

УДК 624.012.45

ДЕЯКІ ПРИКЛАДИ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРОГІННИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОЛЕТНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

SOME EXAMPLES MODELING COMPLEX STRESS-STRAIN STATE BRIDGE CONCRETE ELEMENTS

Карпюк В.М., д.т.н., професор (Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса)

Карпюк В.М., д.т.н., професор (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса)

Karpyuk V.M., Ph.D., Professor (Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa)

Розглянуті результати прогнозу несучої здатності приопорних ділянок звичайних, нерозрізних та позацентрово стиснутих непереармованих залізобетонних балок прямокутного перерізу за допомогою нелінійного скінчено-елементного розрахунку з використанням ПК „Ліра 9.6”.

Рассмотрены результаты прогноза несущей способности приопорных участков обычных, неразрезных и внецентренно сжатых непереармированных железобетонных балок прямоугольного сечения с помощью нелинейного конечно-элементного расчета с использованием ПК "Лира 9.6".

The results obtained in the course of an experimental study of the bearing capacity of support areas of common, whole and eccentrically compressed non-overreinforced concrete beams of rectangular cross-section with the aid of a numerical non-linear finite element analysis based on the theoretical mechanics of reinforced concrete with the use of “Lira 9.6” software platform were considered and actualized.

Постановка проблеми. На найближчі десятиліття залізобетон залишиться основним будівельним матеріалом. Проте, не дивлячись на накопичений досвід будівництва та експлуатації, раціональне проектування

будівельних конструкцій нашо́вхується на відомі труднощі внаслідок того, що залізобетон є композитним, непружним, неоднорідним і анізотропним матеріалом, здатним як до утворення тріщин, крихкого руйнування, так і до появи пластичних деформацій, повзучості, усадки та набухання.

Проблема ускладнюється ще й тим, що до теперішнього часу недостатньо вивченим є опір залізобетонних елементів дії зовнішнього навантаження при складному напружено-деформованому стані їхніх приопорних ділянок, який характеризується виникненням в них поперечних та поздовжніх сил, згинальних та крутних моментів. Наслідком цього являється напівемпіричний підхід до їхнього розрахунку.

Пріоритетним напрямком досліджень та публікацій з вказаної теми являється розвиток нормативної бази України у сфері будівельних конструкцій на основі впровадження деформаційного методу розрахунку їхньої несучої здатності.

Отже, дослідження за вказаним напрямком є важливими та актуальними. Вони тісно пов'язані з науковою тематикою академії, носять системний характер і являються складовою частиною держбюджетної теми № 0108U000559 Міністерства освіти і науки України: «Розрахункові моделі стержневих залізобетонних елементів з урахуванням складного напружено-деформованого стану приопорних ділянок».

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченню фізичної нелінійності бетону та залізобетону присвячені піонерні розробки А.Ф. Лолейта [1], В.І. Мурашева [2]. Вони створили передумови для розвитку інженерних методів розрахунку залізобетонних конструкцій, що згинаються, та знайшли відображення у багатьох нормативних документах, в тому числі [3]. Проте, ці теорії дають відповідь про характер розподілу напружень по висоті перерізу елементів тільки на окремих стадіях їхньої роботи й не дозволяють простежити за дійсним напружено-деформованим станом аж до появи граничного стану. При цьому, за допомогою вказаних розрахунків можна зробити задовільний прогноз міцності нормальних перерізів та відповідних деформацій вздовж осі стержня.

Для того, щоби більш детально охарактеризувати процес деформування дослідних залізобетонних елементів потрібно, як виявилось, застосувати теорію пластичності, методи механіки деформування та руйнування твердого тіла.

Початок дослідженням пластичності матеріалів при складному напружено-деформованому стані покладено роботами Л. Prandtl [4], Рейсса [5], А.А. Ільюшина [6] та ін. Проте, досить швидко виявилася непридатність вказаних класичних теорій для описання пластичності бетону, оскільки бетон має неоднакову міцність на стиск і розтяг, в ньому можуть утворюватися тріщини, що визиває появу деформаційної анізотропії та ефект дилатації при триосьовому стиску, тобто збільшення об'єму наперекір класичній гіпотезі.

