

УДК 624.15.001: 622.271.33

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ АСИМПТОТИЧНИХ РІШЕНЬ ЗАДАЧ ПРО ОСІДАННЯ ВОДОНАСИЧЕНИХ ОСНОВ

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОБ ОСАДКЕ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ОСНОВАНИЙ

SCHEME ALGORITHM OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE TASKS OF WATER-SATURATED GROUNDS SINKING

Шаповал А.В., к.т.н., доц., (Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, м. Дніпропетровськ), **Шаповал В.Г., д.т.н., проф.** (Національний гірничий університет, м. Дніпропетровськ)

Шаповал А.В., к.т.н., доц., (Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, г. Днепропетровск), **Шаповал В.Г., д.т.н., проф.** (Национальный горный университет, г. Днепропетровск)

Shapoval A.V., candidate of technical sciences, docent., (Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture, Dnipropetrovsk), **Shapoval V.G., doctor of technical sciences, professor** (National Mining University, Dnipropetrovsk)

Запропоновано алгоритм визначення осідань пружної водонасиченої основи. В основу алгоритму покладено відомі асимптотичні співвідношення між осіданнями основи в момент прикладення до неї навантаження і при необмеженому часі його дії. Показано, що такий підхід дозволяє спростити процедуру знаходження рішень при задовільній їх точності.

Предложен алгоритм определения осадок упругого водонасыщенного основания. В основу положены асимптотические соотношения между осадками, соответствующими моменту приложения нагрузки и при неограниченном времени ее действия. Показано, что такой подход позволяет упростить нахождение решений при удовлетворительной их точности.

The algorithm of determining elastic water-saturated ground sinkings is offered. The algorithm is based on asymptotic relations between ground sinkings, corresponding the time of loading and time of its unlimited action. It is shown, that this approach allows to simplify the search of solutions with satisfactory veracity.

Ключевые слова:

Основа, осадка, ущільнення.

Основание, осадка, уплотнение.

Ground, sinking, consolidation.

Введение. Процесс построения решений пространственных задач об уплотнении водонасыщенных грунтовых оснований является весьма трудоемким.

Это утверждение справедливо как при построении приближенных [1, 2], так и точных решений [3].

Подтверждением данного утверждения является тот факт, что в настоящее время в рамках теории взаимосвязанной теории фильтрационной консолидации известны два решения пространственной задачи – в рамках расчетной схемы полупространства с верхней проницаемой границей [3] и слоя конечной толщины с проницаемыми верхней и нижней границами [1]

В этой связи актуальной является проблема упрощения процедуры построения решений.

Анализ последних исследований. На наш взгляд, в основу алгоритма построения решения могут быть положены предложенные авторами [1] и [2] различные по форме и совпадающие по сути алгоритмы построения приближенных решений, которые заключаются в следующем:

1. Вначале следует определить напряженно – деформированное состояние основания в рамках модели объемно-несжимаемой среды.
2. После этого следует определить напряжения и перемещения, обусловленные оттоком жидкости из пор грунта.
3. Далее необходимо откорректировать граничные условия таким образом, чтобы они соответствовали заданным.

Эти алгоритмы целесообразно использовать при решении относительно простых задач. При этом их применение для решения практических задач сопряжено с трудностями вычислительного характера.

Например, аналитическое решение задачи об определении напряженно – деформированного состояния трехслойного основания, полученное с использованием вычислительного комплекса MAPLE занимает около десяти страниц текста.

Постановка цели и задач исследований. При написании настоящей работы преследовалась цель разработать и обосновать алгоритм построения приближенных решений задач об определении осадок водонасыщенных оснований, свободный от приведенных выше недостатков.

Методика исследований. Начальная осадка водонасыщенного основания S_0 в момент приложения к нему нагрузки (т.е. в момент времени $t=0$) и осадка водонасыщенного основания при неограниченном возрастании времени действия внешней нагрузки S_∞ (т.е. при $t \rightarrow \infty$) могут быть установлены с

использованием соотношений теории упругости [1, 3]. Например, в случае пространственной задачи имеет место такая взаимосвязь:

$$S_{\infty} = 2 \cdot (1 - \nu) \cdot S_0, \quad (1)$$

где ν - коэффициент Пуассона основания [4].

Значение осадки основания в момент времени $t=0$ может быть установлено с использованием формул, представленных в [2], а значение осадки основания в момент времени $t=\infty$) - с использованием методов теории упругости [4].

Поэтому приближенное решение задачи может быть представлено в виде:

$$S(t) = S_0 + f(t) \cdot (S_{\infty} - S_0), \quad (2)$$

где $f(t)$ - некоторая функция времени, которая, согласно [2], должна принимать такие значения:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} [f(t)] &= 0; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

С учетом известных асимптотических значений осадки основания $\lim_{t \rightarrow 0} [S(t)] = S_0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} [S(t)] = S_{\infty}$ при неизменной во времени внешней нагрузке на грунт, предлагаемый нами алгоритм нахождения осадки основания в любой момент времени $0 \leq t \leq \infty$ имеет такой вид:

1. Вначале следует найти осадку основания S_0 как объемно – несжимаемой среды. Для этой цели могут быть известные соотношения теории упругости, в которых упругую константу Ламе λ следует положить равной бесконечности [2, 5].

