

УДК 624.012.45

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ

ПОБУДОВА ЛІНЕАРИЗОВАНИХ ДІАГРАМ ДЕФОРМУВАННЯ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЩО ЗГІНАЮТЬСЯ, ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ З ДОВІЛЬНИМИ РОЗМІРАМИ.

THE PLOTTING OF LINEARIZED DIAGRAMS OF DEFORMATION OF BENT REINFORCED CONCRETE ELEMENTS RECTANGULAR CROSS-SECTION WITH RANDOM SIZE.

Ковров А.В., к.т.н., проф., Ковтуненко О.В., к.т.н. (Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса)

Ковров А.В., к.т.н., проф., Ковтуненко А.В., к.т.н. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Kovrov A.V., candidate of technical sciences, professor, Kovtunencko A.V., candidate of technical sciences (Odessa state academy of civil engineering and architecture, Odessa)

Запропоновано вдосконалення методики побудови лінеаризованих діаграм деформування залізобетонних елементів, що згинаються, прямокутного перерізу з довільними розмірами.

Предложено совершенствование методики построения линейризованных диаграм деформирования изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения с произвольными размерами.

The method improvement of plotting of linearized diagrams of deformation of bent reinforced concrete elements rectangular cross-section with random size is proposed.

Ключові слова: залізобетон, згин, момент, кривизна, діаграма
Железобетон, изгиб, момент, кривизна, диаграмма
Reinforced concrete, bending, moment, curvature, diagram

Постановка проблеми. Несущая способность и жесткость изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения, в

соответствии с действующими нормативными документами [0], определяется путем построения диаграммы «изгибающий момент – кривизна» шагово-итерационным способом. Уравнения равновесия, используемые при построении диаграммы, имеют следующий вид:

$$\frac{bf_{cd}}{\bar{\aleph}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left(\frac{\varepsilon_{c(1)}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{k+1} + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{bf_{cd}}{\bar{\aleph}^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left(\frac{\varepsilon_{c(1)}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{k+2} + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} (x_1 - z_{si}) - M = 0. \quad (2)$$

где $\bar{\aleph} = \aleph / \varepsilon_{c1}$ – относительная кривизна;

$\varepsilon_{c(1)}$ – деформация наиболее сжатого волокна бетона;

x_1 – высота сжатой зоны бетона;

z_{si} – расстояние от i -го стержня или слоя арматуры до наиболее сжатой грани сечения.

В работе [0] несущую способность и жесткость изгибаемых железобетонных элементов при нелинейном расчете статически неопределимых конструкций предложено определять по линеаризованным диаграммам «изгибающий момент – кривизна». При построении линеаризованных диаграмм использовались уравнения равновесия, записанные в следующем виде:

$$bx_c \left[f_{cd} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^k - f_{ctd} \left(\frac{\varepsilon_{ctu1} - \varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_c} - \frac{\varepsilon_{ct1}}{2\varepsilon_c} \right) \right] + \quad (3)$$

$$+ E_s (A_{sc} \varepsilon_{sc} - A_{st} \varepsilon_{st}) = 0,$$

$$bx_c^2 \left[f_{cd} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^k + \frac{f_{ctd}}{2} \left(\frac{\varepsilon_{ctu1}^2 - \varepsilon_{ct1}^2}{\varepsilon_c^2} - \frac{\varepsilon_{ct1}^2}{3\varepsilon_c^2} \right) \right] + \quad (4)$$

$$+ E_s [A_{sc} \varepsilon_{sc} (x_c - a_{sc}) + A_{st} \varepsilon_{st} (h_0 - x_c)] - M = 0.$$

где x_c – высота сжатой зоны бетона;

h_0 – рабочая высота сечения;

a_{sc} – расстояние от наиболее сжатой грани до центра тяжести сжатого слоя арматуры;

$\varepsilon_c, \varepsilon_{sc}, \varepsilon_{st}$ – деформации, соответственно, наиболее сжатого волокна бетона, сжатого слоя арматуры и растянутого слоя арматуры;

A_{sc}, A_{st} – площади сжатого и растянутого слоя арматуры соответственно.