У визначальній роботі Г.А. Генієва, В.М. Киссюка, Г.А. Тюпіна [7] вперше запропоновано урахувати усі перераховані вище особливості

деформування бетону, який розглядається як нелінійно-пружний ізотропний матеріал, а залізобетон – трансверсально ізотропним як до, так і після утворення тріщин.

Роботи А.І. Козачевського [8], В.М. Круглова [9], С.Ф. Клованича [10], В.І. Корсуна [11] суттєво розвили запропоновану в [7] теорію пластичності бетону та залізобетону.

У праці О.О. Гвоздева та М.І. Карпенка [12] використовується гіпотеза про деформаційну ортотропію матеріалу, тобто приймається гіпотеза, що напрямки осей ортотропії збігаються з напрямком головних напружень.

У наступних дослідженнях М.І. Карпенко [13, 14, 15, 16] та його учні розвивають теорію малих пружно-пластичних деформацій, у якій бетон як до, так і після появи тріщин розглядається як анізотропний матеріал (що характеризується деформаційною анізотропією, зумовленою тріщиноутворенням та дискретним розташуванням арматури).

Аналіз вказаних та інших праць показав, що як ортотропна, так і анізотропна теорії малих пружно-пластичних деформацій бетону, по суті, являються деформаційними теоріями, що оперують скінченими величинами деформацій та напружень. І якщо вони добре узгоджуються з дослідом при простому пропорційному навантаженні, то при складному режимі навантаження розрахункові і фактичні деформації та напруження суттєво відрізняються одне від одного [4, 6].

Відносно недавно виявилось, що напруження і деформації при розвантаженні та повторному навантаженні, температурних впливах тощо задовільно можуть бути пов'язані між собою тільки на базі теорії течій з урахуванням їхніх приростів.

Прирости деформацій утворені з пружної (оборотної) та пластичної (необоротної) складових. При цьому, пластична складова приростів деформацій та напружень згідно з цією теорією може бути охарактеризована деякою поверхнею, яку називають поверхнею навантажень або поверхнею пластичного потенціалу. Пластична течія розвивається по нормалі до цієї поверхні (асоційована теорія) або з відхиленням від нормалі (неасоційована теорія). Як правило, ці поверхні будуються на базі граничних поверхонь матеріалу шляхом їхньої трансформації (деформаційне зміцнення) або зміцнення (трансляційне зміцнення). Різні варіанти теорії течії відрізняються способом побудови цих поверхонь [17].

Теорії течії, які можна було б застосувати до розрахунку бетонних та залізобетонних конструкцій, розвинуті значно менше у порівнянні з деформаційними. Перші дослідження по застосуванню теорії течії для бетону виконані В.С. Ленським [18], З. Бажантом [19], В.М. Кругловим [20] та ін. Як вияснилося, сучасні варіанти і деформаційної теорії, і теорії течії базуються на граничних поверхнях матеріалу, які описують міцність бетону та залізобетону при складному (тривісному) напруженому стані. У деформаційній теорії вказані поверхні визначають параметри нелінійності, а

у теоріях течії вони використовуються для побудови поверхонь навантаження, пластичного потенціалу тощо.

Основи сучасних уявлень про теорію міцності бетону при тривісному напруженому стані були закладені М.М. Філоненко-Бородичем [21], Г.А. Генієвим, В.Н. Киссюком, Г.А. Тюпіним [7], Г.С. Писаренком, А.А. Лебєдевим [22], Т.А. Баланом, С.Ф. Клованичем [17,23], М.І. Карпенком та його учнями [13-16], S. Dei Poli [24], К.Н. Gerstle [25], Н.В. Kupfer [26] та ін.

Поява сучасних швидкісних ЕОМ з великим об'ємом пам'яті зробила можливим розв'язання задач зі складними розрахунковими моделями числовими методами. У такій ситуації головним постає питання про вибір ефективного числового методу [17].

