

УДК 691.327.539.434

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДІАГРАМ ЦИКЛІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОНУ ТА ЇХНЯ ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИАГРАММ ЦИКЛИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА И ИХ ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

MATHEMATICAL MODELS OF DIAGRAMS OF CYCLIC DEFORMATION OF CONCRETE AND THEIR GRAPHIC INTERPRETATION

Крусъ Ю.О., канд. техн. наук, доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

Крусъ Ю.А., канд. техн. наук, доцент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

Krus Y.A., candidate of technical sciences, associate professor (National university of water management and nature resources use, Rivne)

Отримані математичні моделі діаграм циклічного деформування бетону для різних випадків статичних малоциклових навантажуваль, а саме - центрального стиснення у "м'якому" і "жорсткому" силових режимах та стиснення при згинанні. Наведена графічна інтерпретація зазначених моделей.

Получены математические модели диаграмм циклического деформирования бетона для различных случаев статических малоцикловых нагружений, а именно - центрального сжатия в "мягком" и "жестком" силовых режимах и сжатия при изгибе. Представлена графическая интерпретация указанных моделей.

Mathematical models of diagrams of cyclic deformation of concrete for various cases of the static little cyclic loadings (namely - for the central compression in "soft" and "hard" force modes and for compression at a bend) are received. Graphic interpretation of the specified models is submitted.

Ключові слова:

Бетон, малоциклові навантажуваль, діаграма деформування бетону
Бетон, малоцикловые нагружения, диаграмма деформирования бетона
Concrete, little cyclic loadings, diagram of concrete deforming

Стан питання та задачі дослідження. Дану статтю слід розглядати як логічне продовження раніше опублікованого в [1,2] викладення результатів власних експериментально-теоретичних досліджень.

Отже, розрахунки бетонних і залізобетонних конструкцій, що зазнають повторних малоциклових впливів, потребують відомостей про математичну модель **діаграми циклічного деформування бетону** - функціональну залежність між напруженнями й деформаціями, яка враховувала б особливості деформування бетону у кожному окремому n -му циклі навантажування.

Основна частина. Якщо за базові функціональні зв'язки між напруженнями σ_b і повними відносними деформаціями бетону ε_b при одноразовому центральному (однорідному) стисненні до руйнування у "м'якому" силовому режимі (тобто за математичні моделі так званих еталонних діаграм деформування) прийняти формули (див. співвідношення (26) і (33) у публікації [3])

$$\sigma_b = \frac{R_b(\varepsilon_b/\varepsilon_{bR})}{\nu_{bR} + (1-\nu_{bR})(\varepsilon_b/\varepsilon_{bR})} = \frac{R_b\eta_\varepsilon}{\nu_{bR} + (1-\nu_{bR})\eta_\varepsilon} \quad (1)$$

і

$$\varepsilon_b = \frac{\nu_{bR}\varepsilon_{bR}(\sigma_b/R_b)}{1 + (\nu_{bR} - 1)(\sigma_b/R_b)} = \frac{\nu_{bR}\varepsilon_{bR}\eta_\sigma}{1 + (\nu_{bR} - 1)\eta_\sigma} \quad (2)$$

(тут $\eta_\varepsilon = \varepsilon_b/\varepsilon_{bR}$ і $\eta_\sigma = \sigma_b/R_b$ - відповідно рівні відносних деформацій і напружень у бетоні), то, очевидно, зазначені математичні моделі для завантажувальних віток діаграми його циклічного деформування у записах $\sigma_{b,i;n} = f(\varepsilon_{b,i;n})$ і $\varepsilon_{b,i;n} = f(\sigma_{b,i;n})$ матимуть вигляд відповідно

на 1-му циклі завантажування (тобто при $n=1$)

$$\sigma_{b,i;n=1} = \frac{R_b(\varepsilon_{b,i;n=1}/\varepsilon_{bR;n=1})}{\nu_{bR;n=1} + (1-\nu_{bR;n=1})(\varepsilon_{b,i;n=1}/\varepsilon_{bR;n=1})} \quad (3)$$

і

$$\varepsilon_{b,i;n=1} = \frac{\nu_{bR;n=1}\varepsilon_{bR;n=1}(\sigma_{b,i;n=1}/R_b)}{1 + (\nu_{bR;n=1} - 1)(\sigma_{b,i;n=1}/R_b)}; \quad (4)$$