2. После этого необходимо определить осадку основания, обусловленную фильтрацией жидкости в порах грунта. Согласно [2] для этой цели следует использовать формулы вида:

$$\left. \begin{aligned} W^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad U^* = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad V^* = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \Phi = \frac{c}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \int_0^t P(x, y, z, \tau) \cdot d\tau; \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= c_v \cdot \Delta P - \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk}; \quad S^*(x, y, t) = \lim_{z \rightarrow 0} (W^*). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь W^* - перемещение точки основания с координатами (x, y, z) в момент времени t в направлении оси Oz ; U^* - то же, в направлении оси Ox ; V^* - то же, в

направлении оси Oy ; Φ - потенциал перемещений основания, обусловленный оттоком жидкости из пор грунта; $P(x, y, z, t)$ - поровое давление в момент времени t в точке с координатами (x, y, z) ; τ - параметр, имеющий размерность времени; C - коэффициент консолидации основания (его следует принимать равным $c = c_k = (\lambda + 2 \cdot G) / \gamma_w \cdot k_f$ в случае компрессионной и $c = c_v = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) / (3 \cdot \gamma_w) \cdot k_f$ в случае пространственной задачи); k_f - коэффициент фильтрации; λ и G - упругие константы Ламе [4, 5]; σ_{kk} - шаровой тензор напряжений [1, 2, 3]; $S^*(x, y, t)$ - осадка основания, обусловленная фильтрационной консолидацией.

3. После этого с использованием формулы (2) определяется осадка основания.

В качестве иллюстрации к изложенному найдем осадку находящегося в условиях компрессии грунтового слоя толщиной h , находящегося под воздействием постоянной нагрузки $q(t) = q = const$.

Согласно (1) в данном случае:

$$\left. \begin{aligned} S_0 = 0; \quad S_\infty = \frac{q \cdot h}{\lambda + 2 \cdot G}; \quad c_k = \frac{\lambda + 2 \cdot G}{\gamma_w} \cdot k_f; \\ P = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{i=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{i} \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot z}{h}\right) \cdot \exp\left(\frac{i^2 \cdot \pi^2}{h^2} \cdot c_k \cdot t\right) \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Согласно (4), функция Φ равна:

$$\Phi = \frac{4 \cdot q \cdot h^2}{\pi^3 \cdot (\lambda + 2 \cdot G)} \cdot \sum_{i=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot z}{h}\right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{i^2 \cdot \pi^2}{h^2} \cdot c_k \cdot t\right)\right]. \quad (6)$$

Согласно (4), вертикальная осадка, обусловленная отжатием воды из пор грунта равна:

$$S^* = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = \frac{4 \cdot h \cdot q}{\pi^2 \cdot (\lambda + 2 \cdot G)} \cdot \sum_{i=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{i^2 \cdot \pi^2}{h^2} \cdot c_k \cdot t\right)\right]. \quad (7)$$

Далее найдем функцию $f(t)$ (формула (2)), как отношение $S^*(t) / S^*(\infty)$. Имеем:

$$f(t) = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{i^2 \cdot \pi^2}{h^2} \cdot c_k \cdot t\right) \right] / \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2}. \quad (8)$$

С учетом (8) приближенное решение задачи об осадке находящегося в условиях компрессионного сжатия водонасыщенного грунтового слоя равна:

$$S(t) = \frac{q \cdot h}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{i^2 \cdot \pi^2}{h^2} \cdot c_k \cdot t\right) \right] / \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2}. \quad (9)$$

Результаты исследований. На рисунке 1 в системе координат “ $\chi = S(t)/S(\infty) - T$ ”, где $T = \pi^2 \cdot c_k \cdot t / h^2$ представлены точное решение задачи (кривая 1) и решение, рассчитанное с использованием формулы (9), кривая 2. В обоих случаях удерживалось по 10 членов ряда. Из рисунка вытекает, что кривые совпадают.

Далее найдем осадку верхней границы водонасыщенного полупространства, к верхней границе которого приложена равномерная распределенная нагрузка q (рис. 2).

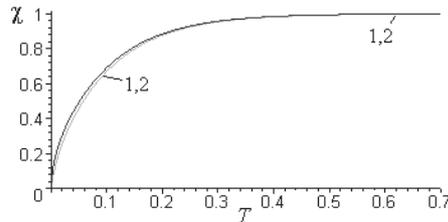


Рис. 1. Зависимость безразмерной осадки χ от безразмерного времени T .
1 – точное решение; 2 – приближенное. Кривые совпадают.

Приближенное решение этой задачи было получено Ю.К. Зарецким, а точное приведено в работе [3].