У роботі [27] D. Ngo і А.С. Scordelis вперше застосували МСЕ для розрахунку конструкцій, які працювали в умовах плоского напруженого стану. У теперішній час у більшості числових досліджень напружено-деформованого стану залізобетонних конструкцій за пропозицією О.О. Гвоздева та М.І. Карпенка використовуються однотипні скінчені елементи, утворені комплексним, нелінійним, анізотропним композиційним матеріалом, який складається з двох суцільних середовищ – бетону та „розмазаної” за допомогою коефіцієнта армування арматури.

Найбільші успіхи у моделюванні роботи залізобетону з тріщинами на основі МСЕ були досягнуті дослідниками при використанні теорії М.І. Карпенка [12-15], яка стала відомим узагальненням традиційної теорії В.І. Мурашева для випадку складного напруженого стану, і яка пройшла широку апробацію у вітчизняних програмних комплексах [28]

Мета роботи полягає у відтворенні результатів експериментальних досліджень несучої здатності звичайних нерозрізних та позacentрово стиснутих балок за допомогою числового нелінійного скінчено-елементного розрахунку на базі загальної механіки залізобетону з використанням ПК „Ліра 9.6”.

Для досягнення поставленої мети потрібно було розв'язати наступні задачі: розробити методика й провести відповідні серії натурних п'ятифакторних, трьохрівневих планованих експериментів з використанням плану типу На5; вивчити характер деформування, тріщиноутворення та руйнування дослідних зразків; вибрати експериментально обґрунтовану фізично-нелінійну модель деформування залізобетону; розробити алгоритм, що реалізує обрану модель залізобетону, і включити її до складу скінчено-елементного програмного комплексу „Ліра 9.6”; здійснити тестування моделі у складі комплексу шляхом порівняння отриманих результатів з відомими експериментальними даними; за допомогою МСЕ чисельно відтворити результати експериментальних досліджень та обґрунтувати надійність запропонованої методики шляхом порівняння розрахункових і дослідних даних; розробити практичні рекомендації з визначення несучої здатності дослідних елементів.

Результати дослідження. Для досягнення поставленої мети на першому етапі досліджень були реалізовані три серії планованих експериментів. Дослідні фактори та рівні їхньої зміни представлені у табл. 1, 2.

Таблиця 1
Дослідні фактори III серії (позацентрово стиснуті балки)

| Код | Натуральні значення | Рівні зміни | | | Інтервал |
|---|--|-------------|--------|--------|---------------------|
| | | „-1” | „0” | „+1” | |
| X ₁ | Відносний прогін зрізу, a/h_0 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| X ₂ | Рівень стискаючого навантаження, $N_{ст}/(R_{bn} \cdot b \cdot h_0)$ | 0,21 | 0,40 | 0,59 | 0,19 |
| X ₃ | Відносний ексцентриситет, a/h_0 | - 0,25 | 0 | + 0,25 | 0,25 |
| X ₄ | Коефіцієнт робочого армування, μ_s | 0,0129 | 0,0176 | 0,023 | \approx 0,0054 |
| X ₅ | Коефіцієнт конструктивного верхнього армування, μ'_s | 0,0058 | 0,0090 | 0,0129 | \approx 0,0036 |
| h=200мм; b=100мм; $\ell_0 = 1575$ мм; B25; $\mu_{sw} = 0,0029$ (2 $\varnothing 4$ Вр I); S=87,5мм; клас важкого бетону B25. | | | | | |

Таблиця 2

Дослідні фактори V серії (нерозрізні балки)

| Код | Натуральні значення | Рівні зміни | | | Інтервал |
|--|--|-------------|--------|--------|----------------------|
| | | „-1” | „0” | „+1” | |
| X ₁ | Відносний прогін зрізу, a/h_0 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| X ₂ | Клас важкого бетону, B, МПа | B15 | B25 | B35 | 10 |
| X ₃ | Коефіцієнт поперечного армування, μ_{sw} | 0,0019 | 0,0033 | 0,0052 | \approx 0,00165 |
| X ₄ | Коефіцієнт армування нижньої зони., μ_{SH} | 0,0067 | 0,0205 | 0,0339 | \approx 0,0136 |
| X ₅ | Коефіцієнт армування верхньої, μ_{SB} | 0,0067 | 0,0205 | 0,0339 | \approx 0,0136 |
| h=180мм; b=100мм; $\ell_0 + \ell_0 = 1240$ мм+1240мм; S=77,5мм | | | | | |