на подальших n -их циклах завантажування (тобто при $n>1$)

$$\sigma_{b,i;n} = \frac{R_{b,cyc} \left[\left(\sum_{n=2}^n \varepsilon_{b,i;n} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \varepsilon_{b,pl;m} \right) / \varepsilon_{bR;n} \right]}{\nu_{bR;n} + (1-\nu_{bR;n}) \left[\left(\sum_{n=2}^n \varepsilon_{b,i;n} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \varepsilon_{b,pl;m} \right) / \varepsilon_{bR;n} \right]} \quad (5)$$

і

$$\sum_{n=2}^n \varepsilon_{b,i;n} = \sum_{m=1}^{m=n-1} \varepsilon_{b,pl;m} + \varepsilon_{b,i;n}, \quad (6)$$

де

$$\varepsilon_{b,i;n} = \frac{v_{bR;n} \varepsilon_{bR;n} (\sigma_{b,i;n} / R_{b,cyc})}{1 + (v_{bR;n} - 1) (\sigma_{b,i;n} / R_{b,cyc})} \quad (7)$$

(тут i - довільний ступінь повторного завантажування на кожному окремому n -му циклі; $E_{b0;n}$, $v_{bR;n} = 1 - \lambda_{bR;n}$, $\lambda_{bR;n}$, $\varepsilon_{bR;n}$ і $\sum \varepsilon_{b,pl;n}$ - основні деформативні характеристики бетону при повторних малоциклових навантажуваннях (або інакше - параметри еталонної діаграми циклічного деформування бетону), які залежать від $\eta_{b,cyc} = R_{b,cyc} / R_b$ і n та визначаються за відповідними формулами (1)...(4) з урахуванням співвідношень (5)... (12) із табл. 2 у публікації [2]; решта позначень - ті ж самі, що й у виразах (14)...(16) зазначеного посилання [2]).

Зрозуміло, що для розглядуваного випадку стаціонарного навантажування бетону (центральним стисненням у "м'якому" силовому режимі при $\sigma_{b,max} = const$) матимемо $\sigma_{b,i;n=1} = \sigma_{b,i;n} = \bar{\sigma}_{b,i}$.

Прийнявши за вихідну функціональну залежність між напруженнями $\bar{\sigma}_b$ і повними відносними деформаціями бетону ε_b при одноразовому центральному (однорідному) стисненні до руйнування у "жорсткому" силовому режимі (тобто за математичну модель так званої трансформованої діаграми деформування) власне аналітичне співвідношення (див. вирази (10), (2) і (4) у наукових працях відповідно [4], [5] і [6])

$$\bar{\sigma}_b = \frac{\bar{R}_b (\varepsilon_b / \bar{\varepsilon}_{bR})}{v_{bR} + (1 - v_{bR}) (\varepsilon_b / \bar{\varepsilon}_{bR})^{1/(1-v_{bR})}}, \quad (8)$$

отримаємо відповідні математичні моделі для завантажувальних віток діаграми його циклічного деформування у такому вигляді:

на 1-му циклі завантажування (при $n=1$)

$$\bar{\sigma}_{b,i;n=1} = \frac{\bar{R}_b (\varepsilon_{b,i;n=1} / \bar{\varepsilon}_{bR;n=1})}{v_{bR;n=1} + (1 - v_{bR;n=1}) (\varepsilon_{b,i;n=1} / \bar{\varepsilon}_{bR;n=1})^{1/(1-v_{bR;n=1})}}; \quad (9)$$

на подальших n -их циклах завантажування (при $n>1$)

$$\bar{\sigma}_{b,i;n} = \frac{\bar{R}_b \left[\left(\sum_{n=2}^n \varepsilon_{b,i;n} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \varepsilon_{b,pl;m} \right) / \bar{\varepsilon}_{bR;n} \right]}{v_{bR;n} + (1 - v_{bR;n}) \left[\left(\sum_{n=2}^n \varepsilon_{b,i;n} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \varepsilon_{b,pl;m} \right) / \bar{\varepsilon}_{bR;n} \right]^{1/(1-v_{bR;n})}}. \quad (10)$$

З математичних моделей (9) і (10) при відповідно $\varepsilon_{b,i;n=1} = \bar{\varepsilon}_{bu;n=1}$ і $\varepsilon_{b,i;n} = \bar{\varepsilon}_{bu;n}$ можна отримати такі рівняння зв'язку для визначення граничних (критичних) міцностей бетону $\bar{R}_{bu;n=1}$ і $\bar{R}_{bu;n}$:

$$\bar{R}_{bu;n=l} = \frac{\bar{R}_b (\bar{\epsilon}_{bu;n=l} / \bar{\epsilon}_{bR;n=l})}{v_{bR;n=l} + (1 - v_{bR;n=l}) (\bar{\epsilon}_{bu;n=l} / \bar{\epsilon}_{bR;n=l})^{I/(1-v_{bR;n=l})}}; \quad (11)$$

$$\bar{R}_{bu;n} = \frac{\bar{R}_b (\bar{\epsilon}_{bu;n} / \bar{\epsilon}_{bR;n})}{v_{bR;n} + (1 - v_{bR;n}) (\bar{\epsilon}_{bu;n} / \bar{\epsilon}_{bR;n})^{I/(1-v_{bR;n})}}. \quad (12)$$

