної лише тим, що коефіцієнти  $B_{i6}, D_{i6} = 0$ . Крива 3 описує величини критичних навантажень  $T_{11}^{cr}$  за класичним підходом.

Таблиця 1.

Величини критичних значень осьового стиску для одношарової оболонки в кН

Варіант теорії	Кут $\varphi$ , град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Тимош.- Мідл.	797	778	752	733	737	748	775	817	825	824
Ортотропний	797	787	782	764	748	758	796	831	834	824
Класична	774	734	704	695	700	718	748	774	780	776

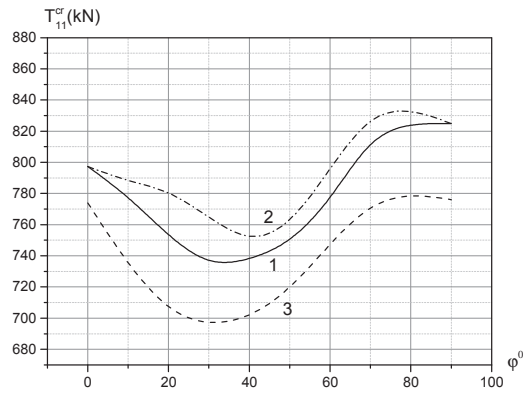


Рис.1. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для одношарової оболонки

Таблиця 2.

Величини критичних значень осевого стиску для двошарової оболонки в кН

Варіант теорії	Кут $\varphi$ , град										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
Тимош.-Мідл.	797	787	772	743	737	748	785	821	825	824	
Ортотропний	797	787	782	764	748	758	796	831	834	824	
Класична	774	768	750	728	714	722	746	770	776	776	

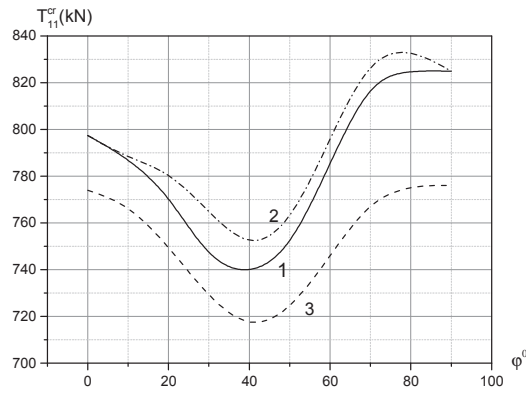


Рис.2. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для двошарової оболонки

Таблиця 3.

Величини критичних значень осевого стиску  
для чотиришарової оболонки в кН

Варіант теорії	Кут $\varphi$ , град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Тимош.-Мідл.	797	787	782	754	748	758	796	831	834	824
Ортотропний	797	787	782	764	748	758	796	831	834	824
Класична	774	772	762	742	726	732	758	782	784	776

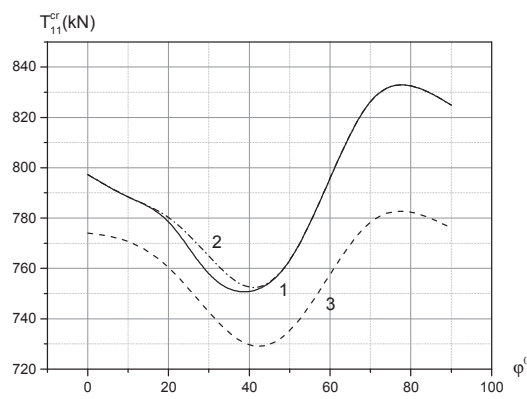


Рис.3. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для чотиришарової оболонки

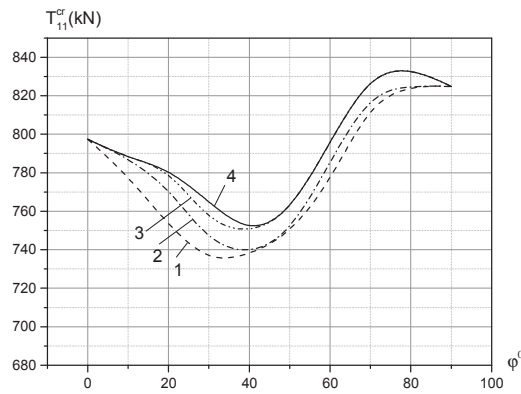


Рис.4. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для одно-, дво-, чотиришарової анізотропної (1-3) та ортотропної (4) оболонки

Різниця між величинами критичних навантажень, знайдених за запропонованою методикою при використанні уточненої теорії типу Тимошенка-Мідліна і класичним підходом складає від 1,6% до 6,4%. Очевидно, що використані залежності (1) більш повно представляють деформаційний стан анізотропної оболонки, оскільки дозволяють враховувати в напруженому стані вплив поперечного зсуву за товщиною оболонки. Також очевидним є вплив моментності докритичного напружено-деформованого стану на особливість деформування циліндричних анізотропних оболонок.

Аналіз величин критичних значень осьових стискаючих зусиль дозволяє стверджувати, що одношарові оболонки (крива 1) сприймають найменші величини критичних навантажень. Для двошарових оболонок (крива 2) критичні навантаження більші, ніж для одношарових, але менші, ніж для чотиришарових (крива 3). Остання найближче розташована до кривої 4, що описує залежність критичних навантажень для ортотропної оболонки. Це є логічним підтвердженням того, що при збільшенні кількості шарів анізотропні оболонки з певною точністю можна розраховувати як ортотропні. Очевидно, що цей висновок слід поширити лише на оболонки з симетричним орієнтуванням шаруватого пакету.

1. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. // – К.: Каравела, 2010. – 352 с. 2. Ванін Г.А. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами / Ванін Г.А., Семенюк Н.П. // – К.: Наук. думка, 1987.—200 с. 3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / Амбарцумян С.А. // – М.: Наука, 1974. – 448 с. 4. Григоренко Я.М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами / Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. – К., Наук. думка, 1988. – 264 с. 5. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Григолюк Э.И., Куликов Г.М. // М.: Машиностроение, 1988. – 288с. 6. Трач В.М. До питання про напружено-деформований стан анізотропних оболонок середнього згину // Трач В.М., Хоружий М.М. // Збірник “Наукові нотатки”. – ЛНТУ, Луцьк. – 2013. – с.252-257. 7. Семенюк Н.П. Устойчивость цилиндрических оболочек из армированных материалов при осевом сжатии с учетом особенностей послойной ориентации волокон / Семенюк Н.П., Трач В.М. // Прикл. механика. – 2006. – 42, №3. – с.80-86. 8. Семенюк Н.П. Устойчивость и начальное закритическое поведение анизотропных цилиндрических оболочек при внешнем давлении / Семенюк Н.П., Трач В.М. // Прикл. механика. – 2007. – 43, №3. – с.86-103. 9. Трач В.М. Об устойчивости оболочек вращения из композитных материалов / Трач В.М. // Прикл. механика. – 2008. – 44, №3. – с.109-124. 10. Трач В.М. Використання уточненої теорії типу Тимошенка до побудови системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання / Трач В.М., Бондарський О.Г., Хоружий М.М. // Ресурсоекономні матеріали, будівельні конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. Випуск 27. Рівне, 2013.– с. 382-392.