Оскільки вибрані фактори можуть впливати на функцію виходу нелінійно, то їх доцільно апроксимувати поліномом другої степені. У зв'язку з цим всі досліди виконували за п'ятифакторним, трьохрівневим, близьким за властивостями до D-оптимального, планом типу Na5, який забезпечує однакову точність прогнозу дослідної величини у області, що описується радіусом, який дорівнює 1 відносно центральної „0” точки (дослід №27).

Дослідні елементи представляють собою шарнірно обперті одно - (I, III серії) та двопрогінні (V серія) балки прямокутного перерізу шириною 100мм і висотою 200мм (I, III серії), 180мм (V серія). Величина прольотів балок складала у I, III серії $9h_0$ (1575мм), а у V серії $8h_0 + 8h_0$ (1240мм+ 1240мм).

Балки були армовані двома плоскими каркасами. Нижня і верхня поздовжня арматура прийнята класу А 500С, поперечна - 2Ø3,4 або 5ВрІ. Балки виготовлені з важкого бетону класу В25 у ІІІ серії і В15, В25, В35 – у І та У серіях з характеристиками, наведеними у табл. 3.

Бетон і арматура у дослідних зразках працюють сумісно, але мають різні фізико-механічні властивості, характеризуються нелінійними залежностями між напруженнями та деформаціями. У зв'язку з цим для реалізації скінчено-елементних моделей дослідних залізобетонних елементів у ПК „Ліра 9,6” додатково були введені апробовані повні діаграми деформування бетону ДП „НДІБК” (А.М. Бамбура) та дволінійні діаграми арматури за новими російськими нормами, які представлені на рис. 1.

Теорія деформування та руйнування бетону у закінченому виді ще не розроблена до сих пір у зв'язку з багатокомпонентністю та складністю його структури. Існує багато теорій для пояснення процесу руйнування, серед яких можна виділити:

- феноменологічні (механічні) теорії, які розглядають руйнування як раптовий процес, що збігається з порушенням суцільності матеріалу. При цьому, момент руйнування пов'язується з досягненням деякої величини, вибраної у якості критерію, граничного значення;

- статистичні теорії, у яких бетон представлений у вигляді ізотропного середовища з окремими дефектами структури, розподіленими згідно з статистичними законами;

- структурні (фізичні) теорії, зокрема теорія Ю.В. Зайцева, які глибоко аналізують фізичну картину поведінки бетону під навантаженням.

Аналіз вказаних теорій [17] показав, що найбільше практичне і прикладне значення для оцінки міцності бетону при складних напружених станах мають феноменологічні теорії міцності. Тому границю міцності бетону при складному нерівномірному напруженому стані при дослідженні роботи вказаних елементів визначали за допомогою феноменологічного критерію міцності Г.А. Генієва, В.М. Киссюка, Г.А. Тюпіна [7] (рис.2).

Відтворення напружено-деформованого стану дослідних елементів здійснювали у програмному комплексі „Ліра 9.6”. У числових експериментах І, ІІІ і У серії дослідів були виконані нелінійні розрахунки 27 звичайних, 27 нерозрізних та 27 позacentрово стиснутих балок згідно з планом типу На5.