У формулах (9)...(12) \bar{R}_b , $\bar{\epsilon}_{bR;n=l}$ і $\bar{\epsilon}_{bu;n=l}$ - параметри відповідної до еталонної трансформованої діаграми деформування бетону при одноразовому центральному стисненні до руйнування, які визначаються за власною методикою із виразів (див. співвідношення (12)...(14) у публікації [5])

$$\bar{R}_b = R_{b,crc}^{top}; \quad (13) \quad \bar{\epsilon}_{bR;n=l} = (\bar{R}_b / R_b) \epsilon_{bR;n=l}; \quad (14)$$

$$\bar{\epsilon}_{bu;n=l} = \frac{2\epsilon_{bR;n=l}}{\bar{R}_b / R_b} \times \frac{I - v_{bR;n=l} (3 - \ln|v_{bR;n=l}|) + 2v_{bR;n=l}^2 (I - \ln|v_{bR;n=l}|)}{2v_{bR;n=l} (2v_{bR;n=l}^2 - 3v_{bR;n=l} + I) \text{LerchPhi}\left(\frac{v_{bR;n=l} - I}{v_{bR;n=l}}, I, -2v_{bR;n=l}\right) + 4v_{bR;n=l}^2 - 7v_{bR;n=l} + 3}; \quad (15)$$

$\bar{\epsilon}_{bR;n}$ і $\bar{\epsilon}_{bu;n}$ - параметри трансформованої діаграми циклічного деформування бетону, які обчислюються відповідно зі співвідношень

$$\bar{\epsilon}_{bR;n} = (\bar{R}_b / R_{b,cyc}) \epsilon_{bR;n}; \quad (16)$$

$$\bar{\epsilon}_{bu;n} = \frac{2\epsilon_{bR;n}}{\bar{R}_b / R_{b,cyc}} \times \frac{I - v_{bR;n} (3 - \ln|v_{bR;n}|) + 2v_{bR;n}^2 (I - \ln|v_{bR;n}|)}{2v_{bR;n} (2v_{bR;n}^2 - 3v_{bR;n} + I) \text{LerchPhi}\left(\frac{v_{bR;n} - I}{v_{bR;n}}, I, -2v_{bR;n}\right) + 4v_{bR;n}^2 - 7v_{bR;n} + 3}; \quad (17)$$

решта параметрів (R_b , R_{cyc} , $v_{bR;n=l}$, $v_{bR;n}$, $\epsilon_{bR;n=l}$, $\epsilon_{bR;n}$, та ін.) - ті ж самі, що й у формулах (3)...(7).

Якщо скористатись як вихідним функціональним зв'язком між напруженнями σ_b і повними відносними деформаціями бетону ϵ_b при його одноразовому стисненні до руйнування в умовах неоднорідного напруженого стану (зокрема, в умовах стиснення при згинанні) законом деформування

$$\sigma_{b,зг.} = \frac{R_b (\epsilon_b / \epsilon_{bR})}{v_{bR} + (1 - v_{bR}) (\epsilon_b / \epsilon_{bR})^{I/(1-v_{bR})}} \quad (18)$$

(тут R_b , ϵ_{bR} і v_{bR} - параметри еталонної діаграми деформування бетону, встановлювані стандартними лабораторними випробуваннями до руйнування згідно з [7] призмових зразків із бетону у "м'якому" режимі навантажування центральним (однорідним) стисненням, тобто - те ж саме, що й у формулах

(1) і (2)), то відповідні математичні моделі для завантажувальних віток діаграми його циклічного деформування набувають такого вигляду:

на 1-му циклі завантажування (при $n=1$)

$$\sigma_{b,3\epsilon,i;n=1} = \frac{R_b(\epsilon_{b,i;n=1}/\epsilon_{bR;n=1})}{\nu_{bR;n=1} + (1-\nu_{bR;n=1})(\epsilon_{b,i;n=1}/\epsilon_{bR;n=1})^{1/(1-\nu_{bR;n=1})}}; \quad (19)$$