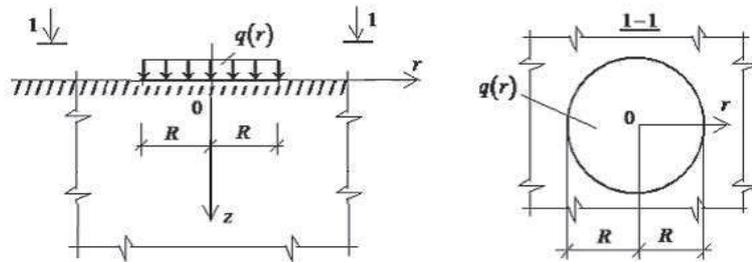


Рис. 2. К определению осадки водонасыщенного полупространства

Представленной на рисунке 2 схеме соответствуют граничные условия вида:

$$\sigma_{zz}(r, 0, t) = \begin{cases} -q - n\mu & r \leq R; \\ 0 - n\mu & r > R; \end{cases}; \quad \tau_{rz}(r, 0, t) = 0. \quad (10)$$

Здесь σ_{zz} - вертикальное нормальное напряжение, а τ_{rz} - касательное.
Ю. К. Зарецким в работе [1] были получены такие результаты:

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \frac{q \cdot R}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha \cdot R)}{\alpha} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \quad S_{\infty} = 2 \cdot (1 - \nu) \cdot S_0; \\ S^* &= \frac{q \cdot R}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha \cdot R) \cdot J_0(\alpha \cdot r)}{\alpha} \cdot F(\alpha, t) \cdot d\alpha; \\ F(\alpha, t) &= \operatorname{erf}(\alpha \cdot \sqrt{c_v \cdot t}) + \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot c_v \cdot t}{\pi}} \cdot \exp(-\alpha^2 \cdot c_v \cdot t) - \\ &- 2 \cdot \alpha^2 \cdot c_v \cdot t \cdot \operatorname{erfc}(\alpha \cdot \sqrt{c_v \cdot t}). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь $J_0(x)$ и $J_1(x)$ - функции Бесселя первого рода с нулевым и единичным индексами соответственно [6].

Функцию $f(t)$ найдем с использованием формулы вида:

$$f(t) = \frac{F(\alpha, t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} [F(\alpha, t)]} = \operatorname{erf}(\alpha \cdot \sqrt{c_v \cdot t}) + \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot c_v \cdot t}{\pi}} \cdot \exp(-\alpha^2 \cdot c_v \cdot t) - (12) \\ - 2 \cdot \alpha^2 \cdot c_v \cdot t \cdot \operatorname{erfc}(\alpha \cdot \sqrt{c_v \cdot t}).$$

С учетом (11) и (12) осадка основания, установленная с использованием предлагаемого алгоритма равна:

$$S(r,t) = \frac{q \cdot R}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha \cdot R)}{\alpha} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot [1 + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot F(\alpha, t)] d\alpha \quad (13)$$

Далее нами по формуле

$$S_{cp}(t) = \left(2 \cdot \pi \cdot \int_0^R S(r,t) \cdot r \cdot dr \right) / (\pi \cdot R^2) \quad (14)$$

была рассчитана средняя осадка основания, после чего по формуле

$$\varepsilon = \left| (S_{cp,точ}(t) - S_{cp}(t)) / S_{cp,точ}(t) \right| \cdot 100\% \quad (15)$$

была установлена погрешность между точным $S_{cp,точ}(t)$ и приближенным - $S_{cp}(t)$ решениями (рис. 2).

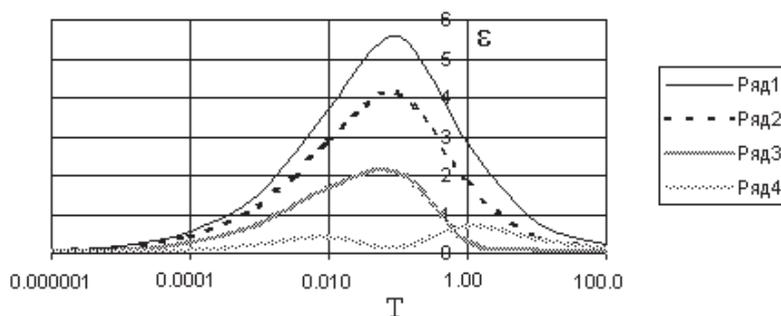


Рис. 2. Погрешность между точным и приближенным решениями задачи. 1 – коэффициент Пуассона $\nu = 0,27$; 2 – то же, $\nu = 0,3$; $\nu = 0,35$; $\nu = 0,42$.

Оказалось, что в данном случае погрешность не превышает **6%**.

Выводы. Был сделан вывод о том, что предлагаемый нами алгоритм вполне может быть использован для построения приближенных решений задач об уплотнении водонасыщенных оснований.

1. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. - М.: Наука. 1967 - 270 с.
2. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Приближенное общее решение задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации обладающего свойством ползучести грунта. //Форум гірників – 2013: матеріали міжнар. конф., 2 – 5 жовт. 2013 р., м. Дніпропетровськ. Національний гірничий університет, 2013. – Т. 2.– с. 7-13.
3. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации: Монография.- Днепропетровск: Пороги, 2009-311 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, - 1975. - 872 с.
5. Тимошенко С.П., Гудьир Дж. Теория упругости. - М: Наука, 1975. - 576 с.
6. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. - 840 с.