Таблиця 3

Фізико-механічні характеристики матеріалів

| № п/п | Характеристика | Бетон | | | Арматура | |
|-------|--|-------|------|------|----------|-----|
| | | В15 | В25 | В35 | А 500С | ВрІ |
| 1 | Гранична міцність на стиск, $\sigma_{ст}^{сп}$, МПа | 15,3 | 25,5 | 35,7 | 500 | 395 |
| | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|-------|-------|-------|--------|--------|
| 2 | Гранична міцність на розтяг, σ_p^{zp} , МПа | 1,69 | 2,37 | 2,97 | 500 | 395 |
| 3 | Початковий модуль пружності, E_e , МПа | 23665 | 30600 | 34995 | 190000 | 200000 |
| 4 | Стисливість, $\epsilon_{br} \cdot 10^{-5}, \epsilon_{so} \cdot 10^{-5}$ | 166 | 181 | 194 | 263 | 198 |
| 5 | Гранична стисливість, $\epsilon_{bu} \cdot 10^{-5}, \epsilon_{su} \cdot 10^{-5}$ | 496 | 395 | 321 | 2500 | 2500 |
| 6 | Гранична розтяжність, $\epsilon_{btu} \cdot 10^{-5}, \epsilon_{sttu} \cdot 10^{-5}$ | 16,6 | 18,1 | 19,4 | 2500 | 2500 |
| 7 | Коефіцієнт Пуассона, ν | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,25 | 0,25 |

Зважаючи на симетрію дослідних елементів, розрахунки здійснювали тільки однієї половини балки (до осі симетрії). Балки уявно розбивали на просторові восьмивузлові ізопараметричні скінчені елементи №236 з розмірами 1×1×1 см для зручності моделювання арматури, а також у зв'язку з тим, що у реальних балках у якості крупного заповнювача був використаний гранітний щебінь фракції 5-10 мм. Кількість елементів у моделі нерозрізної балки - 19600, вузлів – 22725; звичайної та позацентрово-стиснутої балки, відповідно, 15800 та 18320.

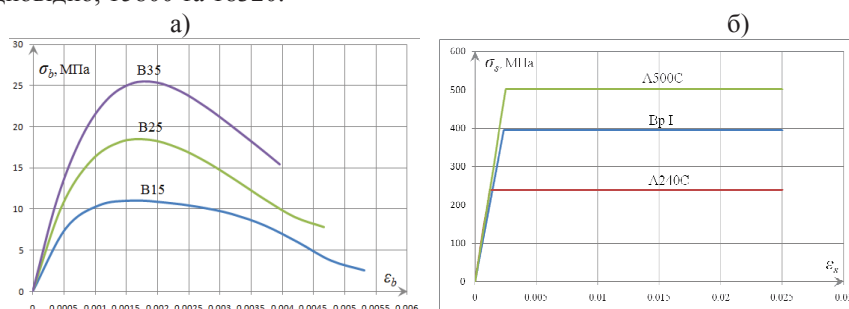


Рис. 1. Діаграми деформування матеріалів: а) бетону; б) арматури

У розрахунках застосовувався кроковий та кроково-ітераційний метод з використанням кусочно-лінійної залежності №14 бібліотеки за відповідним алгоритмом: якщо значення узагальненої деформації виходить за межі заданої ламаної, то моделюється виключення матеріалу ($E_t=1$) елементарної площинки з роботи перерізу. При цьому, при виконанні натурного і числового експериментів спочатку ступенями прикладали позацентрове стискує навантаження, а потім - поперечне у вигляді двох симетрично розташованих зосереджених сил.

Проведені системні експериментально-теоретичні дослідження дозволили виявити суттєву залежність несучої здатності залізобетонних елементів як від

кожного дослідного фактора окремо, так і їхньої взаємодії, що дає можливість достовірно відтворити фізичну картину роботи стержневих залізобетонних конструкцій під навантаженням.

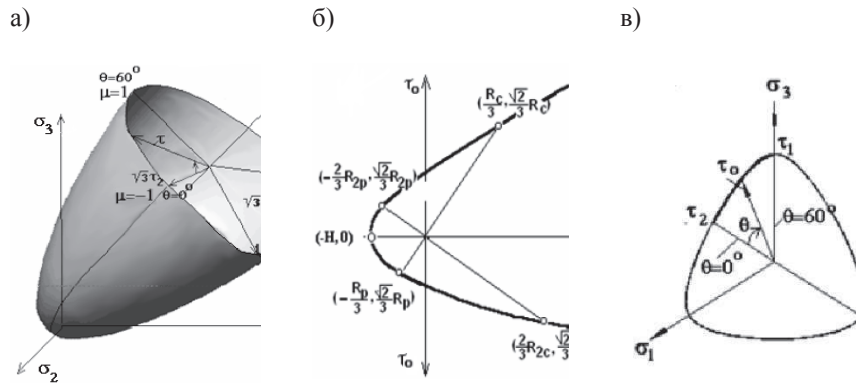


Рис. 2. Фрагмент поверхні міцності бетону (а). Характерні перетини поверхні міцності: меридіальний (б), девіаторний (в).