В уравнения (3) и (4) не входит кривизна в явном виде, что обуславливает необходимость дополнительных вычислений при построении диаграмм.

В уравнения (1) и (2), а также уравнения (3) и (4) входят размеры поперечного сечения изгибаемого железобетонного элемента, что обуславливает необходимость решать отдельную задачу для каждого сечения.

Целью работ является совершенствование методики построения линеаризованных диаграмм «изгибающий момент – кривизна» для определения жесткости и несущей способности изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения произвольных размеров.

Основная часть. Взаимосвязь между деформацией крайнего сжатого волокна бетона ε_c , высотой сжатой зоны бетона x_c и кривизной \aleph имеет вид:

$$x_c = \frac{\varepsilon_c}{\aleph} \quad (5)$$

В результате подстановки выражения (5) в уравнения (3) и (4) получим:

$$b \left[f_{cd} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k \varepsilon_c^{k+1}}{k+1} \aleph \varepsilon_{c1}^k - f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{ct1}}{\aleph} - \frac{\varepsilon_{ct1}}{2\aleph} \right) \right] +$$

$$+ E_s (A_{sc} \varepsilon_{sc} - A_{st} \varepsilon_{st}) = 0,$$

$$b \left[f_{cd} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k \varepsilon_c^{k+2}}{k+2} \aleph^2 \varepsilon_{c1}^k - f_{cd} \left(\frac{\varepsilon_{ct1}^2}{\aleph^2} - \frac{\varepsilon_{ct1}^2}{3\aleph^2} \right) \right] +$$

$$+ E_s \left[A_{sc} \varepsilon_{sc} \left(\frac{\varepsilon_c}{\aleph} - a_{sc} \right) + A_{st} \varepsilon_{st} \left(h_0 - \frac{\varepsilon_c}{\aleph} \right) \right] - M = 0. \quad (7)$$

Для приведения полученных уравнений (6) и (7) к безразмерному виду разделим их соответственно на $f_{cd}bh$ и $f_{cd}bh^2$. Тогда уравнения равновесия для изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения запишутся в виде:

где $\chi = \aleph h$ – приведенная к высоте сечения кривизна (приведенная кривизна);

$$\varphi_{ct} = f_{ctd} / f_{cd} ;$$

$$\varphi_s = E_s / f_{cd} ;$$

$\mu_{sc} = A_{sc} / (bh)$ – коэффициент армирования сжатой арматурой;

$\mu_{st} = A_{st} / (bh)$ – коэффициент армирования растянутой арматурой;

$\xi_{sc} = a_{sc} / h$ – относительная высота защитного слоя бетона для сжатой арматуры;

$\xi_{c0} = h_0 / h$ – относительная рабочая высота сечения;

$\alpha_M = M / (f_{cd} b h^2)$ – приведенный к безразмерному виду изгибающий момент (приведенный момент).

Как рассматривалось в работе [0] линеаризованные диаграммы «изгибающий момент – кривизна» в приведенных величинах для изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения, зависят от степени армирования и имеют один из видов, приведенных на рис. 1 и 2.

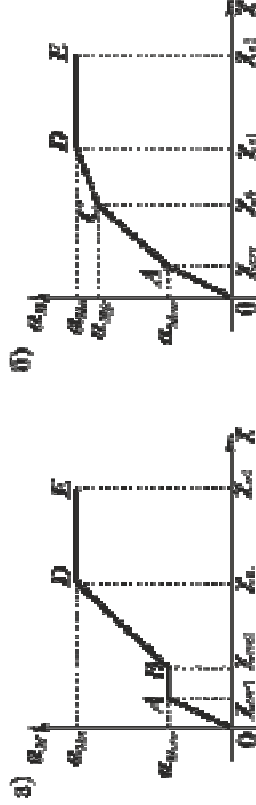


Рис. 1. Диаграммы «изгибающий момент – кривизна» в приведенных величинах:

а) для слабо армированных элементов;

б) для нормально армированных элементов

$$A_4 = 20(a_2 \epsilon_{c1} - 3a_3 \epsilon_{c1} \epsilon_{ct1} + 6a_4 \epsilon_{c1} \epsilon_{ct1}^2 - 10a_5 \epsilon_{ct1}^3);$$

$$A_5 = 30 \left\{ a_1 \epsilon_{c1}^4 - 2a_2 \epsilon_{c1}^2 \epsilon_{ct1} + 3a_3 \epsilon_{c1}^2 \epsilon_{ct1}^2 - 4a_4 \epsilon_{c1} \epsilon_{ct1}^3 + 5a_5 \epsilon_{ct1}^4 + 2\varphi_8 \epsilon_{c1}^5 \times \right. \\ \left. \times [\mu_{sc} (1 - \xi_{sc}) + \mu_{st} (1 - \xi_{c0})] \right\};$$

$$A_6 = -60 \epsilon_{ct1} \left[a_1 \epsilon_{c1}^4 - a_2 \epsilon_{c1}^3 \epsilon_{ct1} + a_3 \epsilon_{c1}^2 \epsilon_{ct1}^2 - a_4 \epsilon_{c1} \epsilon_{ct1}^3 + a_5 \epsilon_{ct1}^4 + \varphi_8 \epsilon_{c1}^5 \times \right. \\ \left. (\mu_{sc} + \mu_{st}) \right];$$

$$A_7 = \epsilon_{ct1}^2 (30a_1 \epsilon_{c1}^4 - 20a_2 \epsilon_{c1}^3 \epsilon_{ct1} + 15a_3 \epsilon_{c1}^2 \epsilon_{ct1}^2 - 12a_4 \epsilon_{c1} \epsilon_{ct1}^3 + 10a_5 \epsilon_{ct1}^4) - \\ - 30\varphi_8 \epsilon_{c1}^5 (2\epsilon_{ct1} - \epsilon_{ct1});$$

Для определения приведенного изгибающего момента трещинообразования, необходимо в уравнение (9) подставить значение приведенной кривизны, полученное из уравнения (10), и деформации крайнего сжатого волокна бетона, сжатой и растянутой арматуры.

Горизонтальный участок AB на диаграмме, приведенной на рис. 1а, соответствует развитию трещины в поперечном сечении при неизменном значении приведенного изгибающего момента. Подставляя деформации сжатой и растянутой арматуры, выраженные через деформацию крайнего сжатого волокна бетона, в уравнения (8) и (9) после равносильных математических преобразований, получим систему уравнений относительно неизвестных деформации крайнего сжатого волокна бетона и приведенной кривизны:

$$\begin{cases} B_{1,1} \epsilon_c^6 + B_{1,2} \epsilon_c^5 + B_{1,3} \epsilon_c^4 + B_{1,4} \epsilon_c^3 + B_{1,5} \epsilon_c^2 + \\ + B_{1,6} \chi^2 + B_{1,7} \epsilon \chi + B_{1,8} = 0; \\ B_{2,1} \epsilon_c^7 + B_{2,2} \epsilon_c^6 + B_{2,3} \epsilon_c^5 + B_{2,4} \epsilon_c^4 + B_{2,5} \epsilon_c^3 + B_{2,6} \chi^3 + \\ + B_{2,7} \epsilon_c^2 \chi + B_{2,8} \epsilon_c \chi^2 + B_{2,9} \alpha_M^{prc} \chi^2 + B_{2,10} = 0; \end{cases} \quad (11)$$