на подальших n -их циклах завантажування (при $n>1$)

$$\sigma_{b,3\epsilon,i;n} = \frac{R_{b,cyc} \left[\left(\sum_{n=2}^n \epsilon_{b,i;n} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \epsilon_{b,pl;m} \right) / \epsilon_{bR;n} \right]}{\nu_{bR;n} + (1-\nu_{bR;n}) \left[\left(\sum_{n=2}^n \epsilon_{b,i;n} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \epsilon_{b,pl;m} \right) / \epsilon_{bR;n} \right]^{1/(1-\nu_{bR;n})}}. \quad (20)$$

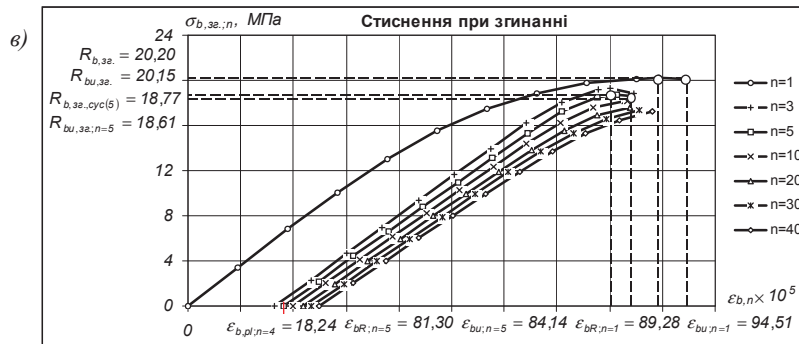
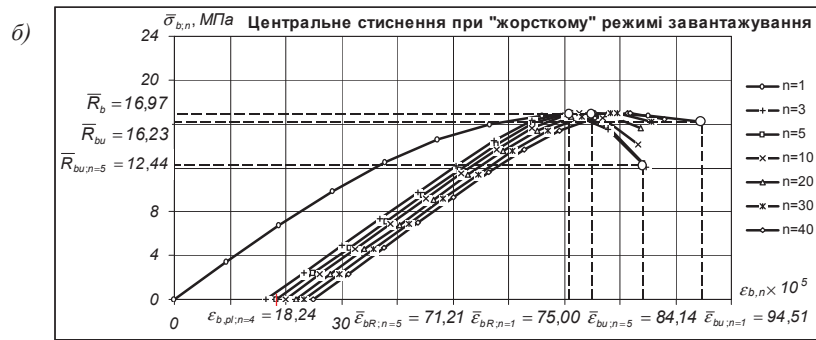
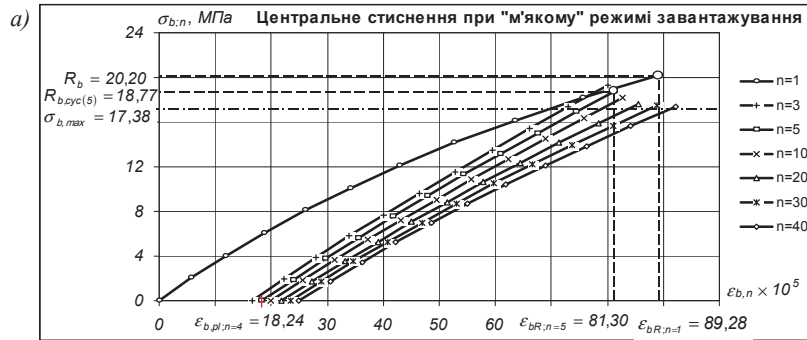
Граничні (критичні) міцності бетону $R_{bu;n=1}$ і $R_{bu;n}$ можуть бути визначені із зазначених математичних моделей (19) і (20) при відповідно $\epsilon_{b,i;n=1}=\bar{\epsilon}_{bu;n=1}$ і $\epsilon_{b,i;n}=\bar{\epsilon}_{bu;n}$ за виразами

$$R_{bu,3\epsilon;n=1} = \frac{R_b(\bar{\epsilon}_{bu;n=1}/\epsilon_{bR;n=1})}{\nu_{bR;n=1} + (1-\nu_{bR;n=1})(\bar{\epsilon}_{bu;n=1}/\epsilon_{bR;n=1})^{1/(1-\nu_{bR;n=1})}}; \quad (21)$$

$$R_{bu,3\epsilon;n} = \frac{R_{b,cyc} \left[\left(\sum_{n=2}^n \bar{\epsilon}_{bu;n} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \epsilon_{b,pl;m} \right) / \epsilon_{bR;n} \right]}{\nu_{bR;n} + (1-\nu_{bR;n}) \left[\left(\sum_{n=2}^n \bar{\epsilon}_{bu;n} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \epsilon_{b,pl;m} \right) / \epsilon_{bR;n} \right]^{1/(1-\nu_{bR;n})}}, \quad (22)$$

де $\bar{\epsilon}_{bu;n=1}=\bar{\epsilon}_{bu;n=1}$ і $\bar{\epsilon}_{bu;n}=\bar{\epsilon}_{bu;n}$ - параметри трансформованих діаграм відповідно одноразового (до руйнування) і циклічного деформувань бетону, які можуть бути обчислені відповідно зі співвідношень (15) і (17); решта параметрів - ті ж самі, що й у формулах (3)...(7).