Зокрема встановлено, що наявність досить потужної поперечної арматури ($\mu_{sw}=0,002...0,005$) у дослідних непереармованих елементах ($\mu_s=0,007...0,034$) не дозволяє проявитися "нагельному" ефекту у поздовжній робочій арматурі ($Q_s/Q_u \leq 0,06$) і ним можна знехтувати у практичних розрахунках. Величина дотичних напружень у бетони в прольоті зрізу, в тому числі над вершиною похилої тріщини, значно перевищує загально прийняту величину $2,5R_{bt}$ і дорівнює $0,3...0,5 R_{bt}$. При цьому, вони розподіляються не за параболою, а за трапецією чи прямокутником і орієнтовані зверху-вниз у звичайних та позацентрово-стиснутих елементах, знизу-вверх - на середній опорі нерозрізних балок.

Окрім того, при розробці практичних рекомендацій з визначення несучої здатності дослідних конструкцій потрібно мати на увазі те, що руйнування позацентрово-стиснутих елементів відбувається, як правило, внаслідок роздроблення бетону над вершиною похилої (нормальної) тріщини або у похилій стислій смугі. При цьому, напруження у поперечній арматурі досягають, в середньому, 58% від границі текучості. Внаслідок двоосового стиску бетону приопорної ділянки спостерігається його зміцнення (по відношенню до призмової), в середньому, на 22%, а її несуча здатність, відповідно, на 43%.

Після утворення т. зв. "пластичного шарніру" над середньою опорою нерозрізної балки зі збільшенням навантаження відбувається відомий перерозподіл моментів (у межах 20...30%) зі зростанням останніх у прольотах і руйнування їхніх приопорних ділянок завершується досягненням всією поперечною арматурою границі текучості.

Висновки. Порівняння експериментальних даних несучої здатності звичайних, нерозрізних та позацентрово-стиснутих залізобетонних балок з результатами нелінійного скінчено-елементного розрахунку показало задовільну їхню збіжність (коефіцієнт варіації $v=9...12\%$), можливість чисельного відтворення результатів експериментальних досліджень за допомогою програмного комплексу "Ліра 9.6", а також доцільність розробки єдиного методу розрахунку міцності, тріщиностійкості та деформативності нормальних, похилих і просторових перерізів стержневих елементів на базі загальної механіки залізобетону.

Conclusions. Comparison of the experimental data on the bearing capacity of common, whole and eccentrically compressed reinforced concrete beams with the results of the finite element analysis has proved their satisfactory convergence (variation coefficient $v=9...12\%$), a possibility to numerically simulate the experimentally obtained results with the aid of the software platform "Lira 9.6" as well as expedience to develop a unified method to calculate strength, cracks resistance and deformability of normal, inclined and spatial sections of bar elements based on the theoretical mechanics of reinforced concrete.