где: $B_{1,1} = 10a_5$; $B_{1,2} = 12a_4 \epsilon_{c1}$; $B_{1,3} = 15a_3 \epsilon_{c1}^2$; $B_{1,4} = 20a_2 \epsilon_{c1}^3$; $B_{1,5} = 30a_1 \epsilon_{c1}^4$;
 $B_{1,6} = -60\varphi_8 \epsilon_{c1}^5 (\mu_{sc} \xi_{sc} + \mu_{st} \xi_{c0})$; $B_{1,7} = 60\varphi_8 \epsilon_{c1}^5 (\mu_{sc} + \mu_{st})$;

$$\begin{aligned}
B_{1,8} &= -30\varphi_{ct}\varepsilon_{ct}^5(2\varepsilon_{cm1} - \varepsilon_{ct1}); & B_{2,1} &= 60a_5; & B_{2,2} &= 70a_4\varepsilon_{ct1}; & B_{2,3} &= 84a_3\varepsilon_{ct1}^2; \\
B_{2,4} &= 105a_2\varepsilon_{ct1}^3; & B_{2,5} &= 140a_1\varepsilon_{ct1}^4; & B_{2,6} &= 420\varphi_s\varepsilon_{ct1}^5(\mu_{sc}\xi_{sc}^2 + \mu_{st}\xi_{st}^2); \\
B_{2,7} &= 420\varphi_s\varepsilon_{ct1}^5(\mu_{sc} + \mu_{st}); & B_{2,8} &= -840\varphi_s\varepsilon_{ct1}^5(\mu_{sc}\xi_{sc} + \mu_{st}\xi_{st}); \\
B_{2,9} &= -420\varepsilon_{ct1}^5; & B_{2,10} &= 70\varphi_{br}\varepsilon_{ct1}^5(3\varepsilon_{cm1}^2 - \varepsilon_{ct1}^2).
\end{aligned}$$

Точка C на диаграммах, приведенных на рис. 1б и 2, соответствует достижению деформациями крайнего сжатого волокна бетона предельного значения ε_{ct1} . Подставляя деформации, сжатой и растянутой арматуры, выраженные через деформацию крайнего сжатого волокна бетона, в уравнение (8) и выполняя равносильные математические преобразования, получим уравнение для определения неизвестной приведенной кривизны:

$$C_1\chi^2 + C_2\chi + C_3 = 0, \quad (12)$$

$$\text{где: } C_1 = -60\varphi_s(\mu_{sc}\xi_{sc} + \mu_{st}\xi_{st}); \quad C_2 = 60\varphi_s\varepsilon_{ct1}(\mu_{sc} + \mu_{st});$$

$$C_3 = \varepsilon_{ct1}(30a_1 + 20a_2 + 15a_3 + 12a_4 + 10a_5) - 30\varphi_{ct}(2\varepsilon_{cm1} - \varepsilon_{ct1}).$$

Для определения значения приведенного изгибающего момента, соответствующего точке C , необходимо в уравнение (9) подставить значение приведенной кривизны, полученное из уравнения (12), и деформации сжатой и растянутой арматуры.

Точка D на диаграммах, приведенных на рис. 1, соответствует достижению деформациями растянутой арматуры предела упругости ε_{s0} . Подставляя деформации сжатого волокна бетона и сжатой арматуры, выраженные через деформацию растянутой арматуры, в уравнение (8) и выполняя равносильные математические преобразования, получим уравнение для определения неизвестной приведенной кривизны:

$$D_1\chi^6 + D_2\chi^5 + D_3\chi^4 + D_4\chi^3 + D_5\chi^2 + D_6\chi + D_7 = 0, \quad (13)$$

$$\text{где } D_1 = 10a_3\varepsilon_{s0}^6; \quad D_2 = 12\varepsilon_{s0}^5(a_4\varepsilon_{ct1} - 5a_5\varepsilon_{s0});$$

$$D_3 = 15\varepsilon_{s0}^4(a_1\varepsilon_{ct1}^2 + 10a_2\varepsilon_{ct1} + 10a_3\varepsilon_{ct1}^2);$$

кривизны, определенного из уравнения (13), и деформаций крайнего сжатого волокна бетона и сжатой арматуры.