Графічне тлумачення розрахункових діаграм циклічного поздовжнього деформування важкого крупнозернистого бетону КЗБ на традиційних заповнювачах у координатних осях $\sigma_{b,n} \sim \epsilon_{b,n}$ для різних випадків його навантажування (центрального (однорідного) стиснення у "м'якому" і "жорсткому" силових режимах та неоднорідного стиснення при згинанні) на прикладі роботи призмовео зразка КЗБ-І-2-46 [0...0,86] (див. наукові праці [1,2]), що витримав максимальну кількість циклів до руйнування ($n_{cyc}=43$ цикли при нижньому й верхньому відносних рівнях напружень відповідно $\eta_b^{low}=0$ і $\eta_b^{top}=0,86$), представлено на рисунку. Звернімо увагу, що зазначені діаграми побудовані лише для етапу роботи бетону, коли він перебуває у стані стійкого деформування на I-й і II-й стадіях (див. рис. 4 у публікації [1]).



Розрахункові діаграми циклічного поздовжнього деформування важкого крупнозернистого бетону КЗБ на традиційних заповнювачах у координатних осях $\sigma_{b,n} \sim \epsilon_{b,n}$ (на прикладі дослідного призмового зразка КЗБ-І-2-46 [0...0,86]) для різних випадків його завантаження: а і б - центральне (однорідне) стиснення відповідно у "м'якому" і "жорсткому" силових режимах; в - неоднорідне стиснення при згинанні

Подібно до отриманих виразів (3)...(7), (9)...(10), (18)...(19) і виконаного рисунку можна математично описати й графічно оформити діаграми поперечного циклічного деформування бетону при його стисненні та поздовжнього й поперечного деформувань - при розтягненні.

Висновок. Немає сумнівів у тому, що отримані математичні моделі циклічного деформування бетону можуть бути ефективно використані для деформційного методу розрахунку зігнутих стиснено-розтягнених залізобетонних елементів (де бетон працює в умовах неоднорідного напруженого стану) при дії повторних малоциклових навантажень за всіма групами граничних станів (міцністю, деформаціями, утворенням і розкриттям тріщин), а також найбільш повного оцінювання роботи будь-яких елементів в умовах зазначених малоповторних силових впливів незалежно від виду й класу застосованих матеріалів (бетону й арматури), форми поперечного перерізу й розподілу арматури в його межах та ін., виходячи з фактичного напружено-деформованого стану перерізів.

1. Крусь Ю.О., Крусь О.Ю. Деформування й руйнування бетону в умовах повторних малоциклових навантажувальних будівельних конструкцій: Міжвід. наук.-техн. зб. - Київ: ДП НДІБК, 2011. - Вип. 74. Кн. 1. - С. 629-639.
2. Крусь Ю.О. Узагальнені циклічні діаграми деформування бетону в умовах повторних малоциклових навантажувальних центральних стисненням//Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. - Рівне, 2014. - Вип. 28. - С. 238-247.
3. Бабич Є.М., Крусь Ю.О. До питання побудови діаграм деформування бетону та визначення коефіцієнта повноти епюри напружень//Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. - Рівне: Вид-во РДТУ, 2001. - Вип. 6. - С. 94-104.
4. Крусь Ю.О., Крусь О.Ю. Моделювання зв'язку між напруженнями і деформаціями центрально стисненого бетону при різних режимах його навантажування//Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. - Рівне, 2012. - Вип. 23. - С. 285-292.
5. Крусь Ю.А., Крусь А.Ю. Энергетический метод определения предельной сжимаемости бетона//Будівельні конструкції: Міжвід. наук.-техн. зб. - Київ: ДП НДІБК, 2013. - Вип. 78. Кн. 2. - С. 22-33.
6. Крусь Ю.О. Визначення коефіцієнта повноти епюри напружень і положення рівнодіючого зусилля напружень у бетоні стисненої зони нормальних перерізів згинаних залізобетонних елементів//Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. - Рівне, 2013. - Вип. 27. - С. 109-119.
7. ГОСТ 24452-80. Бетоны. Методы определения призмочной прочности, модуля упругости и коэффициента Пуассона. - М.: Изд-во стандартов, 1981. - 55 с.