1. Новый проект Норм: тр. конф. по материалам I Всесоюзной конференции по бетону и железобетону 20-25 апреля 1930 г. в Москве / А.Ф. Лолейт. – М., 1931. 2. Мурашев В.И. Трещиностойчивость, жесткость и прочность железобетона / Василий Иванович Мурашев. – М.: Машстройиздат, 1950. – 268 с. 3. Бетонные и железобетонные конструкции: СНиП 2.03.01-84*. – [Действующий с 1989.01.01]. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 80 с. 4. Spannungsverteilung in Plastischen Körpern: Proc. of 1 st Int. Congr. of Appl. Mech/ Prandtl L. – 1924. – P. 43-54. 5. Рейсс Э. Учет упругой деформации в теории пластичности / Э. Рейсс // Теория пластичности. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – С.206-222. 6. Ильющин А.А. Пластичность / Ильющин А.А. – М.: Ан СССР, 1963. – 424 с. 7. Гениев Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с. 8. Козачевский А.И. Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами / Козачевский А.И. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – №4. – С.12-16. 9. Круглов В.М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии / Круглов В.М. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – №1. – С.40-44. 10. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейной механике грунтов и бетонов / С.Ф. Клованич // Строительные конструкции: Межведомств. научн.-техн. сб. научн. тр. К.: НИИСК. – Вып. 61, т.1, 2004. – С.103-108. 11. Корсун В.И. Расчет конструкций на температурные и силовые воздействия с учетом неоднородности свойств материалов: дис. доктора техн. наук: 05.23.01 / Корсун Владимир Иванович. – Макеевка, ДГАСА, 2005.-365с. 12. Гвоздев А.А. Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии / Гвоздев А.А., Карпенко Н.И. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965.- №2. – С.20-23. 13. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Карпенко Н.И. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с. 14. Карпенко Н.И. Определяющие соотношения для железобетона с трещинами при термосиловых воздействиях / Н.И. Карпенко, С.Ф. Клованич // Строительная

механика и расчет сооружений. – 1983. – №2. – С.6-11. **15.** К построению физических соотношений в инкрементальной форме для расчета железобетонных конструкций с трещинами: Материалы I-й Всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона [«Бетон на рубеже третьего тысячелетия»]. (Москва 2001г. Книга 2 / Н.И. Карпенко, С.Н. Карпенко. – М., 2001. – С. 711-717. **16.** О построении более совершенной модели деформирования железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии: материалы II-й Всероссийской (Международной) конференции по бетону и железобетону [«Бетон и железобетон – пути развития»]. (Москва, 5-9 сентября 2005г.) / Н.И. Карпенко, С.Н. Карпенко. – М., 2005. – С. 431-444. **17.** Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в механике железобетона / С.Ф. Клованич, И.Н. Мироненко. – Одесса.: Изд-во ОНМУ. 2007. – 110 с. **18.** Ленский В.С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладных аспектах / Ленский В.С. // Упругость и неупругость / МГУ. – 1978. – Вып.5. – С. 65-96. **19.** Бажант З. Эндокронная теория неупругости и инкрементальная теория пластичности / Бажант З. // Механика деформируемых твердых тел. Направления развития. – М.: Мир, 1983. – С.189-229. **20.** Гришин А.В. Нелинейные динамические задачи расчета портовых гидротехнических сооружений / А.В. Гришин, Е.Ю. Федорова. – Одесса.: Изд-во ОНМУ. 2002. – 125с. **21.** Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / Филоненко-Бородич М.М. // Инж. сборник. 1954. – Вып. 19. – С. 36-48. **22.** Писаренко Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – К.: Наукова думка, 1976. – 416 с. **23.** Балан Т.А. Определяющие соотношения для бетона при сложном непропорциональном нагружении и нагреве / Балан Т.А., Клованич С.Ф. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. - №2. – С.39-44. **24.** Dei Poli S. Present State of Some basic Resear – ches on Concrete: The behavior Until Failure, under Multiaxial Stresses / Dei Poli S.// J. Ital. ě Cem. – 1980. – V.50, №9. –P. 633-658. **25.** Gerstle K.H. Simple Formulation of Triaxial Concrete Behavior / Gerstle K.H. // ACI Journal. – 1985. - №5. – P.382-387. **26.** Kupfer H.B. / Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses / Kupfer H.B., Gerstle K.H. // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1997. – V.99. – EM4. – P.853-856. **27.** Ngo D. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beam / Ngo D., Scordelis A.C. // ACI Joarnal. – 1967. – V.64, №3. – P.152-163. **28.** Городецкий А.С. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций / А.С. Городецкий, В.С. Шмуклер, А.В. Бондарев. – Киев – Харьков, 2003. – 889 с.