Горизонтальный участок DE на диаграммах, приведенных на рис. 1, соответствует образованию в сечении условного пластического шарнира (увеличению кривизны при постоянном значении изгибающего момента вплоть до разрушения). Критерием разрушения элемента является достижение деформациями крайнего сжатого волокна бетона или растянутой арматуры предельных значений, соответственно ε_{cr1} и $\varepsilon_{sнд}$. В соответствии с критерием разрушения, предельная приведенная кривизна определяется в результате решения одного из следующих уравнений:

— в случае разрушения в результате разрыва растянутой арматуры:

$$\mathbf{E}_1^S \chi^6 + \mathbf{E}_2^S \chi^5 + \mathbf{E}_3^S \chi^4 + \mathbf{E}_4^S \chi^3 + \mathbf{E}_5^S \chi^2 + \mathbf{E}_6^S \chi + \mathbf{E}_7^S = 0, \quad (14)$$

где $\mathbf{E}_1^S = 10a_5 \xi_{c0}^6$; $\mathbf{E}_2^S = 12\xi_{c0}^5 (a_4 \varepsilon_{c1} - 5a_5 \varepsilon_{снд})$;

$\mathbf{E}_3^S = 15\xi_{c0}^4 (a_3 \varepsilon_{c1}^2 - 4a_4 \varepsilon_{c1} \varepsilon_{снд} + 10a_5 \varepsilon_{снд}^2)$;

$\mathbf{E}_4^S = 20\xi_{c0}^3 (a_2 \varepsilon_{c1}^3 - 3a_3 \varepsilon_{c1}^2 \varepsilon_{снд} + 6a_4 \varepsilon_{c1} \varepsilon_{снд}^2 - 10a_5 \varepsilon_{снд}^3)$;

$\mathbf{E}_5^S = 30 \left[\xi_{c0}^2 (a_1 \varepsilon_{c1}^4 - 2a_2 \varepsilon_{c1}^3 \varepsilon_{снд} + 3a_3 \varepsilon_{c1}^2 \varepsilon_{снд}^2 - 4a_4 \varepsilon_{c1} \varepsilon_{снд}^3 + 5a_5 \varepsilon_{снд}^4) + \right.$
 $\left. + 2\varphi_s \mu_{sc} \varepsilon_{c1}^5 (\xi_{c0} - \xi_{sc}) \right]$;

$\mathbf{E}_6^S = -60 \left[\xi_{c0} \xi_{c0} (a_1 \varepsilon_{c1}^4 - a_2 \varepsilon_{c1}^3 \varepsilon_{снд} + a_3 \varepsilon_{c1}^2 \varepsilon_{снд}^2 - a_4 \varepsilon_{c1} \varepsilon_{снд}^3 + a_5 \varepsilon_{снд}^4) + \right.$
 $\left. + \varepsilon_{c1}^5 (\varphi_s \mu_{sc} \varepsilon_{снд} + \varphi_{sy} \mu_{st}) \right]$;

$\mathbf{E}_7^S = \varepsilon_{снд}^2 (30a_1 \varepsilon_{c1}^4 - 20a_2 \varepsilon_{c1}^3 \varepsilon_{снд} + 15a_3 \varepsilon_{c1}^2 \varepsilon_{снд}^2 - 12a_4 \varepsilon_{c1} \varepsilon_{снд}^3 + 10a_5 \varepsilon_{снд}^4) -$
 $- 30\varphi_{ст} \varepsilon_{c1}^5 (2\varepsilon_{ст1} - \varepsilon_{ст1})$;

— в случае разрушения в результате раздробления сжатого бетона:

$$\mathbf{E}_1^C \chi + \mathbf{E}_2^C = 0, \quad (15)$$

приведенного изгибающего момента:

$$\frac{d\alpha_M}{d\chi} = 0. \quad (16)$$

Ввиду наличия взаимосвязи между значениями деформаций крайнего сжатого волокна бетона и приведенной кривизны, входящих в уравнение (9), получение дополнительного уравнения из условия экстремальности (16) требует громоздких математических преобразований. В связи с этим, определение параметров, соответствующих точке F , предлагается производить при помощи шагово-итерационного метода. Для этого необходимо задать серией значений деформации крайнего сжатого волокна бетона, для которых выполняется условие $\epsilon_{c1} \leq \epsilon_{c(t)}$, и подставить их в уравнение равновесия (8). В результате равносильных преобразований получим уравнение для определения значений приведенной кривизны, соответствующих заданным значениям деформаций крайнего сжатого волокна бетона:

$$F_1 \chi_i^2 + F_{2(t)} \chi_i + F_{3(t)} = 0, \quad (17)$$

где $F_1 = -60\varphi_s \epsilon_s^5 \mu_{st} \xi_{c0}$; $F_{2(t)} = 60\epsilon_{c1}^5 (\varphi_{sy} \mu_{sc} + \varphi_s \mu_{sc} \epsilon_{c(t)})$;

$$F_{3(t)} = \epsilon_{c(t)}^2 (30a_1 \epsilon_{c1}^4 + 20a_2 \epsilon_{c1}^3 \epsilon_{c(t)} + 15a_3 \epsilon_{c1}^2 \epsilon_{c(t)}^2 + 12a_4 \epsilon_{c1} \epsilon_{c(t)}^3 + 10a_5 \epsilon_{c(t)}^4) - 30\varphi_{ct} \epsilon_{c1}^5 (2\epsilon_{ctm1} - \epsilon_{ct1}).$$

Значения приведенных изгибающих моментов, соответствующих принятым значениям деформации крайнего сжатого волокна бетона, определяются путем подстановки в уравнение (9) значений приведенной кривизны, определенных в результате решения уравнений (17).

Для построения точки F из серии значений приведенной кривизны и приведенного изгибающего момента, полученных при принятых значениях деформации крайнего сжатого волокна, выбирается максимальное значение

приведенного изгибающего момента и соответствующее ему значение приведенной кривизны.

Точка G на диаграмме, приведенной на рис. 2, соответствует достижению предельной приведенной кривизны при уменьшении относительного изгибающего момента, воспринимаемого сечением. Значение приведенной кривизны, соответствующей точке G , определяем путем решения уравнения (17) при деформации крайней сжатого волокна бетона $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$. Для определения значения приведенного изгибающего момента, полученное значение приведенной кривизны подставляем в уравнение (9).

Уравнения равновесия (8)...(17) позволяют построить линеаризованные диаграммы «изгибающий момент – кривизна» в приведенных величинах для изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения с произвольными размерами. Изгибная жесткость железобетонного элемента прямоугольного сечения на любом этапе работы сечения может быть определена, в соответствии с принятыми обозначениями, по формуле:

$$B_M = \frac{M}{\chi} = \frac{\alpha_M}{\chi} f_{cd} b h^3. \quad (18)$$

Выводы

1. Совершенствована методика построения линеаризованных диаграмм деформирования изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения в приведенных к безразмерному виду величинах.
2. Предложенная методика позволяет определять несущую способность и жесткость железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения по диаграммам, зависящим только от степени армирования.
3. Требуется дальнейшее исследование влияния степени армирования поперечного сечения (φ_s , φ_{sp} , μ_{sc} и μ_{st}) на вид диаграммы «изгибающий момент – кривизна» в приведенных величинах.

1. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування: ДСТУ Б В.2.6-156:2010. – Офіц. вид. Київ: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2011. – 166 с. – (Нормативний документ Міністерства будівництва України).